UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2017:15

Arkimedes metod

Björn Berglund

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare: Anders Öberg
Examinator: Veronica Crispin Quinonez
Juni 2017

Department of Mathematics
Uppsala University

Innehåll

1 Abstract

This is an introduction of Archimedes work that is referred to as “The method”. The manuscript containing this work was discovered very late compared to Archimedes other more well-known works in mathematics, and as it would turn out it gave a new insight of mathematics of that time. “The method” can be divided in two steps that includes first the use of his own Law of the lever, followed by using indivisibles to find different geometric plane figures area and bodies volume. The first two propositions are derived in this essay from the English translated version of Tomas L. Health’s book on Archimedes method. Archimedes method never got approved as a rigorous reasoning when solving a mathematical problem of their time. This was because of the use of indivisibles even though it did give a correct result. The Greek view of mathematical infinity and the paradoxes that came with it never gave the indivisibles a trustworthy status. So, when a result was found by “The method” a geometric line of argument was required for it to gain the status of “mathematically proven”. Archimedes stated that his result regarding the segment of a parabola (*the segment of a parabola is four-thirds of the triangle which has the same base and equal height*) was first obtained with his method before proving it geometrically in his work called “The Quadrature of the Parabola”. The same goes for the result and proof regarding the sphere (*the sphere is four times the cone with its base equal to the greatest circle of the sphere and height equal to its radius*) found in the works “On the spheres and cylinders”. With the discovery of “The method” in 1906 it became plausible that the use of indivisibles had been more common in antiquity then previously thought.

2 Introduktion

Arkimedes var unik för sin tid då han var den första matematiker att härleda kvantitativa resultat från sina matematiska modeller av reella fysiska problem. Exempel på detta var hävstångsprincipen och även de grundläggande principerna för hydrostatik som fick namnet Arkimedes princip[1]. I Arkimedes verk med titeln "The Method on Mechanical Theorems" som för första gången i modern tid påträffades 1906[2] så tar han steget längre och applicerar just dessa modeller på helt vanliga geometriska problem. "Metoden" som jag kommer benämna den går ut på hur man kalkylerar olika geometriska figurers areor och volymer. Detta genom att med ett infinitesimalt tankesätt och genom att applicera sin modell Arkimedes utarbetat om jämvikt i sitt verk om hävstångsprincipen får fram just detta.[3] För att förstå metoden så tittar vi närmare på hur Arkimedes härledde sina två första propositioner ur 'Metoden'. Den första är att parabelsegmentet är $\frac{4}{3}$ av arean av triangeln med samma bas och höjd. Den andra att sfären är 4 gånger volymen hos konen med basen sätt till största möjliga cirkeln av sfären och höjden lika till radien. För att förstå dessa två propositioner måste vi klargöra och få förståelse kring hävstångsprincipen, tyngdpunkt och indivisibler och det framgår i varsitt kapitel.

Arkimedes levde mesta delen av sitt liv i hamnstaden Syrakusa på Sicilien. Född 287 f. vt och enligt historien tragiskt nedhuggen av en soldat ur romerska armén år 212 f.vt som var i färd med att belägra staden. Arkimedes sägs haft en sådan hängivenhet och oförmåga att släppa sina matematiska problem till den grad att han helt försummade sin hälsa. Just denna kärlek till sitt arbete sägs stått i grund till hans sorgliga död. Detta då han uttryckt sitt missnöje över att behöva lämna sitt arbete för att bli bortförd vid krigets slut. Detta uttryckta missnöje var uppretande nog för den romerska soldaten att ta till dödligt våld[4]. Men innan sin tragiska död hann denna man med ett och annat för att få sitt namn i historieböckerna. Arkimedes är en av sitt århundrades mest framträdande matematiker. Men är nog mer ihågkommen för sina uppfinningar och observationer av naturliga fysiska lagar. En av dessa är Arkimedes skruv, med syfte att transportera fasta materia från en nivå till en annan. Denna uppfinning har använts i vid utsträckning och nyttjas än idag med originalet som inspirationskälla. Också känd är den idé som kom till honom när han vid ett bad sänkte ner sig själv och såg vattnet som hans kropp trängde undan rinna över kanten. Detta väckte en idé som skulle forma sig till Arkimedes princip.

[1] [1, s.96]
[2] [2, s.69]
[3] [2, s.69]
[4] [1, s.97]

Arkimedes blev först introducerad till matematik av sin far Phidias, som var en Astronom på Syrakusa. Arkimedes reste senare till Alexandria i Egypten som var vetenskapens Mecka vid den här tiden. Här så förfinade han sina matematiska kunskaper och fick ett kontaktnätverk av andra matematiker som han sedan efter sitt återvändande till sin hemstad Syrakusa dedikerade och skickade sina matematiska verk till. Chefsbibliotekarien Eratosthenes var den som fick motta flera av Arkimedes verk och även brevet innehållande Metoden[5].

Metoden påträffade för första gången i ett av de manuskripter som transporterades från ett kloster i Jerusalem till Istanbul. Där det blev tolkat och översatt av en dansk forskare vid namn Johan Ludvig Heiberg år 1907, som dessförinnan hade givit ut en bok om Arkimedes mellan 1880-1881. Efter upptäckten av det nya manuskriptet publicerades en tolkning av denna mellan 1910-1915 skriven av Heiberg. Under omständigheterna kring första världskriget så försvann dock originalmanuskriptet och var borta tills 29 oktober 1998 då den dök upp på en auktion och auktionerades ut i New York för 2,150,000 dollar. Köparen gav förvaltningen av detta manuskript till Walters konstmuseum i Baltimore[6].

[5] [1, s.97]
[6] [2, s.69]

3 Metod

I denna uppsats ska vi genomgående tolka och förstå hur Arkimedes mekaniska metod fungerar. Jag använder huvudsakligen Tomas L. Heath bok *The method of Archimedes* som informationskälla. Boken är en engelsk översättning på Johan Heibergs ursprungliga tolkning av originalmanuskriptet. Till hjälp så använder jag mig av *The works of archimedes* av Tomas L Heath för att tolka de propositioner kring hävstångsprincipen som Arkimedes tillgår i sin metod. Att jämföra dessa två verk användе jag mig av E.J. Dijksterhuis bok *Archimedes.* Även Euklides Elementa används flitigt för att få klarhet i den matematik som Arkimedes kunskap byggs på. Källan till Euklides Elementa är elektronisk i form av en webbsida skriven av David E. Joyce, professor på avdelningen för matematik och datavetenskap på Clark University, Worcester, Storbritannien. *A history of mathematics, An introduction* av Victor J. Katz och *The Great Archimedes* av Mario Geymonat användes för att reda ut begrepp som tyngdpunkt och indivisibler.

4 Hävstångsprincipen

Hävstångsprincipen kan beskrivas i sin enkelhet som hur två eller flera massor balanserar på en bräda av godtycklig längd placerad med på en stödpunkt någonstans på brädan. Detta går att jämföras med gungbrädor som finns i lekparker. Att massor med samma vikt placerat på en lika distans från stödpunkten balanserar eller att en något lättare massa kan balansera en tyngre om den placeras med ett längre avstånd från stödpunkten än den tyngre och stödpunkten var ej Arkimedes iakttagelse. Som så många andra observationer av fysikaliska ting så var det känt sen tidigare. Dock såvitt man vet finns det ingen innan Arkimedes som faktiskt gjorde en matematiskt modell för detta fenomen. När det kommer till fysiska iakttagelser så är det oftast mycket svårt att ta till alla olika parametrar som faktiskt kan påverka det aktuella utfallet i ens beräkningar. Detta är också fallet i Arkimedes bok 'On the Equilibrium of planes'[7] eller alternativt känd som 'The centres of gravity of planes'[8].

Man gör helt enkelt en mer idealiserad bild av iakttagelsen och bortser från de parametrar som har mycket liten påverkan på själva utfallet. Man fokuserar på det primära som kommer ge störst utslag på själva modellen. Vissa mindre faktorer som påverkar utfallet blir försummade i beräkningen. Exempel på sådana faktorer skulle kunna vara att själva hävarmen faktiskt har en massa och en vikt, samt även att denna vikt kan vara olika fördelad över armen. Eller att den beroende på vilket för material armen består av även kan böjas när tunga vikter appliceras på den. Stödpunkten är ett fysiskt objekt precis som vår hävarm och kan då ha olika tjocklek, vilket i sin tur ändrar den exakta punkten som blir den faktiska stödpunkten. Samt att veta den exakta tyngdpunkten på det massor som kanske inte har en uppenbar tyngdpunkt pga. av dess form. Detta gör att massa kanske placeras så att en del av massan försummas och kan därför göra att det faktiska resultatet kan differera.

Det man kan avläsa från Arkimedes böcker var då en förskönad modell där han antog att själva hävarmen var viktlös och helt oböjlig och att stödpunkten var just en punkt där det inte finns några oklarheter var själva stöden kommer vara. Utifrån detta så skapade han en matematisk modell och förutsättningar i form av sju postulat för hävstångsprincipen.[9]

[7][4, s.189]
[8][4, s.189]
[9][1, s.96]

Han börjar sin bok med 7 postulat som han utgår ifrån varav 5 relevanta för oss[10].

1. 'Lika vikter vid lika avstånd är i jämvikt, och lika vikter vid olika avstånden är inte i jämvikt men lutar mot den vikt som har den längre distansen'.
2. 'Om vikter på vissa avstånd är i jämvikt, om något då adderas till en av vikterna, så är det ej i jämvikt och lutar då mot den vikt till vilken utökningen gjordes.'
3. 'På samma sätt, om något tas bort från en av vikterna, så är det inte i jämvikt och lutar mot vikten från vilken ingenting togs'.
4. 'När lika och liknande plana figurer sammanfaller, så kommer deras tyngdpunkter likaså sammanfalla'.
5. 'Om magnituder på en viss sträcka är i jämvikt så kan andra magnituder som är lika till dem att också vara i jämvikt på samma avstånd'.

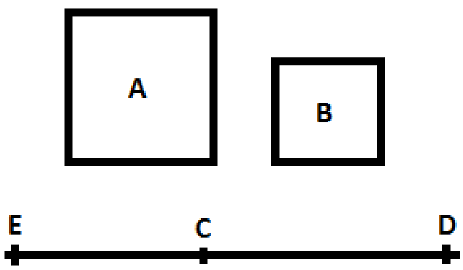
Utifrån postulaten så skapade Arkimedes sin matematiska modell och skapade två böcker med diverse Propositioner. Några av dessa är intressanta för oss i vår strävan att förstå Arkemedes Metod och vi ska därför kolla närmare på dessa. Vi ska titta på proposition 6 och 7 från Arkimedes första bok *On the equilibrium of planes*[11].

4.1 Proposition 6

Vi utgår ifrån T. Heath bok, skillnaden mellan propositionerna är jämnvikten av två magnituder som är antingen kommensurabel (prop. 6) eller inkommensurabel (prop. 7). Arkimedes menar på att:

> Två magnituder, antigen Kommensurabel(delbar), eller inkommensurabel(odelbar) är i jämnvikt på ett avstånd omvänt proportionerlig till deras vikter.

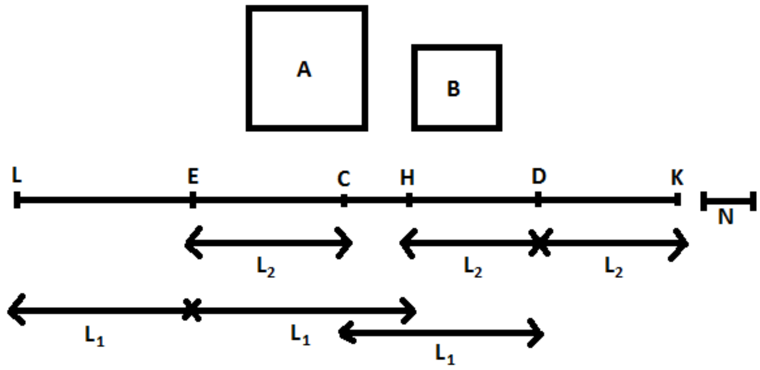
Anta att magnituderna A och B att vara kommensurabla och själva punkten A och B att vara tyngdpunkten på det båda. Låt DE vara en rät linje som delas i punkten C så att:



$$A : B = DC : CE$$

[10] [4, s.189]
[11] [4, s.96]

Då A, B är kommensurabla, så blir då också fallet för DC, CE. Låt N vara ett gemensamt mått av DC, CE. Nu gör vi DH, DK lika till CE, och EL lika med CD. $L_1 = DC$, $L_2 = CE$ Sedan om EH=CD så har vi att HK=$2L_2$, LH=$2L_1$ Vilket gör att vi har sambandet:



$$A : B = LH : HK$$

Vi observerar att E är mittpunkten på LH och D mittpunkten på HK.

Efter vår nu förlängda hävarm så kommer LH, HK att innehålla N ett jämnt antal gånger eftersom N var ett gemensamt mått av DC, CE. Ta en magnitud O så att O finns i A lika många gånger som N det får plats på LH respektive i B och HK, varav:

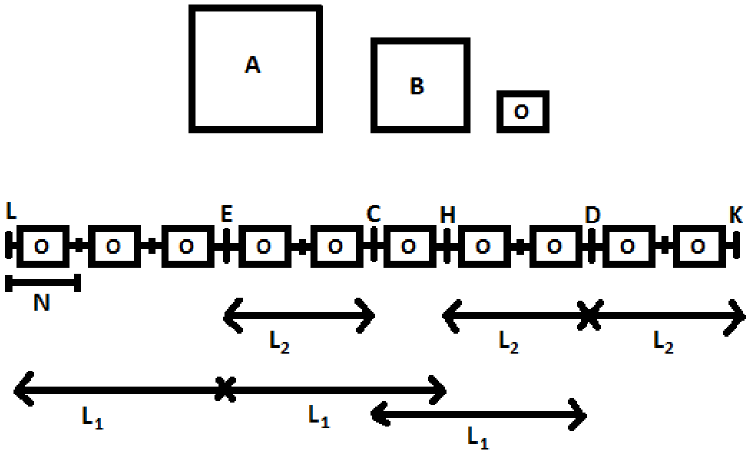
$$A : O = LH : N$$

$$B : O = HK : N$$

Men vi har att HK=2CE och LH=2DC, vilket ger oss att:

$$B : A = CE : DC = HK : LH$$

Dela LH, HK i det gemensamma måttet N och dela även magnituderna A, B i lika delar av vår magnitud O. Eftersom tidigare nämn så finns det lika många O i A som N på LH, respektive O i B som N på HK. Placera nu delarna från A i mittpunkten på det lika många uppdelade N som ligger på LH och respektive för B på HK.



Proposition 5 säger följande: *Om tre lika magnituder har sin tyngdpunkt på en rät linje på ett lika avstånd, kommer tyngdpunkten av deras ordnade helhet sammanfalla på den mittersta magnitudens tyngdpunkt.*

Tyngdpunkten för den uppdelade magnituden A på LH förefaller därför i punkten E som är mittpunkten på LH och tyngdpunkten för vår magnitud B har på samma sätt med prop.5 i tanke punkten D på HK. Vi kan nu anta att Magnitud A har sin tyngdpunkt i punkten E och magnitud B har sin tyngdpunkt i punkten D.

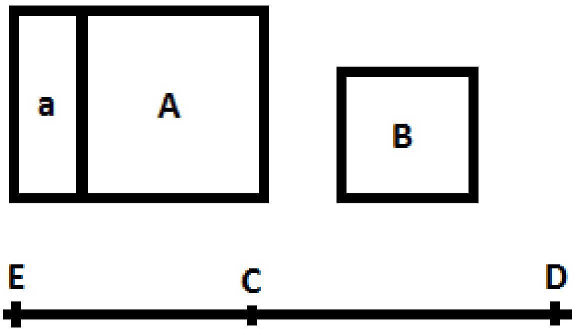
Eftersom LE=CD och EC=DK så får vi lika distanser på varsin sida sätt från punkten C. Som då blir hela det sammanfallna systemets tyngdpunkt. Så när magnitud tillhörande tyngdpunkt A placeras i E och magnitud tillhörande tyngdpunkt B i D så balanserar det hela sammanfallande systemet i en punkt C och förhålls i jämnvikt.

4.2 Proposition 7

Antag nu att magnituden A är inkommensurabel och vi har på samma sätt som i proposition 6 två magnituder och en proportionerlig linje så att följande gäller:

$$(A + a) : B = DC : CE$$

Där a är den del av A som gör denna inkommensurabel. Enligt proposition 6 så kommer magnitud (a+A) i punkten E och B i D vara i jämnvikt i en stödpunkt C. Men för beviset motsäger vi oss detta och påstår att jämnvikten i en punkt C ej är sant, ett så kallat motsägelsebevis. Då måste magnitud (A+a) vara antigen för stor eller för liten för att kunna balansera på en punkt C[12].



Vi väljer att anta att (A+a) är för stor att balansera B. Ta en magnitud a från (A+a) så att A fortfarande är för stor men ändå sådan att kvarvarande av magnitud A och B är nu balansera. Eftersom A, B nu är kommensurabla har vi:

$$A : B < DC : CE$$

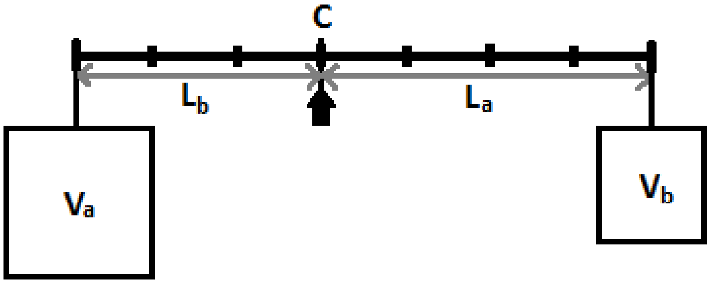
Enligt proposition 6 så kommer inte A, B balansera då vi nu har att $A : B < DC : CE$ och kommer nu luta åt sidan D då vi minskade A. Men detta motsäger ju då att vi sa att A efter reduceringen fortfarande skulle vara för stor att balansera B i C och lutar då åt E. Eftersom vi nu visat på en omöjlighet så kan vårt ursprungliga påstående ej stämma och det enda logiska är att motsatsen är korrekt vilket då säger att våra inkommensurabla magnituder kommer balansera i vår stödpunkt C. På samma sätt går det att påstå om A är för liten att balansera en magnitud B. Så detta motsägelse resonemang tillsammans med proposition 6 säger Arkimedes att oavsett inkommensurabla magnituder så finns det en punkt C som balanserar magnituderna (A+a), B[13].

[12] [4, s.193]
[13] [4, s.194]

4.3 Sammanfattning av proposition 6 & 7

Så Akrimedes förmedlar i dessa propositioner att Magnituder med en viss vikt som balanseras på en hävarm på varsin sida om en balanspunkt C kommer ligga i jämnvikt om avstånden från punkten C är inversproportionerlig till vikterna. Alltså om vi ska balansera vikterna V_a,V_b där V_a>V_b så måste vikterna ligga på en omvänt avstånd på en hävarm vars längd är indelad i samma proportioner som vikterna mot en punkt C.

Säg att det står i proportion $V_a : V_b = L_a : L_b$ så kommer avståndet från vikterna placeras i dess tyngdpunkt på ett avstånd så att vikt V_a placeras L_b måttenheter från vårt balanspunkt C och Vikt V_b placeras L_a måttenheter från punkt C.

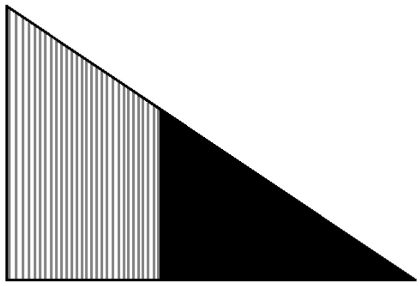


$$V_a : V_b = L_a : L_b$$

5 Indivisibler

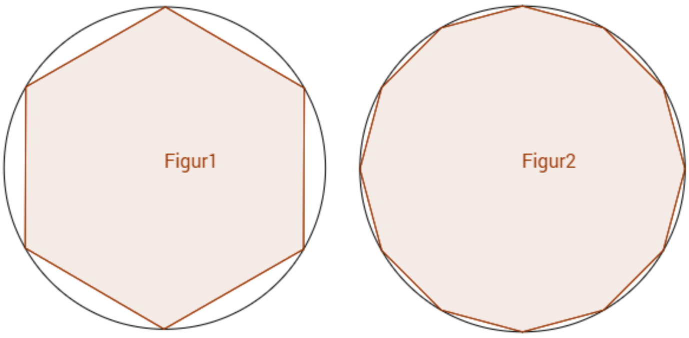
Det som gör Metoden så intressant för sin tid var just Arkimedes antagande av indivisibler och att hävstångsprincipen hitta balansen mellan ett av dessa indivisibla tvärsnitt och ett tvärsnitt av en känd figur.[14]. För att förstå denna beskrivning måste vi reda ut begreppet "indivisibelöch försöka bilda en uppfattning om hur man tror Arkimedes förhöll sig till detta.

Indivisiblernas definition är när en geometrisk figur ses som en sammansättning av alla oändligt många linjer som figuren är uppbyggd av. Både före och efter Arkimedes i historien har man kunnat skymta det indivisibla tänkesättet i olika matematiska verk man hittat. Matematikhistoriskt brukar man säga att det var Bonavetura Cavalieri (1598-1647) som kom fram till den första teorin kring Indivisiblerna. Enligt Cavalieri så var indivisiblerna en insamling av alla korsande parallella linjer som går från figurens ena sida till den andra och dessa linjer tillsammans kan ses som en enda storlek. [15].



Grekerna krävde att matematiken skulle vara precis och rigorös. Att arbeta med de paradoxer som fanns runt oändlighet blev gärna undvikt. Grekerna förhöll sig till den syn på oändligheten som kallas för 'potentiellt oändligt', vilket menas att du han använda dig av hur stora nummer du vill, eller hur små, men aldrig säga oändligt stort eller litet. Det var Aristoteles (384–322 f.vt) som efter det så kallade Zenos paradoxer gav upphov till potentiell oändlighet för att kringgå de paradoxer som de medförde[16]. Det var inte förrän på 1700-talet som Galileo och Newton hittade nya tekniker för att handskas med oändlighet, dock med en och annan paradox som följd. Så i början av 1900-talet utvecklades detta ytterligare och kunde undvika alla de paradoxer som tidigare hade uppstått. Men genom sitt potentiellt oändliga tankesätt så kunde de gamla grekerna ha en noggrannhet utan användandet av just oändlighet. Ett exempel på hur man skulle kunna beskriva detta är följande:

[14][1, s.104]
[15][1, p.516]
[16][1, p.45-47]



Om vi använder oss av en inskriven 6-höring polygon i en cirkel. Sedan säger vi att arean av denna 6-hörning har näst inpå samma area som cirkeln. Vi kan säga att den utelämnade arean som skiljer dom åt är mindre än ett gruskorn. Dock kan vi i samma cirkel tillverka en 12-höring istället som får en utelämnad area som är mindre än ett gruskorn, ett sandkorn kanske. Vi fortsätter på samma sätt så att ytterligare en fördubbling av hörnen på polygonen har då en utelämnad area som är mindre sandkornets. På detta sätt kan vi fortsätta i en oändlighet. Det kommer alltid finnas i en utebliven area som kommer vara mindre än den föregående[17].

Arkimedes rör sig väldigt nära denna gräns runt det väldigt laddade ordet oändlighet i sin metod. I beviset av att parabelsegmentet är $4/3$ av den största inskriva triangeln så säger Arkimedes[18]:

> ”När varje parallell linje är balanserad med sin parade sektion med en viss stödpunkt, så kommer också det resterande linjerna i triangeln”

Genom att uttrycka sig på detta sätt så undviker han användningen av oändlighet. Men skapar dock väldiga frågetecken kring hur många de indivisibla linjerna faktiskt är och hur en summering av dessa linjer går till. Arkimedes ger aldrig någon förklaring till detta. Men oavsett så ser vi att han är och snuddar på men lyckas ändå att hålla sig borta från användandet av den paradoxala oändligheten och har såvitt vi kan se ett indivisibelt tankesätt[19].

[17] [5, s.181-182]
[18] [5, s.181-182]
[19] [5, s.181-182]

6 Tyngdpunkt

Tyngdpunkt eller 'center of gravity' nämns åtskilliga gånger bland Arkimedes propositioner i sin bok *On the Equilibrium of planes*, men han ger dock aldrig en definition vad en tyngdpunkt är. Så det vi kan göra är att spekulera i hur Arkimedes såg på vad en tyngdpunkt faktiskt är och varför han inte ger någon mer ingående definition. En tanke är att definitionen för tyngdpunkten kan ha varit en grundtanke som ej var okänt för de läsarna boken var till och av denna anledning ej nämnvärt. Ordets första entré ges i postulat 4 ur *On the Equilibrium of planes* och ger som sagt känslan av att det är elementärt att veta dess innebörd. Den andra möjligheten skulle kunna varit att definitionen för tyngdpunkten växer fram ur det nämna postulatet och propositionerna som introduceras i början av boken och då inte behöver en mer djupgående explikation. Dock så finns andra texter som lite efter Arkimedes tid som faktiskt gav en definition och är kanske den som Arkimedes också använder sig av och lyder som följande[20]:

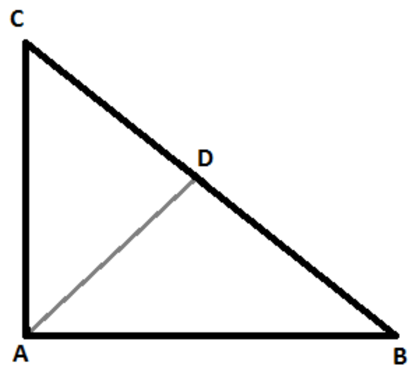
> *'Tyngdpunkten för en kropp är den punkt inom som vid upphängning i denna punkt kommer förbi i den position som den har vid upphängningen'*[21]

Det var kanske med den här definitionen i åtanke som Arkimedes i *On the Equilibrium of planes* härledde tyngdpunkten för bland annat ett parallellogram, vilket är den punkt där det två diagonalerna dras och möts. Eller att tyngdpunkten för en cirkel är dess mittpunkt. I proposition 15 härleder Arkimedes en mycket viktig egenskap hos tyngdpunkten för en triangel. Vilket vi måste reda ut för att kunna förstå proposition 1 i ur metoden fullt ut.

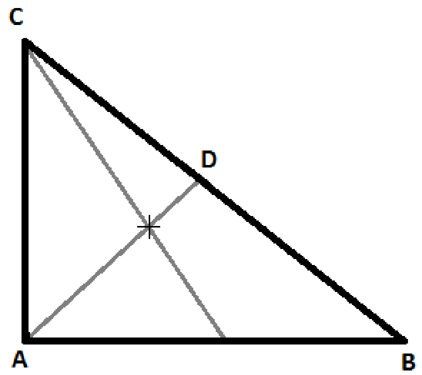
[20] [6, s.295-306]
[21] [6, s.299, citerat från Pappus, Collectio VIII]

6.1 Triangelns tyngdpunkt

Syftet med proposition 15 är inte att hitta triangelns tyngdpunkt utan är bara en del som behövs i ett större sammanhang och är mer ett antagande utifrån det tidigare propositionerna 11-14. I 11-14 så härleder Arkimedes först att tyngdpunkten för en triangel måste ligga på den linje binds samman mellan en vinkel och mittpunkten på den motsatta sidan av triangeln.



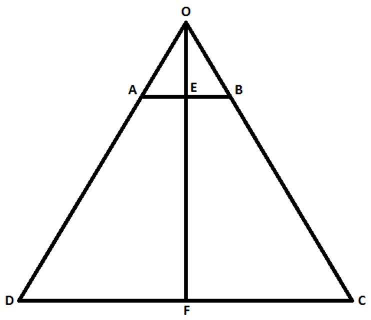
Därefter försätter han med att visa att den faktiska tyngdpunkten för en triangel är i skärningspunkten mellan det linjerna som dras från två av dess vinklar till motsatta mittpunkterna.

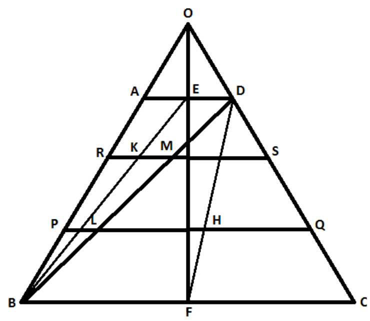


Utifrån dessa härledningar kan vi nu se till proposition 15.

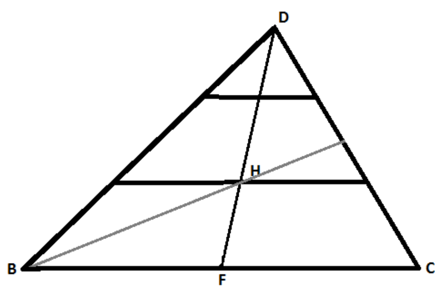
6.2 Proposition 15, *On the Equilibrium of planes I*

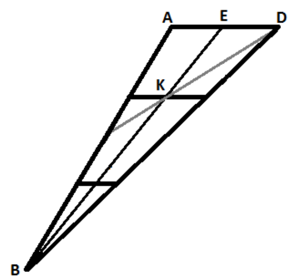
Om AD, BC är två parallella sidor av en trapets ABCD. Där AD är den mindre sidan. Genom att förlänga AB, CD så att det möts får vi en triangel OBC. En linje dras från vinkel O till mittpunkten F på motsatt sida. Denna linje korsar AB och ger oss punkten E. Som nämn tidigare så vet vi då från tidigare propositioner att tyngdpunkten för triangeln kommer ligga på denna linjen.





Förbind BD och dela denna linje i 3 lika delar och benämn dessa L, M. Genom L,M dra nu PQ, RS parallella till BC, AC. Där P, R ligger på vår linje BA och Q, S på CD. Förbind sedan DF,BE som då möter PQ i H och RS i K. Linjen DF är till triangeln DBC en linje som tyngdpunkten någonstans kommer befinna sig på. Detta är på grund utav som nämn ovan en proposition som Arkimedes har bevisat att triangelns tyngdpunkt kommer ligga. Motsvarande gäller för linjen BE i triangeln BDA.



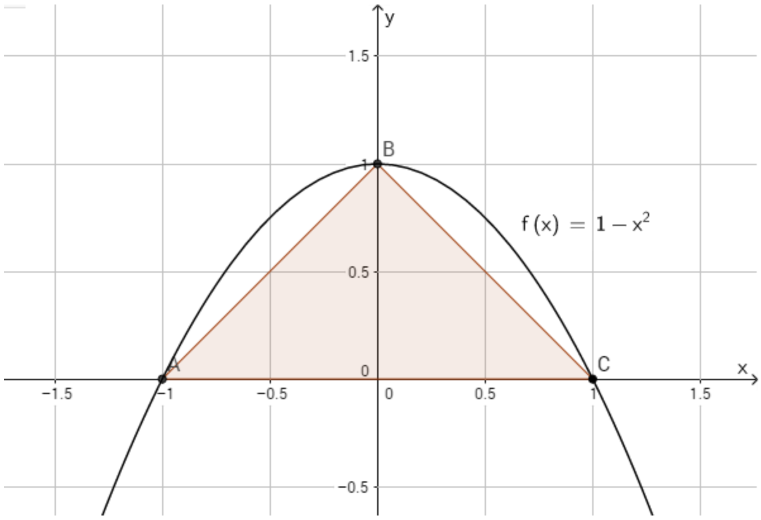


Om vi ser till triangel DBC och drar från B en linje med fäste i motsatta sidans mittpunkt kommer den gå genom punkten H och bekräfta att H är triangel DBC tyngdpunkt enligt proposition 14. Vi observerarar att $FH = \frac{1}{3}FD$. På samma sätt kommer K vara tyngdpunkten för triangeln ADB, alltså kommer $EK = \frac{1}{3}EB$[22]. Dessa observation kommer ge oss ytterligare förståelse kring proposition 1 av Metoden.

[22] [4, p.201]

7 Arkimedes Metod Proposition 1; Parabelsegmentet

Den första av Arkimedes upptäckter med sin mekaniska metod var att ett segment av en parabel är 4/3 av den triangeln vars bas och höjd är desamma som segmentet. Vi tar funktionen $F(x) = 1 - x^2$ och beräknar integralen från -1 till 1 och ser om det stämmer med den inskrivna triangeln för segmentet.



I Figuren ser vi att den största inskrivna triangeln har basen 2 och höjden 1. Vilket ger Arean:

$$A = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

Så enligt Arkimedes kommer alltså arean av parabelsegmentet vara $\frac{4}{3}$av vår triangel som i detta väl genomtänkta exempel blir just $\frac{4}{3}$. Vi undersöker om detta stämmer genom att beräkna integralen av vår Funktion mellan -1 och 1.

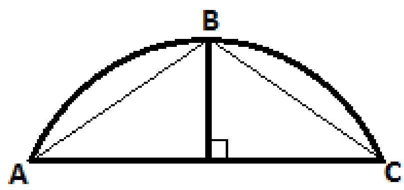
$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - (-1 + \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Arena under parabeln mellan -1 och 1 har alltså arean $\frac{4}{3}$ och ger oss att Arkimedes påstående helt och hållet stämmer. Vi går nu vidare med att härleda Arkimedes proposition 1 om just detta och hur han steg för steg kom fram till detta förhållande mellan parabeln och dess inskrivna triangel.

Arkimedes bevis återfinns som den första propositionen i boken om metoden. Utgångslägen för beviset är följande[23]:

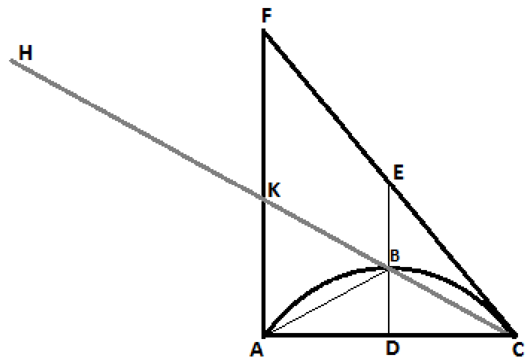
[23][3, p.15]

Låt ABC vara ett segment av en parabel där AC är en rak linje. Från punkt D som är mittpunkten på AC dra en rät linje som möter segmentet i punkten B. Sammanfoga även AB, BC.



Utgångsläget är alltså ett parabelsegment med den största möjliga inskrivna triangeln. Härifrån börjar själva bevisföringen.

Dra från C en tangent till parabeln. Förläng sträckan DB så den möter tangenten i en punkt E. Samt dra från A parallell med linjen DBE så att den möter tangenten i en punkt F. Förläng sedan CB så att den möter AF i en punkt K. Från K förlängs linjen ytligare till en punkt H så att KH=CK.



Arkimedes menar här nu att vår sträcka CH är en hävarm med sin mittpunkt i punkten K. Arkimedes påstår här att EB=BD då detta redan är bevisat i Elements of Conics. Denna bok i fråga är skriven av Aristaeus och Euklides själv och återfinns i Euklides Elementa.

Vi tillför linjen MO parallell till både AKF och DBE som börjar på tangenten till segmentet och slutar i punkten på sträckan AC. Den korsar CK i en punkt N och parabelsegmentet i en punkt P. Med antagandet att EB=BD så kommer FA, MO på samma sätt ge oss FK=KA MN=NO. Genom Proportioner mellan likformiga trianglar så får vi sambandet:

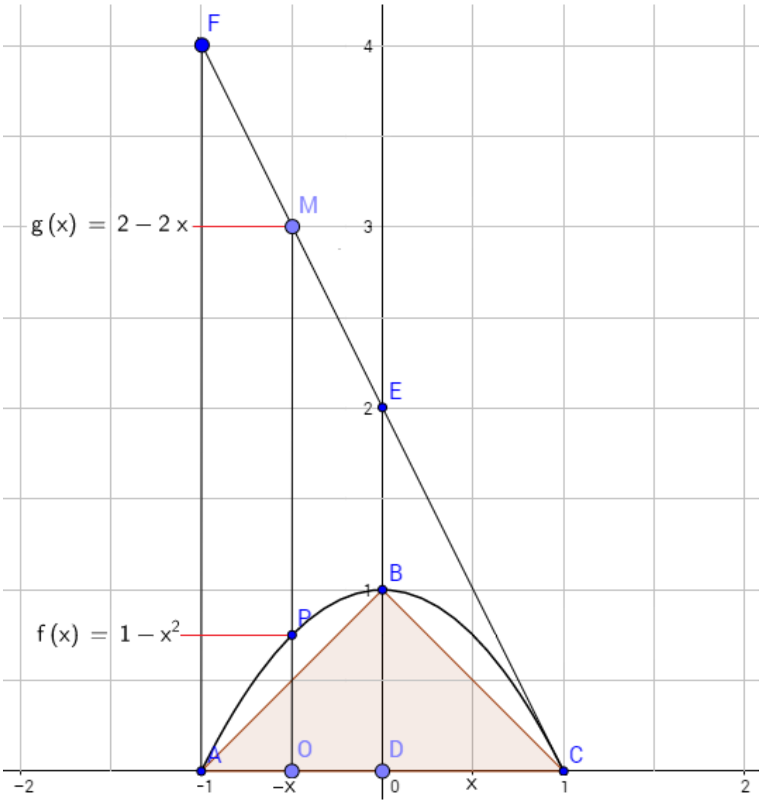
$$(MO : OP = CA : AO)^{24} \tag{1}$$

[24] [3, s.16. Detta bevis återfinns i *Quadrature of the parabola* proposition 4,5 och är härlett från Elements of Conics]

.

Arkimedes ger ej ut någon bevisföring av detta själv utan hänvisar som sagt endast till arbetet i fråga. Dock i sin *Quadrature of the parabola* så ges en proposition som bekräftar denna slutsats igen. Dock utan bevisföring även denna gång[25]. Vi undersöker detta stämmer. Som tidigare sätt utgår vi ifrån en funktion $F(x) = 1 - x^2$ som bildar en parabel och drar sedan dess tangent som får funktionen $G(x) = 2 + 2x$. Vi drar nu en linje MO parallel till FA. Propositionen säger att

$$\frac{MO}{OP} = \frac{CA}{AO}$$



Eftersom vår linje MO ligger mellan -1 och 0 vet vi att x är negativt. Så $MO = 2 - 2(-x)$, $OP = 1 - (-x)^2$,$CA = 2$, $AO = 1 + (-x)$

[25] [3, p.16]

$$\frac{MO}{OP} = \frac{2-2(-x)}{1-(-x)^2} = \frac{CA}{AO} = \frac{2}{1+(-x)}$$

$$\frac{2+2x}{1-x^2} = \frac{2}{1-x}$$

$$\frac{2(1+x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x}$$

Vi kan nu dividera bort (1+x) termen.

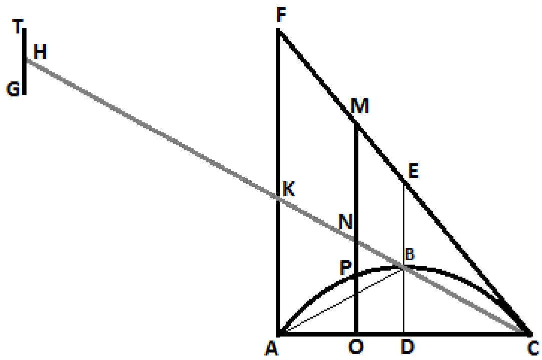
$$\frac{MO}{OP} = \frac{CA}{AO} = \frac{2}{1-x} = \frac{2}{1-x}$$

Vi ser nu att detta förhållandena mellan sidorna stämmer och vi fortsätter att titta på Arkimedes härledning:

$$(CA : AO = CK : KN)^{26} \tag{2}$$

Proposition 2 ur Euklides elementa bok VI säger att sätt till våran triangel ACK så har vi $CA : OA = CK : KN$ om och endast om NO är parallel med AK[27]. Eftersom CK=HK har vi

$$CA : AO = HK : KN$$

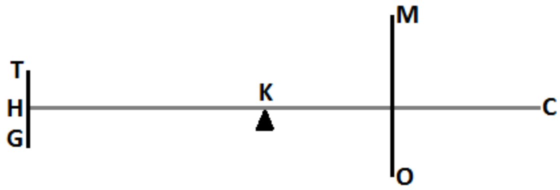


Om vi nu tar en linje TG så att $TG = OP$ och placerar denna med sin tyngdpunkt i punkten H så att $TH = HG$. Eftersom vi vet sen tidigare att N är tyngdpunkten för vår linje MO då $MN = NO$ får vi utifrån ekvationerna (1) och (2):

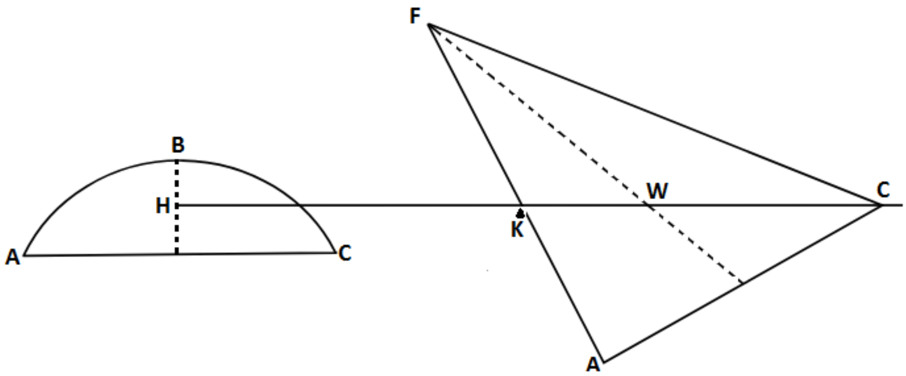
$$MO : TG = HK : KN$$

[26] [3, s.16. Hänvisar till proposition 2, bok VI, Euklides Elementa]
[27] [7, Proposition 2, bok VI, Euklides Elementa]

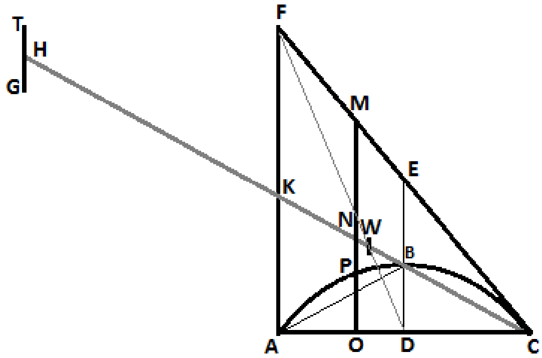
Vi har nu att MO i punkten N och TG i punkten H är i jämnvikt i punkten K där vi ser till CH som en hävarm, K som balanspunkten enligt Arkimedes Hävstångsprincip proposition 6,7. Arkimedes säger nu att detta kommer gälla för alla parallella linjer mellan FC, AC som har sin mittpunkt på KC och med den delen som blir parabellinjen satt i vår punkt H kommer förbli i jämnvikt i punkt K. Punkten K kommer även i sig vara den hela ordande figurens tyngdpunkt[28].



Triangeln CFA består av alla parallella linjer sätt till MO och parabelsegmentet CBA består av alla parallella linjer sätt till PO. Då följer det att Triangeln CFA placerad där den är och segmentet satt med sin tyngdpunkt i H kommer att vara i jämnvikt och balanserar i vår punkt K.



[28][3, s.17]



Om vi ser till triangeln CFA är tyngdpunkten placerad någonstans på linjen CK, eftersom vi under kapitlet om triangelns tyngdpunkt nu vet att:

> *Tyngdpunkten för en triangel är i skärningspunkten mellan det linjerna som dras från två av dess vinklar till motsatta mittpunkterna.*

Alltså kommer skärningspunkten ligga på CK. Sammanbinder vi nu FD får vi en skärningspunkt W mellan CK, FD som är triangelns tyngdpunkt. Enligt proposition 15 ur *On the Equilibrium of planes I* vet vi då att:

$$KW = \frac{1}{3}CK \tag{3}$$

.

Utifrån att vi nu vet att oavsett vilken linje vi tar hos figuren kommer den med Hävstångsprincipen vara i jämnvikt på vår hävarm HC och i balanspunkt K. Utgår vi nu från att evaluera den parallella linje med skärningspunkten W på CK och får då sätt till proposition 6,7 ur *On the equilibrium of planes, book I*[29] att:

$$ACF : ABC = HK : KW$$

Med ekvation (3) och att $CK = HK$ har vi att Δ ACF och parabelsegmentet ABC har propotionerna:

$$ACF : ABC = HK : KW = 3 : 1 \tag{4}$$

.

Sätt till Ekvation (4) får vi att:

$$parabelnABC = \frac{1}{3}\Delta ACF$$

.

[29] [4, s.192]

Utifrån vår figur går det även att härleda att Δ ACF är dessutom fyra gånger större än Δ ABC.

$$\Delta ACF = 4\Delta ABC$$

Slutligen konstaterar Arkimedes att utifrån dessa proportioner som är mellan parabeln och trianglarna att:

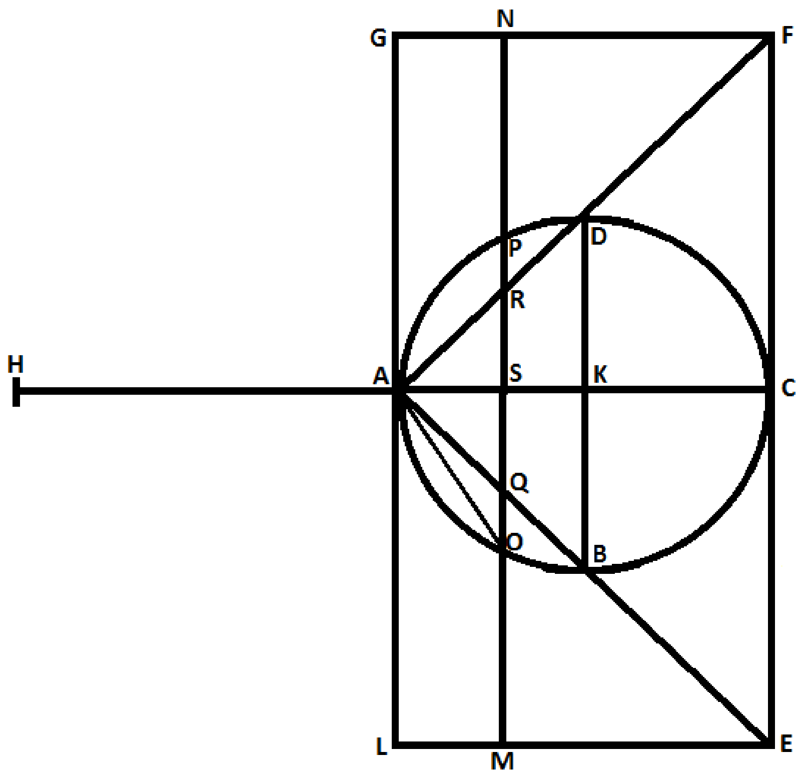
$$parabelnABC = \frac{4}{3}\Delta ABC$$

8 Arkimedes Metod Proposition 2; Sfären, konen och cylindern

I sin andra proposition ur metoden så kalkylerar Arkimedes att sfärens volym är fyra gånger konen vars bas är lika till den största cirkeln av sfären samt att höjden lika med sfärens radie. Även att volymen av cylindern som har sin bas lika till sfärens största cirkel och höjden lika med sfärens diameter är $1\frac{1}{2}$ sfärens volym[30].

8.1 Sfären och konen

Vi börjar att bevisa att sfären är 4 gånger den inskrivna konen. Vi utgår från figuren nedan som föreställer våra figurer sätt i ett två dimensionellt(R^2) perspektiv:



Vi har den största möjliga cirkel ABCD av en sfär med diameter BD och som då är vinkelrät till sträckan AC. I vår sfär har vi en kon med sin vertex i A och basen BD. Ytan av konen är förlängd tills den möter planet i punkten C som är parallellt med LG och bildar då cirkeln EF. Vi ser nu denna cirkeln som basen för en cylinder med höjden AC. HA är dragen så att HA=AC. HA ses som hävarmen i denna proposition med mittpunkt

[30][3, s.18]

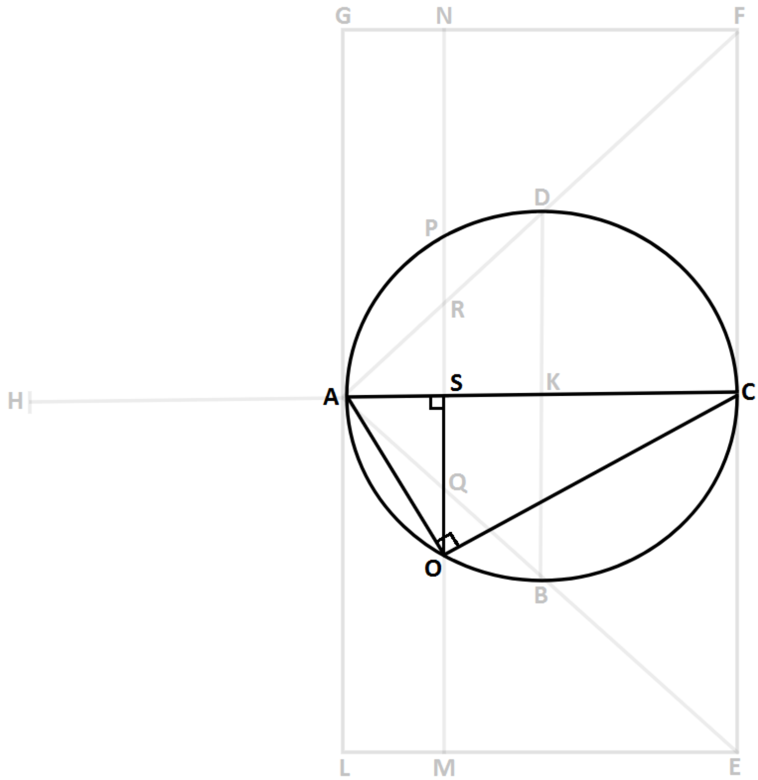
i A. MN är ett godtyckligt dragen plan parallell till BD som möter cylindern, sfären och konen i cirklarna vars diameter är MN, OP och QR. Alla dessa cirklar har sin mittpunkt i S. Slutligen är sträckan AO dragen.

Eftersom MS=AC och QS=AS har vi att rektanglarna:

$$MS \cdot SQ = CA \cdot AS \tag{5}$$

.

Nästa påstående är att rektangeln $CA \cdot AS$ är lika till kvadraten AO^2. Vi undersöker hur och om denna relation stämmer. Om vi ser till endast sfären och våra linjer AO, AS och SC. Om vi börjar med att dra OC och SO.



Vinkeln ASO är rät och vinkeln AOC är också rät vilket enligt periferivinkelsatsen. Trianglarna ΔASO och ΔAOC har då två lika vinkar är då likformiga. Utifrån definition 1 bok VI Euklides Elementa om likformigheten vet vi då att sidan CA är till AO som AO är till AS[31]:

$$CA : AO = AO : AS = \frac{CA}{AO} = \frac{AO}{AS}$$

[31] [7, Definition 1, Bok VI, Euklides Elementa]

Genom att multiplicerar AS, AO i båda led och genom med några moderna algebraiska omskrivningar får vi som påstått att:

$$CA \cdot AS = AO^2$$

Som vi nämnde tidigare vet vi att ΔASO är rät och kan därför uttrycka AO^2 med Pytagoras sådan att $AO^2 = OS^2 + SQ^2$

$$CA \cdot AS = AO^2 = OS^2 + SQ^2 \tag{6}$$

.

Med Ekvation (5) och (6) har vi alltså att kvadraten $MS \cdot SQ$ är lika till det båda sidorna i den räta triangeln ASO:

$$MS \cdot SQ = OS^2 + SO^2$$

Nu till själva hävstångsprincipen. Vi sa att HC i figuren är vår hävstång med mittpunkten i A. Utifrån att sträckan HA konstruerades att vara HA=AC så får vi det proportionerliga förhållande:

$$HA : AS = CA : AS$$

Sätt till Ekvation (5) då MS=CA och SQ=AS har vi nu:

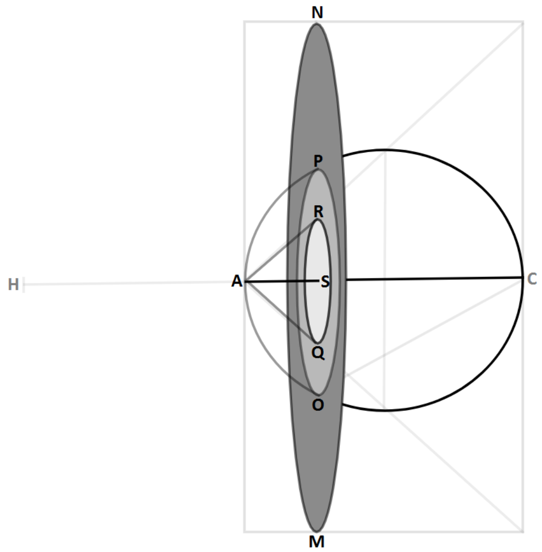
$$HA : AS = MS : SQ$$

I högerled så tar vi och förlänger sidorna med MS och får kvadraten av MS samt rektangeln med sidorna $SQ \cdot MS$.

$$HA : AS = MS^2 : SQ \cdot MS$$

Sätt till ekvation (6) får vi då följande uttryck:

$$HA : AS = MS^2 : (OS^2 + SQ^2) \tag{7}$$



Om vi ser till vår figur ovan i ett tre dimensionellt(R^3) perspektiv så delar linjen AC cylindern, sfären och konen mitt itu. Vi kan utifrån detta konstatera att cirkel med radie MS har diametern MN, på samma sätt har sfären diametern OP och konen QR.

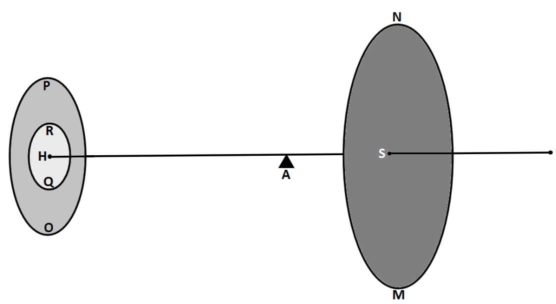
Det slutgiltiga stegen för knyta ihop detta bevis är proposition 2 i bok XII ur Euklides Elementa som säger att[32]:

> Cirklar är till varandra som kvadraten av deras diametrar.

Sätt till Ekvation (7) där högerledet representerar cirklarna med respektive radie får vi enligt propositionen ovan förhållandet mellan dessa cirklar att bli:

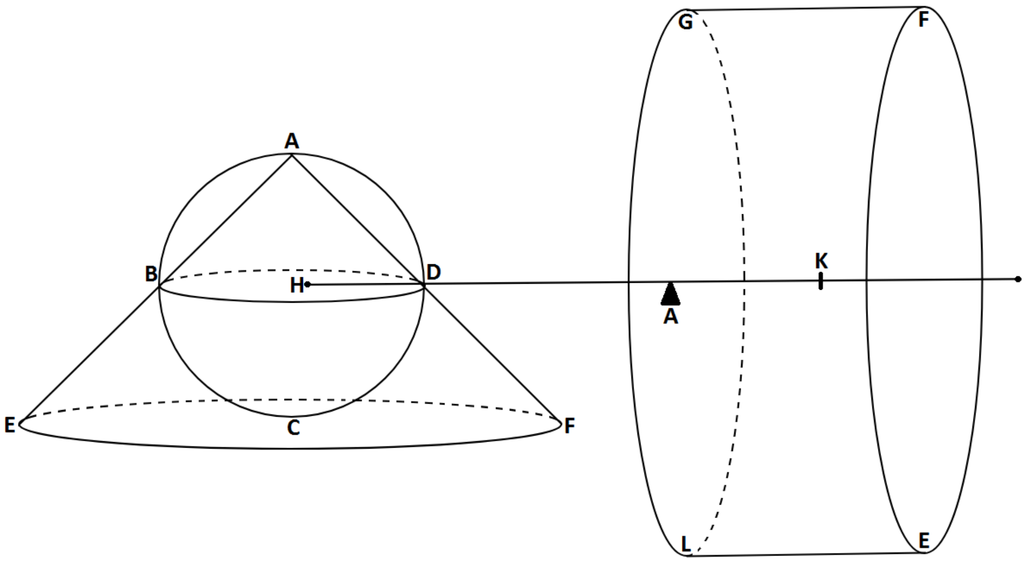
$$HA : AS = (cirkel, diam.MN) : (cirkel, diam.OP + cirkel, diam.QR)$$

Enligt hävstångsprincipen har vi då att vår cirkel med diametern MN i sin nuvarande position i punkten S är i jämnvikt med cirklarna med diametern OP, QR satta med sin tyngdpunkt i vår punkt H.



[32][7, Proposition 2, Bok XII, Euklides Elementa]

Som i den tidigare propositionen om parabelsegmentet så menar nu Arkimedes att oavsett vilket plan MN vi skär figuren så kommer cirklarna att vara i jämnvikt. Med det indivisibla tankesättet att alla dessa figurer är uppbyggda av dessa cirklar kommer därför även de hela figurerna vara i jämnvikt på samma sätt. Vi kan nu tänka oss att Cylindern GLEF kvar där den är på hävarmen kommer balansera Sfären ABCD och konen AFE satta i sina respektive tyngdpunkten på vår hävarm i punkt H.



Eftersom K är tyngdpunkten för Cylindern har vi:

HA:AK=(cylindern):(Sfären+Konen AEF)

Men K är mittpunkten av figuren så är HA=2AK då är HA=AC.

HA:AK=(cylindern):2(Sfären+Konen AEF)

Proposition 10 i bok XII ur Euklides elementa säger att en kon är tre gånger mindre mot cylindern med samma bas och höjd och ger oss då att Cylindern=3(kon AEF)[33], vilket ger oss att:

3(Kon AEF)=2(Sfären) +2(Kon AEF) $\rightarrow$ Kon AEF=2(Sfären)

Men eftersom EF=2BD så har den stora konen AEF dubbla höjden och basen mot den mindre konen ABD och ger att Kon AEF = 8(Kon ABD).

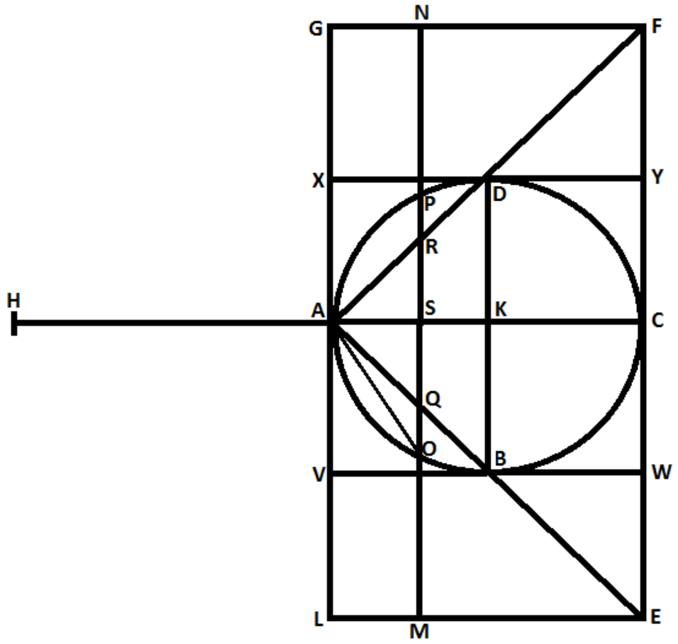
8(Kon ABD) = 2(Sfären ABCD) $\rightarrow$ 4(Kon ABD)=(Sfären ABCD))

Sfären ABCD är alltså fyra gånger konen ABD.

[33] [7, Proposition 10, Bok XII, Euklides Elementa]

8.2 Cylindern och Sfären

Vi kollar nu hur Arkimedes får fram hur volymen av cylindern som har sin bas lika till sfärens största cirkel och höjden lika med sfärens diameter är $1\frac{1}{2}$ sfärens volym. Vi ser till vår R^2 figur i början av kapitlet och utökar denna med att dra genom B, D linjerna så att vi får VBW,XDY parallella till AC. Vi tänker oss nu att en cylinder med AC som höjd och cirklarna VX, WY som diametern för baserna.



Cirkeln BD delar cylindern i mitten så att vår stora cylinder VY är dubbelt mot den mindre cylinder VD:

$$\text{Cylindern VY} = 2(\text{cylindern VD})$$

Sen så tar Arkimedes till proposition 10 i bok XII ur Euklides elementa ytterligare en gång och kan då säga att[34]:

$$\text{Cylindern VD} = 3(\text{Konen ABD})$$

$$\text{Cylindern VX} = 2(\text{Cylindern VD}) \rightarrow \text{Cylindern VX} = 6(\text{Kon ABD})$$

Slutligen tar vi till att eftersom vi nu vet att Sfären ABCD = 4(Kon ABD):

$$6(\text{Kon ABD}) = 1\frac{1}{2}(\text{Sfären ABCD}) \rightarrow \text{Cylindern VX} = 1\frac{1}{2}(\text{Sfären ABCD})$$

[34] [7, Proposition 10, Bok XII, Euklides Elementa]

9 Summering och Diskussion

Vi kan sammanfattningsvis dela in Arkimedes metod i två matematiska steg. Det första är Arkimedes matematiska modell kring hävarmen som återfinns i bok *On the Equilibrium of planes*. Där man geometriskt tillverkar och föreställer sig en hävarm som figuren ska kunna balansera i jämnvikt kring. Det andra är det indivisibla tänkesätt där plana geometriska figurer kan ses som att de är uppbyggda av den oändligt parallella linjesegment som tillsammans bildar figuren i fråga. Detta tankesätt sträcker sig också till geometriska kroppar där figuren och dess volym är uppbyggd av den oändligt många parallella plan som figuren består av. Men denna innovativa och intressanta metod känns som den var före sin tid i den mån att den ej kunde enligt grekisk matematik ses som sann eller principfast, vilket också Arkimedes faktiskt poängterar. Det råder inga tvivel om att metodens exakthet helt enkelt räckte till. Men i vilken del av Metoden ligger denna felande länk? Hos hävstångsprincipen eller indivisiblerna? Arkimedes säger avslutningsvis i proposition 1 att:[35]

> "Now the fact here stated is not actually demonstrated by the argument used; but that argument has given a sort of indication that the conclusion is true. Seeing then that the theorem is not demonstrated, but at the same time suspecting that the conclusion is true, we shall have recourse to the geometrical demonstration which I myself discovered and have already published."

I introduktionen av brevet som innehöll Arkimedes metod så påpekar Arkimedes även att proposition 1 som behandlar parabelsegmentet var det första teoremet som han lyckades lösa med hjälp av sin metod och detta innan ett helt geometriskt bevis fanns. Det betyder att resultatet, eller indikationen till resultatet hos parabelsegmentet fick Arkimedes alltså fram innan han påbörjade sitt geometriska bevis som finns i boken *Quadrature of the parabola*. Metoden användes alltså av Arkimedes som en vägledning till vad ett geometriskt bevis skulle kunna leda till. Att sfären är fyra gånger konen vars bas är lika till sfärens största cirkel och med höjden lika till radien hittades också med metoden innan ett bevis gjordes geometriskt. Om vi nu uppmärksammar vad som skiljer det helt geometriska bevisen som åter finns i *Quadrature of the parabola* och *On The sphere and cylinder I* mot deras motsvarande bevis med metoden så är det användandet av indivisiblerna. Detta måste därför vara den felande länken i metoden som alltså ger metoden den osäkerheten så det ej kan ses som en faktiskt bevisad slutsats. Hävstångsprincipen som återfinns i *On the Equilibrium of planes* postulat 6,7 är baserade på postulat och ger starkt intryck av trovärdighet och exakthet vilket gjorde att den användes flitigt i *Quadrature of the parabola* och andra matematiska sammanhang och sågs som tillräckligt exakt.

[35] [3, s.17]

Även före Arkimedes finns det texter som indikerar på användandet av indivisibler. Det finns en antydan till detta i en skrift där Democritus (500 f.vt) diskuterar problemet av att dela en kon i indivisibla sektioner av plan parallellt till sin bas. Där han då undrar om dessa cirklar kommer vara olika eller lika till storlek. Om olika, så kommer cirklarna göra konen oregelbunden då cirklarna kommer vara olika stora och på så sätt bilda liknande trappsteg mellan varje cirkel. Detta då varje cirkel måste ha någon form av tjocklek. Men om cirklarna skulle vara lika kommer detta ge konen en slät och jämn sida dock i form av en cylinder vilket skulle vara absurt. Även fast man inte vet vad Democritus slutgiltiga slutsats var tydde det på att han faktiskt såg konen och pyramiden som att den var uppbyggt av indivisibler. Samtidigt så nämner Arkimedes i metoden att[36]:

> "But it is of course easier, when we have previously acquired, by the method, some knowledge of the questions, to supply the proof than it is to find it without any previous knowledge. This is areason why, in the case of the theorems the proof of which Eudoxus was the first to discover, namely that the cone is a third part of the cylinder, and the pyramid of the prism, having the same base and equal height, we should give no small share of the credit to Democritus who was the first to make the assertion with regard to the said figure though he did not prove it."

Det var slutligen Eudoxus (408–355 f.vt) som bevisade dessa theorem med sin method of exhaustion (uttömningsprincipen), fast Democritus var först med att hitta resultatet om vi ser till vad Arkimedes faktiskt menar[37]. Dessa bevis återfinns i Euklides Elementa bok XII proposition 2,7,10,18 och är Reductio ad absurdum argumenterade, en typ av indirekt bevisföring. Vilket innebär att man antar att det korrekta resultatet är falskt och tillslut får en motsägelse så att det falska antagandet då måste vara sant[38]. Vilket betyder att man måste fastställt någon form av resultat innan det faktiska beviset gjordes. Detta påminner väldigt mycket om Arkimedes sätt att se på resultatet framtagit av metoden. Med upptäckten av Arkimedes metod så visa det sig att Democritus kanske inte var den enda som använde sig av just indivisibler för att uppfånga ett resultat och var kanske vanligare än man trott inom den grekiska matematiken.

Men varför kunde inte indivisiblerna ses som trovärdiga? Som vi nämnde om Democritus där han resonerar kring hur indivisiblerna skulle kunna tänkas se ut syns en del av problemet. En sådan sak som tjockleken på en av indivisiblerna och hur många sådana indivisibler får plats inom figuren i fråga. Vi kommer då ner på atomnivå och snuddar på vad kontinuitet och oändligheten innebär. Zenos paradoxer kretsar kring just oändlighet, indivisibler och kontinuitet och är uppkallade av Zeno of Elea (500-talet f.vt). Dessa paradoxer ledde till stora problem när det kom till kring hur man skulle behandla dessa delar av matematiken. Aristoteles (384–322 f.vt) ville tillbakavisa dessa paradoxer och menade på potentiell oändlighet som vi pratar om i kapitlet om indivisibler och blev grekernas förhållningssätt till behandlingen av oändligheten. I och med detta kanske var varför

[36] [3, s.13]
[37] [1, s.84-87]
[38] [1, s.43]

användandet av indivisiblerna var bannlysta från korrekta publicerade bevis[39]. Som i sin tur kunde vara anledningen till att Arkimedes i brevet innehållande sin metoden skiljer på resultat och geometriskt bevis. Men oavsett denna separation ville Arkimedes att Democritus och Eudoxus skulle få ära för deras prestationer.

[39] [1, s.45-47]

10 Referenser

Referenser

[1] Katz, Victor J., *A history of mathematics*, 3rd ed. Boston, Pearson Education, Inc., 2009

[2] Geymonat, Mario, *The Great Archimedes*, trans. R. Alden Smith, Waco, Texas, Baylor University Press, 2010

[3] Heath, Tomas L., *The method of Archimedes: Recently discovered by Heiberg* (Ett tilllägg till *The works of Archimedes, 1897*) , Cambridge, University Press, 1912

http://www.wilbourhall.org/pdfs/archimedes/archimedesHeiberg.pdf

[4] Heath, Tomas L., *The works of Archimedes* , Cambridge, University Press, 1897

[5] N. Reviel and W. Noel, *The Archimedes Codex* , Great Britan, Weidenfeld and Nicolson, 2007

[6] E.J. Dijksterhuis, *Archimedes with a new bibliographic essay by wilbur R. knorr* trans. C. Dikshoorn, USA, Princeton Paperback printing, 1987,

[7] David E. Joyce, Department of Mathematics and Computer Science, Clark University,[website], http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/elements/elements.html Euklides elementa online, (8 Maj 2017).