



UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2018:8

Lärares och elevers användning av GeoGebra inom analytisk geometri på gymnasiet

John Larsson

Examensarbete i matematikdidaktik, ämneslärarprogrammet, 15 hp

Handledare: Gunnar Berg

Examinator: Veronica Crispin Quinonez

Juni 2018

A large, faint watermark of the Uppsala University seal is visible in the bottom right corner of the page. The seal features a sun with rays, a banner with the word 'VERITAS', and the Latin motto 'ALERE FLAMMAM' around the perimeter.

Department of Mathematics
Uppsala University

Innehåll

1	Inledning.....	1
2	Syfte och frågeställning.....	1
3	Bakgrund.....	1
3.1	Begreppsförklaring.....	1
3.2	GeoGebra.....	2
3.3	TPACK.....	2
3.3.1	TPACK i lärarutbildningen.....	4
3.4	Koppling till styrdokumentet.....	5
3.5	Tidigare forskning.....	6
3.5.1	DGS effekt på elevers prestationer i matematik.....	7
3.5.2	Frekvensen av IKT användandet av matematiklärare.....	8
4	Metod.....	8
4.1	Systematiska sökningar.....	9
4.2	Analysprocess.....	10
5	Resultat.....	10
5.1	GeoGebras effekt på elevers matematikkunskaper och prestationer inom analytisk geometri.....	10
5.2	Gymnasielärares användning av GeoGebra i matematikundervisningen.....	15
6	Diskussion.....	18
6.1	Metoddiskussion.....	18
6.2	Resultatdiskussion.....	19
7	Slutsats.....	21
8	Källförteckning.....	23
9	Bilaga 1: Databassökning.....	26
10	Bilaga 2: Artikelöversikt.....	27

1 Inledning

Analytisk geometri är ett matematiskt område där i första hand algebraiska metoder används för att lösa geometriska problem. På gymnasiet innefattar den analytiska geometrin bland annat problem som har att göra med den räta linjen, parabeln, ellipsen och hyperbeln i planet. Eleverna kan uppfatta denna del av matematiken som abstrakt och uppleva svårigheter med att lära sig ämnet. Dynamiska geometriprogram kan stödja elevernas lärande genom att möjliggöra visualisering av abstrakta begrepp. Ett exempel på ett av dessa program är GeoGebra vilket har en användargrupp som har växt avsevärt under de senaste åren och vunnit flera priser. Det är användbart för alla utbildningsnivåer och kan behandla algebra, analys och geometri (Internationella GeoGebra Institutet, 2018).

Denna litteraturstudie undersöker effekterna GeoGebra har på gymnasieelevers matematikprestationer inom det matematiska området analytisk geometri. Studien undersöker dessutom vilka faktorer som påverkar matematiklärares beslut om att använda GeoGebra i matematikundervisningen och vilka förutsättningar som finns för att matematikundervisning med GeoGebra ska bli lyckad.

2 Syfte och frågeställning

Syftet med denna litteraturstudie är att få förståelse för vad GeoGebra kan göra för matematikundervisningen inom området analytisk geometri. Fokuset i studien ligger på att undersöka vad GeoGebra har för effekt på elevers matematikprestationer och lärares användning av programvaran. Utifrån syftet framträder följande frågeställningar:

- Vad har GeoGebra för effekt på gymnasieelevers prestationer i analytisk geometri?
- Vad har gymnasielärare för uppfattningar kring användandet av GeoGebra i matematikundervisningen?

3 Bakgrund

3.1 Begreppsförklaring

I denna litteraturstudie används särskilda förkortningar och begrepp. Dessa förklaras i listan nedanför.

- IKT – Förkortning för ”informations- och kommunikationsteknologi” vilket beskriver den teknologi som används vid kommunikation mellan människor.

- DGS – Förkortning för ”dynamic geometry software” (dynamiskt geometriprogram) vilket beskriver programvara som kan hantera dynamisk geometri.
- CAS – Förkortning för ”computer algebra system” (datoralgebrasystem) vilket beskriver programvara som kan hantera matematiska uttryck i symbolisk form.

3.2 GeoGebra

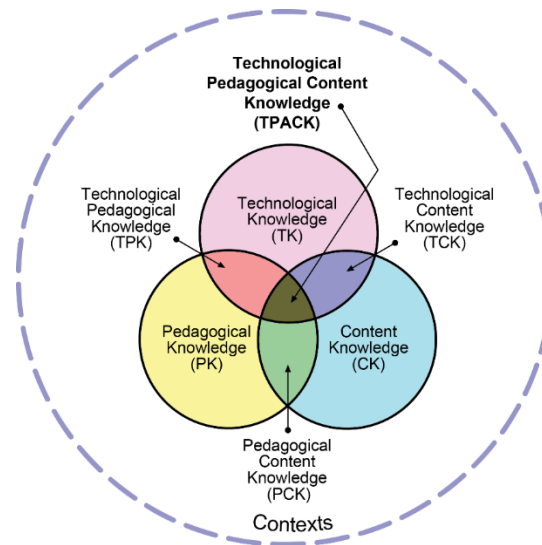
År 2002 skrev Markus Hohenwarter en masteravhandling vid Salzburg Universitet i Österrike där GeoGebra presenterades. Syfte med programmet var att kombinera både DGS och CAS till ett lättanvänt program för ändamålet att undervisa och lära sig matematik. I samband med den snabba tillväxten av antalet GeoGebra användare runt om i världen så inrättades Internationella GeoGebra Institutet (IGI) i slutet av 2007. Syfte med IGI var att erbjuda GeoGebra användare stöd och utbildning, utveckla programvara och läromedel, utföra forskning, och nå de mindre välsituerade samhällena. IGI är i huvudsak en paraplyorganisation som består av lokala GeoGebrainstitut som inrättas av lärare och forskare vid universitet och lärarutbildningsinstitutioner. Populariteten av GeoGebra har ökat snabbt under de senaste åren och programmet har översatts till 52 språk, vunnit flera priser och blivit ett av det ledande dynamiska matematikprogrammen inom vetenskap, teknik och ingenjörsvetenskap (Hohenwarter och Lavicza, 2010). Förutom att programmet finns att ladda ner gratis på organisationens hemsida så kan GeoGebra fungera som ett appletprogram och inbäddas i webbsidor. Dessa webbsidor är interaktiva och kan delas med andra användare. Idag finns det över 800,000 gratis interaktiva material att hämta från organisationens hemsida (Internationella GeoGebra Institutet, 2018).

3.3 TPACK

Lärare behöver olika kompetenser för att nå ut till alla elever och ge dem bästa möjliga utvecklingen för att lyckas i skolan och senare i livet. För att förstå hur dessa olika kompetenser samverkar kan man använda det teoretiska ramverket TPACK.

Pedagogikforskaren Lee Shulman skapade år 1986 det teoretiska ramverket PCK som är en förkortning för Pedagogical Content Knowledge. Shulman ansåg att den kompetens som läraren har består utav tre delar: ren ämneskunskap (CK), pedagogisk kunskap (PC), och pedagogisk ämneskunskap (PCK). Mathew J. Koehler och Punya Mishra utvecklade Shulmans teorier och skapade år 2008 en modell som kallas TPACK (eller TPCK), vilket är en förkortning för Technological Pedagogical Content Knowledge. Syftet med utveckling av Shulmans teori var att inkludera den tekniska kunskapen i lärarkompetensen (Angeli och Valanides, 2015).

Koehler och Mishra illustrerade TPACK ramverket som ett venndiagram med tre sammanlänkade cirklar där varje område som bildas av cirklarna representerar de olika kunskapsdomänen, vilket i sin tur omringas av en större cirkel: kontext (se figur 1 nedan).



Figur 1. TPACK Bilden (Hämtad från <http://www.tpack.org/>)

Content Knowledge (CK) beskriver lärarens ämneskunskaper. Denna kunskapsdomän är beroende på vilken nivå läraren undervisar i. Det kan vara alltifrån historiaundervisning på grundskolenivå till ett doktorandseminarium om astrofysik. Pedagogical Knowledge (PK) är lärarens pedagogiska kunskaper. Detta innefattar lärarens förmåga att anpassa innehållet efter målgruppen och ta hänsyn till elevernas olika behov, samt lärarens förmåga att använda olika lärostilar och undervisningsmetoder för ett framgångsrikt lärande. Technological Knowledge (TK) är lärarens tekniska kompetens. Detta innefattar att läraren har tillräckligt med kunskap kring användandet av teknologi för att tillämpa det produktivt i både arbetslivet och i vardagslivet, ha kännedom när användning av teknologi hämmar eller främjar åstadkommandet av ett mål, och kunna kontinuerligt anpassa sig till IT som befinner sig i ett tillstånd av ständig förändring. Pedagogical Content Knowledge (PCK) är lärarens pedagogiska förmåga och ämneskunskaper. Det innefattar lärarens förmåga att sammanlänka läroplanen, bedömning, och pedagogiken, och använda detta till att på flera sätt representera, anpassa och skraddarsy undervisningen efter elevernas tidigare kunskaper och erfarenheter. Här innefattas även lärarens kännedom om vanliga missuppfattningar elever kan ha och hur dessa ska hanteras. Technological Content Knowledge (TCK) är den förståelse som läraren har om teknologi och ämnesinnehåll, och hur de påverkar och begränsar varandra. Läraren ska även ha förståelse för vilka olika tekniska lösningar som är bäst anpassad för den enskilda undervisningen.

Technological Pedagogical Content (TPK) utgör den tekniska kompetensen och ämneskunskaperna som läraren ska ha som leder till en förståelse kring hur undervisandet och lärandet kan förändras när särskilda teknologier används på ett visst sätt. Detta inkluderar även att läraren ska ha kännedom om de pedagogiska fördelarna och begränsningar vid användning av en rad olika teknologiska verktyg. Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) utför den nödvändiga grunden för effektivt användande av teknologi i undervisningen. Det avskiljer sig från alla tre huvuddomänen: ämnesinnehåll, pedagogik och teknologi. Det är förståendet som träder fram vid interaktion mellan dessa tre huvuddomäner. TPACK utgör den högsta lärarkompetensen och är grundläggande för en effektiv undervisning med teknologi, vilket kräver

- en förståelse för hur representationer av ämnesbegrepp kan framhävas med hjälp av teknologi
- en arsenal av pedagogiska tekniker som utnyttjar teknologi på konstruktiva sätt för att undervisa ämnesinnehållet
- kunskap om vilka anledningar som gör olika koncept svåra eller lätta att lära sig och hur användning av teknologi kan hjälpa till att åtgärda de problemen som eleverna eventuellt kommer att stöta på
- kunskap om elevernas förkunskaper och om kunskapsteori
- kunskap om hur teknologi kan användas för att bygga på befintlig kunskap för att utveckla nya kunskapsperspektiv eller stärka gamla

Slutligen har vi kontexten som är den omgivande streckade cirkeln. Kontexten framhäver att teknologin, pedagogiken och ämnesinnehållet existerar i särskilda inlärnings- och undervisningssammanhang (Kohler, Mishra och Cain, 2013). Således ser TPACK annorlunda ut beroende på skolmiljö, tillgången till teknologier, demografi, ämnesinnehållet som ska undervisas, lärarens och elevernas tidigare erfarenheter kring användandet av teknologi etc. (Cox, 2008).

3.3.1 TPACK i lärarutbildningen

Forskare har börjat undersöka vilka tillvägagångsätt man kan ha för att införa TPACK i lärarutbildningen, och flera förslag har framgått hur det ska gå till. Koehler, Mishra och Cain (2013) framhäver tre av dessa tillvägagångsätt för utveckling av TPACK för blivande och nuvarande lärare:

1. Från PCK till TPACK: Läraren använder redan existerande PCK kunskaper till att förstå vilken teknologi som fungerar bäst för särskilda lärandemål.
2. Från TPK till TPACK: Läraren använder redan existerande TPK kunskaper till att identifiera och utveckla specifika ämnesinnehåll som gynnas av undervisning med hjälp av teknologi.
3. Utveckla PCK och TPACK samtidigt: Läraren skaffar sig kunskaper och erfarenhet genom projekt som kräver att de definierar, utformar och förbättrar lösningar till lärandeproblem och scenarier. Fokus för dessa aktiviteter är att ge lärarna insikt om hur teknologi, pedagogik och ämnesinnehåll interagerar för att bilda särskilda kunskaper.

Enligt Martin Tallvid (2017) förespråkar TPACK ramverket att kunskap om hur teknologi ska användas i skolan är ett absolut krav för framtidens lärare, och att det är interaktion mellan ämnesinnehållet, pedagogiken, och teknologin som utgör lärarkompetensen. Tallvid menar även att det finns en problematik att uppnå denna lärarkompetens eftersom den tekniska utvecklingen är snabb, vilket leder till att kompetensen konstant behöver omformuleras.

3.4 Koppling till styrdokumentet

I ämnesplanen för matematik finns även begrepp och stycken som har en tydlig anknytning till teknologi. I matematikämnets syfte står det följande:

”Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.” (Skolverket, 2011)

Under en längre tid har svenska skolor främst varit ensidiga genom att man uteslutande använder avancerade miniräknare som digitala verktyg i skolmatematiken, med införandet av bärbara datorer till skolan och gratis programvara som man enkelt kan ladda ner från internet så blir datorn ett allt mer självklart verktyg i matematiken (Jönsson och Lingefjärd, 2012).

Vidare står det vilka förmågor som förväntas att eleverna ska uppnå i undervisningen i ämnet matematik (Skolverket, 2011):

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.

3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Dessa sju förmågor är inte kopplade till något specifikt matematiskt innehåll. Det är genom bearbetning av det matematiska innehållet som dessa förmågor kommer att utvecklas. Jonas Hall och Thomas Lingefjärd (2014) menar att eleverna har möjlighet att utveckla alla sju förmågor vid arbete med IKT i matematikundervisningen.

För varje matematikkurs står det vilket centralt innehåll som kursen ska behandla och därefter vilka kunskapskrav som ska uppnås för betygen E, D, C, B och A. Samma beskrivningar för de olika kurserna upprepas i ämnesplanens alla kunskapskrav. För betyget A i kursen matematik 5 står det följande:

Eleven kan definiera och utförligt beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av flera representationer samt utförligt beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven med säkerhet mellan olika representationer. [...] I arbetet hanterar eleven flera procedurer, inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck, och löser uppgifter av standardkaraktär med säkerhet och på ett effektivt sätt, både utan och med digitala verktyg. [...] Eleven kan föra välgrundade och nyanserade matematiska resonemang, värdera med nyanserade omdömen och vidareutveckla egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis. Dessutom uttrycker sig eleven med säkerhet i tal och skrift samt använder matematiska symboler och andra representationer med god anpassning till syfte och situation (Skolverket, 2011).

Representationer brukar kategoriseras in i fem kategorier: fysisk, bildlig, verbal, numerisk och symbolisk. Dessa representationer kan uttryckas i olika former och medier. Eftersom de olika representationerna kan ta olika uttryck så går representationer och uttrycksformer samman. Till exempel kan bildlig representation uttryckas som en graf på ett papper, men även kan grafen uttryckas med hjälp av grafräknare eller dator. Tack vare digitalisering kan olika medier ge möjlighet till nya uttrycksformer (Jönsson och Lingefjärd, 2012).

3.5 Tidigare forskning

I detta avsnitt kommer forskningsresultat som har relevans till arbetet att presenteras.

3.5.1 DGS effekt på elevers prestationer i matematik

Kan Kan Chan och Siu Wai Leung (2014) genomförde en systematisk litteraturstudie och metaanalys som baseras på nio kvasiexperimentella DGS studier, som varade mellan åren 1990 och 2013 och hade 587 deltagare. Syftet med denna studie var att utvärdera om matematikundervisning med DGS förbättrar prestationer inom matematik för elever i grund- och gymnasieskolan. De DGS-verktyg som ingick i denna studie var bland andra Geometer's Sketchpad, Cabri, GeoGebra och Geometric Supposer. Resultatet visar på förbättrade matematiska prestationer i DGS-baserad undervisning. Denna positiva effekt visas på alla utbildningsnivåer och den största effektgraden var för elever i lågstadiet. I jämförelse av effektstorleken mellan mellanstadiet, högstadiet och gymnasiet så visades ingen signifikant skillnad. Resultatet visar även att studier som innehöll en kortvarig användning av DGS (mindre än två veckor) var mer effektiv än de som var långvariga (mer än två veckor). Vidare menar Chan och Leung (2014) att Geometer's Sketchpad och Cabri var mer effektiva som DGS-verktyg än GeoGebra, Geometric Supposer, och Autograph. Utifrån dessa resultat argumenterar Chan och Leung (2014) för att DGS bör integreras i matematikklassrummen för elever i grundskolan och gymnasiet, och att elever ska uppmuntras till att använda DGS. De menar även att det spelar ingen roll vilken DGS läraren väljer som pedagogiskt verktyg i sin undervisning men att det är viktigt att läraren känner sig bekväm med valet. Dessa resultat är i linje med Qing Li och Xin Ma (2010) tidigare metaanalys. Metaanalysen bestod av 46 studier, utförda mellan åren 1996 och 2006, som involverade 36 793 deltagare från förskolan, grundskolan och gymnasiet. Syftet med studien var att bedöma effekten datorteknologi har på elevers matematikprestationer. De DGS verktyg som ingick i undersökningen var Geometer's Sketchpad och Cabri Jr. Resultatet visar att datorteknologi har positiva effekter på elevers matematikprestationer och att denna effekt var som störst för elever i årskurserna 1 – 5. Resultatet visar även att studier som hade en kortvarig användning av DGS (mindre än sex månader) hade en större effekt på elevernas matematiska prestationer än de studier som hade med en långvarig användning av DGS (längre än sex månader). Vidare visar resultatet att datorteknologi har som störst effekt på elever med speciella behov och när lärare använde sig av konstruktivistiskt lärande. Li och Ma (2010) definierar konstruktivistiskt lärande som elevcentrerad undervisning där vikten är på arbetssätt som är undersökande, problemorienterat, och situerad kognition. Situerad kognition är en teori som föreslår att kunskaper erhålls i koppling och inom en kultur, plats, aktivitet eller social situation. Lärandet sker i sociala sammanhang och kan inte ske i avskildhet från vår miljö eller andra människor (Cummins, 2018). Traditionellt lärande definierar Li och Ma (2010) som lärarcentrerad med

helklassundervisning. En oväntad upptäckt som Li och Ma (2010) anser var anmärkningsvärd var att de inte fann någon signifikant skillnad på effektstorleken på elevers matematikprestationer bland de olika typerna av datorteknologi. Oavsett valet av datorteknologi som IKT verktyg så var det liknande effektstorlekar på matematikprestationerna. Avslutningsvis menar Li och Ma (2010) att alla tillvägagångsätt med datorteknologi inte leder till goda effekter på matematikprestationer hos eleverna och att det inte är alltid elever som använder datorteknologi som får bättre resultat än elever som inte gör det.

3.5.2 Frekvensen av IKT-användandet av matematiklärare

Willem J. Pelgrum och Joke Voogt (2009) undersökte skol- och lärarfaktorer som påverkar frekvensen av IKT-användandet av matematiklärare. All data som användes i studien hämtades från SITE 2006 databas, vilket är en omfattande internationell studie som fokuserar på IKT-användningen i skolorna. I studien jämförde Pelgrum och Voogt (2006) länder som har relativt hög frekvens av IKT-användning i matematikundervisningen (förkortas HF-IKT) mot länder som har relativt låg frekvens av IKT-användning i matematikundervisningen (förkortas LF-IKT). De länder med HF-IKT var Chile, Kanada Ontario och Kanada Alberta, och de länder med LF-IKT var Taiwan, Japan och Slovenien. Utifrån resultaten hävdar Pelgrum och Voogt att länder med HF-IKT hade lärare med ett mer elevcentrerat tillvägagångsätt och mer fokus på kompetenser för livslångt lärande. Pelgrum och Voogt (2006) menar att livslångt lärande är kompetenser som digital kompetens, lagarbete, problemlösning och projektledning. Vidare skriver Pelgrum och Voogt (2006) att skolledare i länder med HF-IKT är bättre på att stödja lärarens användandet av IKT genom att uppmuntra dem till att finna olika sätt att utnyttja IKT i undervisningen och lärandet. De menar dessutom att skolledare i länder med HF-IKT är bättre på att skapa en kollaborativ skolkultur som stödjer IKT och aktivt delar sin pedagogiska syn med lärare och föräldrar än i jämförelse med länder med LF-IKT.

4 Metod

Nedanför följer en redogörelse för arbetets tillvägagångsätt och urvalsprocess. Litteraturstudien är av en systematisk karaktär i enlighet med Eriksson Barajas, Forsberg och Wengström (2013). Det medför att en förbestämd sökstrategi med sökord har använts för att finna material till litteraturstudien. Litteraturstudien bygger på en kvalitativ ansats där författarna till forskningsartiklarnas uppfattningar och tolkningar om forskningsresultaten står i fokus.

4.1 Systematiska sökningar

I sökandet av litteratur till arbetet så har forskningsartiklar valts ut som är relativt aktuella ur ett tidsperspektiv. Sökorden valdes utifrån uppsatsens syfte och frågeställning och eftersom uppsatsen behandlar både nationell och internationell forskning så har artikelsökandet skett på både svenska och engelska. Alla forskningsartiklar som har använts i arbetet är peer-reviewed. Att en artikel är peer-reviewed innebär att artikeln har granskats av experter som har rekommenderat artikeln för publicering. Detta är för att säkerställa att artiklarnas kvalitet har blivit granskade (Eriksson Barajas, Forsberg och Wengström, 2013).

Sökning av litteratur har skett via databaser som har valts ut via Uppsala Universitetsbiblioteks lista över databaser samt via Uppsala Universitetsbiblioteks söktjänst. De databaser som har valts ut i detta arbete är Education Source (via EBSCOhost), JSTOR, ProQuest och ScienceDirect. En ytterligare databas som har använts i litteratursökandet är Google Scholar. För att försäkra att artiklarna från Google Scholar är peer-reviewed så har hemsidorna till de vetenskapliga tidskrifterna, där artiklarna publicerats, granskats för att försäkra kvaliteten.

De första sökningarna gjordes via Uppsala Universitetsbiblioteks söktjänst. Söktjänsten ger möjlighet till att förfina sökningen genom att man kan välja publikationstyp, språk, disciplin, ämnesord, peer-reviewed och publiceringsår. För att begränsa antalet träffar i sökningen så valdes disciplinen "mathematics" och "education", publikationstypen valdes till "tidskriftartikel", bara peer-reviewed artiklar valdes att visas i sökningen och artiklarna publiceringsår valdes till 2002 – 2017. Sökningarna gjordes med kombination av två sökord och den booleska operatören AND. Denna operator begränsar sökningen så att den endast söker efter träffar som innehåller båda sökorden (Eriksson Barajas, Forsberg och Wengström 2013). Titlarna för artiklarna lästes igenom och för de träffar som hade en intressant titel lästes sammanfattningen. Om denna var intressant läses artikeln i sin helhet och sedan görs ett beslut om artikeln ska användas i arbetet eller åsidosättas. Sökning via databaserna Education Source (via EBSCOhost), JSTOR, Education Source, ProQuest och ScienceDirect förfinades genom alternativen peer-reviewed och publiceringsår 2002 – 2017. Första sökning som gjordes för dessa databaser var med sökordet (GeoGebra) för att få en överblick om hur mycket material det finns detta ämne. Den andra sökningen gjordes med (GeoGebra) AND (Analytic Geometry). Titlarna för träffarna lästes igenom och om titeln verkar relevant för arbetet lästes sammanfattningen igenom för att sedan besluta om artikeln är av intresse för arbetet. En ytterligare sökning i ProQuest utfördes med (GeoGebra) AND (Secondary). Denna ytterligare sökning utfördes i hopp om att hitta ytterligare material som kan vara av intresse för arbetet.

Sökordet (Secondary) lades till för att få träffar som innehåller nyckelorden *secondary school*, *secondary mathematics*, och *secondary education*. Sökningar med sökorden (GeoGebra) och (GeoGebra) AND (Analytic Geometry) i Google Scholar gav ett stort antal träffar. Därför valdes träffarna att sorteras efter relevans och titlarna för de första 30 träffarna lästes igenom. I de träffar som hade intresseväckande titlar lästes sammanfattningen igenom. Från databassökningarna hittades totalt åtta artiklar som sammanställs i bilaga 1 nedan.

Vidare har även ytterligare fyra artiklar använts. Två av dessa hittades från Jan Olsson (2017) *GeoGebra, Enhancing Creative Mathematical Reasoning* avhandling, en artikel hämtades ur referenslistor, och en artikel var en rekommendation till arbetet. Totalt användes 12 artiklar i arbetet.

4.2 Analysprocess

All litteratur kategoriserades i olika mappar som skapades i datorn efter de teman som studierna berörde. Totalt skapades två mappar med namnen ”GeoGebras effekt på elevers matematikkunskaper och prestationer inom analytisk geometri” och ”Gymnasielärares användning av GeoGebra i matematikundervisningen”. För de artiklar som berörde båda teman kopierades dessa dokument och kategoriserades in i båda mapparna. Acrobat Reader DC användes för att läsa filerna och verktygen i programmet (som att markera text och infoga kommentarer) användes för att lättare bearbeta texten. För att få en överblick över litteraturen konstruerades en tankekartan med användning av online programvaran Bubbl.us.

5 Resultat

I resultatet nedan presenteras de vetenskapliga texter som har analyserats. Studiernas syfte, metod, resultat och författarens slutsatser beskrivs kortfattat.

5.1 GeoGebras effekt på elevers matematikkunskaper och prestationer inom analytisk geometri

Lärares användning av GeoGebra har en positiv verkan på elevers matematiska tänkande i analytisk geometri hävdar Muhammad Khalil, Naveed Sultana och Umair Khalil (2017). Det skriver de i sin studie som genomfördes på 40 elever under deras sista år på gymnasiet. Studien varade under sex veckor med 22 lektioner i en skola i Pakistan. Huvudsyftet med studien var att undersöka effekten GeoGebra har på elevernas matematiska tänkande inom analytisk geometri. Inför studien förde författarna fram sex aspekter som de ansåg vara avgörande för det matematiska tänkandet inom analytisk geometri. Dessa aspekter var generalisering, analys,

logiskt tänkande, abstrakt tänkande, problemlösning och representation, och dessa aspekter användes som mätvariabler till testerna i undersökningen. Under de sex veckorna fick kontrollgruppen traditionell matematikundervisning medan testgruppen fick arbeta i en datorsal tillsammans i par vid en dator med GeoGebra. Samma lärare, tillsammans med en forskare, undervisade både kontroll- och testgruppen. Inför varje undervisning med grupperna planerades lektioner och aktiviteter av forskare med hjälp av internet och GeoGebra. Resultatet i studien visade att GeoGebra har en positiv effekt på alla sex aspekter av matematiskt tänkande där problemlösning var den aspekten som visade lägst signifikans. Khalil, Sultana och Kahlil (2017) menar att detta beror på att problemlösning är en aktivitet som kräver mycket av elevernas kognitiva förmåga. Detta resultat är i linje med Eugen Ljajkos (2016) studie som visar att GeoGebra har en positiv effekt på elevernas prestationer i problemlösning inom analytisk geometri, men att effekten beror på problemets komplexitet. Syftet med Ljajkos (2016) studie var att undersöka elevers prestationer och den omfattningen av de kunskaper som eleverna har behållit efter avslutad undervisning i analytisk geometri. Studien genomfördes på 233 tredjeårets gymnasieelever på en skola i Serbien. Testgruppen bestod av 139 elever och kontrollgruppen 94 elever. Båda grupperna fick undervisning om samma ämnesinnehåll under 50 lektioner som varade 45 minuter vardera. I undervisningen för testgruppen arbetade eleverna i par vid en dator med GeoGebra för att skapa dynamiska sketcher av matematiska begrepp, representera matematiska problem och deras lösningar, och till att verifiera lösningar till problemen skrivna av lärare och elever. Under samma period fick kontrollgruppen traditionell undervisning med tavla och skrivna anteckningar. Efter avslutad undervisning skrev båda grupperna samma tre tester. I det första testet fick testgruppen valfritt använda GeoGebra för att besvara frågorna under villkoret att de inte laddade ner material från internet. I det andra testet fick eleverna skriva med papper-och-penna, utan dator som hjälpmedel. I det tredje testet skrev eleverna sex månader senare efter det sista lektionstillfället och hade som syfte att mäta omfattningen av de kunskaper som eleverna har behållit. Testet skrevs med papper-och-penna, utan användning av dator. Resultatet i studien visade att GeoGebra inte hade någon effekt på enklare problem i jämförelse med de mer komplexa. Ljajko (2016) menar att detta beror på bland annat att datorn kan vara distraherande om det tar längre tid att göra aktiviteten i GeoGebra än det skulle göra med papper-och-penna. Resultatet visade även ingen signifikant skillnad på elevernas bevarade kunskaper i analytisk geometri mellan test- och kontrollgruppen.

Användning av GeoGebra i en kooperativ lärandemiljö har en positiv effekt på elevernas matematikprestationer hävdar Yilmaz Zengin och Enver Tatar (2017) i deras studie på 61

gymnasieelever i en skola i Turkiet. Syfte med deras studie var tvåfaldig: 1) att undersöka hur effektivt en modell för kooperativt lärande med användning av dynamisk geometri har på elevernas prestationer i lärandet av kvadratiske funktioner och talföljder. 2) att undersöka elevernas uppfattningar kring användandet av dynamisk geometri i matematiken. Testgruppen för matematiska serier bestod av 19 deltagare, testgruppen för kvadratiske funktioner 25 deltagare, och kontrollgruppen 17 deltagare. Testgruppen för talföljder fick under tre veckor undervisning utifrån den kooperativa lärande modellen med stöd av GeoGebra, testgruppen för kvadratiske funktioner fick under två och en halv vecka undervisning utifrån den kooperativa lärande modellen med stöd av GeoGebra, och kontrollgruppen fick under tre veckor traditionell undervisning i ämnet talföljder. Under lektionstillfällena arbetade testgrupperna i grupper av fyra på en dator med redan förberett material till GeoGebra som läraren tog fram en vecka innan lektionstillfället. För att undersöka studiens andra syfte fick eleverna frågeformulär med öppna frågor. Resultatet från frågeformulären pekar på att eleverna uppfattade att visualisering gjorde matematiska begrepp lättare att förstå. Vidare menar eleverna att den kooperativa lärande modellen och användande av GeoGebra skapade en trevlig lärandemiljö, ökade elevernas motivation och intresse till matematiken. Utifrån dessa resultat menar Zengin och Tatar att eleverna behöver ha kunskaper om användandet av dator och programvara för att det inte ska bli ett hinder för deras lärande. Zengin och Tatar (2017) betonar att eleverna bör introduceras till de grundläggande IKT-verktygen, om dess funktioner och hur de ska användas för utbildningssyfte innan de tillämpas i klassrummen.

Elever har lättare att lära sig koordinatgeometri med stöd av GeoGebra. Det menar Royati Abdul Saha, Ahmad Fauzi Mohd Ayub och Rohani Ahmad Tarmizi (2010) i deras studie som genomfördes med 53 gymnasieelever i åldern 16 – 17 år från en skola i Malaysia. Syfte med studien var att identifiera skillnader på det genomsnittliga eftertestresultaten mellan: 1) elever som använder GeoGebra och de som använder konventionella metoder, 2) elever med hög spatial visualiseringsförmåga som använder GeoGebra och de som använder konventionella metoder, och 3) elever med låg spatial visualiseringsförmåga som använder GeoGebra och de som använder konventionella metoder. Antalet elever i testgruppen var 27 och antalet elever i kontrollgruppen var 26. Varje grupp kategoriserades i hög visuell intelligens och låg visuell intelligens. Elevernas visuella intelligens baserades på resultatet från Spatial Visualization Ability Test Instrument (SVATI) vilket eleverna utförde två veckor innan undersökningen. Studien bestod av fyra faser där första fasan var att introducera GeoGebra för testgruppen. Testgruppen fick arbeta med moduler som hade syftet att användarna skulle bekanta sig med

programvaran. Andra fasen introducerade det grundläggande för koordinatgeometri och matematisk problemlösning. Under den tredje fasen fick grupperna undervisning och bedömningsfrågor för att utvärdera det kortsiktiga lärandet. I denna fas lärde sig testgruppen koordinatgeometri med hjälp av GeoGebra medan kontrollgruppen fick traditionell lärarcentrerad undervisning. Totalt användes sju GeoGebra moduler som testgruppen fick arbeta med för att lära sig koordinatgeometri. Under den sista och fjärde fasen fick alla elever skriva ett eftertest vilket bestod av sex uppgifter och utfördes med papper-och-penna. Resultatet visar att elever som fick undervisning med stöd av GeoGebra hade ett högre medelresultat på eftertestet i jämförelse med gruppen som fick traditionell undervisning. Eftertestet visar att elever med hög spatial visualiseringsförmåga i testgruppen hade högre medelpoäng än de elever som hade hög spatial visualiseringsförmåga i kontrollgruppen, men denna skillnad var inte signifikant. Däremot visade resultaten att elever i testgruppen med låg spatial visualiseringsförmåga hade signifikant högre medelpoäng än elever med låg visualiseringsförmåga i kontrollgruppen. Utifrån resultatet hävdar Abdul Saha, Mohd Ayub och Ahmad Tarmizi (2010) att GeoGebra kan användas som ett verktyg av elever med olika nivåer av spatial visualiseringsförmåga för att lära sig genom visualisering, för att främja lärande och förbättra den matematiska förståelsen. En annan studie som visar att GeoGebra stödjer visuellt lärande är Zerrin Ayvaz Reis och Sebnem Ozdemir (2010) studie om parabelns ekvation där material framtog med GeoGebra. Denna studie utfördes med hjälp av 204 gymnasieelever i åldern 16 – 17 år från olika gymnasieskolor i Turkiet. Alla gymnasieskolor som valdes ut i denna studie hade liknande socioekonomisk utveckling. Testgrupperna och kontrollgrupperna bestod båda av 102 elever. Studien bestod av fyra faser. Under första fasen skrev båda grupperna ett förprovningstest. Under den andra fasen fick testgruppen undervisning med stöd av GeoGebra och kontrollgruppen fick traditionell undervisning. Testgruppen fick arbeta med tre moduler vilket var och en innehöll handledningsfrågor, vardagsexempel och om parabeln. På grund av tidsbrist så undervisades inte hela området om parabelns ekvation och därför fick båda grupperna bara ett undervisningstillfälle. Under den tredje fasen skrev båda grupperna likadana eftertest. Under den fjärde och sista fasen fick testgruppen svara på ett frågeformulär om undervisning med GeoGebra. Resultaten visar att testgruppen som fick undervisning med material förberett med GeoGebra presterade bättre än kontrollgruppen som fick traditionell undervisning. Reis och Ozdemir (2010) menar att GeoGebra hjälper eleverna att visualisera de begrepp inom matematiken som uppfattas som abstrakta.

Carina Granberg och Jan Olsson (2015) visar i sin studie att GeoGebra stödjer kollaborativt arbete och kreativt resonemang i problemlösning. Granberg och Olsson (2015) menar att ett resonemang anses vara kreativt om de stöds av rimliga argument som föreslår hur man kan lösa en uppgift och ge en matematisk motivering till varför den valda strategin fungerar. Istället för att minnas procedurer för att lösa uppgiften så skapar eleverna resonemang som är till en viss del nya för dem. I studien följer Granberg och Olsson (2015) 36 elever (18 pojkar och 18 flickor) i åldern 16–17 år från två gymnasieskolor i Sverige när de arbetar med att lösa problem med linjära funktioner i GeoGebra. Hälften av eleverna läste samhällsvetenskapliga programmet och den andra hälften läste teknikprogrammet. Eleverna delades in i grupper om två och fick dela på en dator med GeoGebra för att lösa utmanade problem som innebar både konstruktion och tolkning av algebraiska och geometriska representationer av linjära funktioner. Under problemlösningssprocessen så gav den närvarande läraren en kort introduktion om de grundläggande funktionerna i GeoGebra som behövs för att lösa de aktuella problemen och sedan agerade läraren som handledare genom att svara på elevernas frågor med svar som hade förberetts. Syftet med de förberedda svaren var att upprätthålla den didaktiska designen avsett för studien. Elevernas arbete i datorn spelades in med en programvara och videoklippen användes sedan i analysprocessen. Resultaten visar att eleverna arbetar kollaborativt med problemen istället för att dela upp problemen mellan sig i grupperna. GeoGebra fungerade då som ett gemensamt arbetsutrymme för grupperna. Resultatet visade även att under det kollaborativa arbetet i grupperna så resonerade eleverna kreativt. GeoGebra ger inte ett direkt svar på problemet så eleverna testade och verifiera sina egna lösningsstrategier. Granberg och Olsson (2015) menar att GeoGebra bidrar till elevernas kreativa resonering då de behöver tolka och utvärdera återkopplingen som de erhåller när de testar olika lösningsstrategier. En tidigare studie av Jan Olsson (2017) visar att elever som löser matematiska problem i analytisk geometri använde återkoppling som genereras av GeoGebra i en stor utsträckning. Olsson (2017) menar att den återkoppling som eleverna erhåller från GeoGebra kan antingen användas för att verifiera om ett antagande eller är en hypotes är korrekt, eller till att fördjupa sig i aktiviteten genom att till exempelvis fundera och diskutera varför ett svar är rätt eller fel. Olsson (2017) skiljer den form av återkoppling som eleverna vanligtvis får från en lärare från den återkoppling som de får från GeoGebra. Han menar att den återkoppling som läraren ger till eleven oftast syftar på en viss handling och har som syfte att ge information som hjälper eleverna framöver. Den återkoppling som eleverna får från GeoGebra är automatiskt genererat när eleverna gör en handling i programmet och som inte tydligt har syftet att hjälpa eleverna med hur de ska ta sig vidare. Utifrån elevens perspektiv är

det ett resultat utifrån en aktivitet som antingen är förväntat eller oförväntat och kan användas för att verifiera ett antagande eller en hypotes, eller för att fördjupa sig i aktiviteten. För att undersöka elevernas kreativa resonering och utnyttjande av återkoppling så deltog 16 elever (8 pojkar och 8 tjejer) från en gymnasieskola i Sverige i en workshop. Deltagarna delades in i åtta grupper och fick samarbeta tillsammans i par vid en dator. All data i studien samlades in genom skärminspelningar med integrerad röst- och videoinspelning. Alla åtta grupper fick som uppgift att med hjälp av GeoGebra 1) skapa en linjär funktion, 2) skapa en till linjär funktion på ett sådant sätt att den skär den ursprungliga funktionen vinkelrät, 3) formulera en regel för när två linjära funktioner skär varandra vinkelrät, och 4) testa regeln på olika linjära funktioner med olika lutningar samt förklara varför regeln fungerar. Eleverna i studien hade tidigare gått igenom linjära funktioner under första året på gymnasieskolan och inga av eleverna hade tidigare erfarenhet med GeoGebra. Eleverna fick en förberedd GeoGebra-fil som de fick arbeta med och hade endast tillgång till de väsentliga verktygen i GeoGebra för att lösa uppgifterna. Under workshopen svarade läraren på de tekniska frågorna, men undvek att leda eleverna genom uppgifterna. Utifrån de åtta grupperna var det fyra grupper som kom fram till en rimlig lösning till huvuduppgiften. Resultatet visar att tolkningen av återkopplingen som eleverna får från GeoGebra är avgörande för hur de kommer att lyckas med att lösa aktiviteter i programmet samt att förutsägelser om resultatet innan själva aktiviteten är viktigt för att på ett effektivt sätt kunna använda återkopplingen. Elever som lyckades lösa uppgifterna hade gemensamt resonemang som innehåller förutsäggande och verifierande argument, vilket är karakteristiskt för de som använder återkoppling på ett utförligt sätt (Olsson, 2017).

5.2 Gymnasielärares användning av GeoGebra i matematikundervisningen

Mingming Zhou, Kan Kan Chan och Timothy Teo (2016) utförde en studie baserad på Theory of planned behaviour för att undersöka gymnasielärare från Macao avsikt att använda DGS i matematikundervisningen. De hävdar att subjektiva normer och upplevd beteendekontroll har en signifikant effekt på lärares avsikt att använda DGS. Med subjektiv norm menas lärarens egna och subjektiva föreställningar om vad beslutfattare i skolan anser om användandet av DGS och med upplevd beteendekontroll menas lärarens tron på sin egna förmåga att kunna använda DGS på ett gynnsamt sätt. Studien genomfördes med hjälp av webbaserat frågeformulär och frågeformulär i pappersversion som skickades ut till 35 gymnasieskolor. Totalt svarade 190 lärare på frågeformulären. Resultatet pekar även på att attityd inte hade en signifikant effekt på lärares avsikt att använda DGS. Zhou, Chan och Teo (2016) hävdar att detta resultat visar att lärare anser att det är viktigare att följa de beslut som skolledare tar snarare än att agera utifrån

deras egna personliga åsikter. De anser att skolledare bör vidta åtgärder för att stärka lärares attityd till DGS.

Blivande lärare som har en positiv uppfattning om användning av teknologi i matematikundervisningen har lägre ångest till att undervisa matematik. Det hävdar Enver Tatar, Yilmaz Zengin och Türkan Berrin Kağızmanlı (2015) i deras kvantitativa studie där 320 blivande grundskolelärare i matematik och 161 blivande gymnasielärare i matematik deltog. Studiens syfte var att undersöka relationen mellan blivande matematiklärares uppfattningar när det gäller användning av teknologi i matematikundervisningen och deras datorkompetensnivå samt matematikundervisnings ångest. Deltagarna i studien fick svara på tre olika frågeformulär som mätte undervisningsångest till matematiken, uppfattning om användandet av teknologi i matematikundervisning, och datorkompetens. Resultatet pekar på att blivande matematiklärare som har en hög datorkompetens har en lägre ångestnivå och att de blivande matematiklärare som anser teknologin är ogynnsam har en högre ångest till undervisningen. Utifrån detta resultat föreslår Tatar, Zengin och Kağızmanlı (2015) att kvantitativa studier bör utföras för att identifiera de underliggande orsakerna till varför vissa lärare anser teknologi var ogynnsam och att det bör föras in kurser om hur man hanterar teknologi i matematikundervisningen, vilket skulle då bidra positivt till blivande matematiklärares uppfattning om teknologi. Dessa kurser skulle då leda till att matematiklärarna får en högre datorkompetens och en minskad ångest till matematikundervisningen.

Judith Hohenwarter, Markus Hohenwarter och Zsolt Lavicza (2008) identifierar de utmaningar som lärare möter när de är nya med att använda GeoGebra i matematikundervisningen. Under en tre veckors tid organiserades ett professionellt utvecklingsprogram för mellanstadie-, högstadie- och gymnasielärare i Florida, USA. Lärarna som deltog i programmet fick delta i fyra GeoGebra workshops, utföra fyra hemuppgifter och fylla i tre utvärderingsenkäter. Första enkäten skrevs innan första workshoppen och utvärderade deltagarnas datakunskaper och vanor, andra enkäten skrevs efter slutförda workshops och utvärderade deltagarnas kunskaper om GeoGebra, och den tredje enkäten skrevs under den sista dagen och utvärderade deltagarnas matematiska innehållskunskap enligt Mathematics Florida Standards. Utifrån studien kom Hohenwarter, Hohenwarter och Lavicza (2008) fram med en rad olika resultat:

- Deltagarna var nöjda med GeoGebras användbarhet och mångsidighet, och upplevde att programmet var enkel att hantera.

- Verktøyen i programvaran som användes i de olika aktiviteterna ansågs vara enkla att hantera efter mer kännedom om GeoGebra oavsett den initiala svårighetsgraden.
- Små skillnader i svårighetsgraden mellan algebraiska och geometriska uppgifter men resultatet visar att deltagarna spenderade 50 % längre tid på algebraiska inputs och användning av kommandon.
- När det gäller GeoGebras funktioner med flera alternativ (t.ex. etiketter med alternativ som "namn", "namn och värde", "värde") så var dessa mer utmanande att använda än de som kan enkelt sättas på och av med ett musklick.
- Användare som använder operativsystemet Windows stötte på oväntade problem med att högerklicka för att öppna innehållsmenyn.
- Studien fann inga signifikanta skillnader på deltagarnas kön, ålder, undervisningserfarenhet, matematisk innehållskunskap, datorfärdigheter, eller erfarenhet av användning av olika operativsystem med svårigheter att använda GeoGebra. Dock visade studien att deltagare som använde pekplatta upplevde att workshopsaktiviteterna var signifikant svårare i jämförelse med deltagare som använder sig av datormus.
- Resultatet visade att de svårigheter som förekom mest under workshoppen var hur man konstruerade geometriska figurer, hur man på ett korrekt sätt använder programvaran, och hur man matar in lämplig algebraisk syntax.

Under studiens gång så visade deltagarna tydliga förbättringar vid hantering av programvaran. Detta var ett resultat utifrån de på varandra följande workshoppen och utdelande av böcker och nya handouts till de deltagare som var nya användare av GeoGebra.

Lärare använder en rad olika strategier för att integrera GeoGebra i sin undervisningspraxis. Till exempelvis används GeoGebra till att förbereda undervisningsmaterial, presentera matematiska begrepp, och klassrumsaktiviteter. Lärares undervisningspraxis påverkas markant av deras uppfattningar om GeoGebra i relation till matematisk kunskap och kulturella traditioner. Detta menar Lu (2008) i sin flerfallstudie där hon undersöker två engelska och två taiwanesiska gymnasielärares uppfattningar och utövande av GeoGebra. I studien använder Lu (2008) flera metoder för att samla in kvalitativa data: dokumentation av GeoGebra-relaterade hemsidor och läromedel, kommunikation med lärare via emails, videoinspelade intervjuer, och observationer av lärares matematiska konstruktioner i GeoGebra. Utifrån all data menar Lu (2008) att de engelska lärarna hade en mer positiv attityd till teknologi i jämförelse med de taiwanesiska lärarna. Dock var lärarna från de båda länderna positiva till användandet av

GeoGebra i undervisningen. De engelska lärarna associerade GeoGebra främst med geometri medan de taiwanesiska associerade GeoGebra med både geometri och algebra. Lu (2008) förklarar att detta möjligen beror på den taiwanesiska läroplanen och den lärobksorienterade kulturen.

GeoGebra är ett kraftfullt verktyg inom problemlösning för att testa förmågan att lösa problem på flera sätt inom olika områden i matematiken. Det visar Stupel och Ben-Chaim (2017) fallstudie, utförd med hjälp av 37 blivande matematiklärare för årskurs 7 – 12 och 13 universitetslektorer. Syftet med denna studie var tvåfaldig: 1) testa blivande gymnasielärares förmåga att lösa problem på flera olika sätt och sedan utvärdera effekten av lärandet, attityd, inövning, och framtida undervisning. 2) undersöka attityden till konceptet om att lösa problem på olika sätt hos lärarutbildarna. Stupel och Ben-Chaim (2017) menar att GeoGebra hjälper den lärande att göra sina egna antagande om problemet, uppskatta olika områden i matematiken och hjälper dem att uppleva hur ett problem kan tacklas från olika perspektiv.

6 Diskussion

I detta avsnitt lyfts litteraturstudiens resultat fram och diskuteras i förhållande till bakgrund, tidigare forskning och syfte.

6.1 Metoddiskussion

Fokuset i litteratursökningen har varit användning av GeoGebra inom det matematiska området analytisk geometri av lärare och elever samt vilka förutsättningar som finns för lärares användning av GeoGebra. För detta valdes litteratur som berör detta matematiska området och målgrupp. I läsandet av artiklarna låg stor vikt vid studiernas kvalitativa resultat och författarnas tolkningar av resultaten. Totalt användes 12 artiklar i arbetet vilket jag anser tillräckligt för att besvara frågeställningarna. Däremot skulle fler artiklar ha bidragit till ett bredare perspektiv över GeoGebra användningen av lärare och elever.

Sökningen av litteratur har inte endast fokuserat på fördelar eller nackdelar. Fokuset har varit att finna material för att få en ökad förståelse om vad forskningen säger om användningen av GeoGebra i matematikundervisning inom området analytisk geometri. En tanke var att ha ett avsnitt i resultatdelen som berör eventuella nackdelar med användningen av programvaran men efter att ha läst litteraturen fanns det ett litet utbud av negativa konsekvenser som förekommer, så detta blev inte aktuellt.

Det var av intresse att göra litteratursökningar om forskning som endast gjorts på svenska gymnasieskolor, men med risken att det inte skulle finnas tillräckligt med material till studien så togs beslutet att inkludera även andra länder. Studierna som har tagits med i arbetet har utförts i länderna England, Estland, Israel, Macao, Malaysia, Pakistan, Sverige, Taiwan, Turkiet och USA.

Det resultat som presenteras nedan är en del av det fullständiga resultat som finns i litteraturen. Detta är för att det resultat som presenteras i detta arbete är det som är av vikt för arbetets syfte och frågeställningen.

6.2 Resultatdiskussion

Resultat i denna litteraturstudie visar att GeoGebra som ett digitalt verktyg har en positiv effekt på gymnasieelevernas prestationer i det matematiska området analytisk geometri. Det visar 5 studier (Khalil, Sultana och Khalil 2017; Ljajko, 2016; Abdul Saha, Mohd Ayub och Ahmad Tarmizi, 2010; Zengin och Tatar, 2017; Reis och Ozdemir, 2010) som hade huvudsyftet att undersöka hur användningen av GeoGebra förbättrar elevernas prestationer i matematik inom området analytisk geometri. Detta resultat är i linje med tidigare forskning (Chan och Leung, 2014; Li och Ma, 2010). Vidare visar resultatet att det finns ett krav på att lärare behöver en förståelse om hur elever lär sig matematik genom problemlösning med användning av GeoGebra. Khalil, Sultana och Khalil (2017) betonar vikten av att problemlösning ställer höga krav på elevernas kognitiva förmåga och att detta bör lärare vara medvetna om. Dessutom hävdar Ljajko (2016) att effektiviteten av användning av programvaran beror på problemets karaktär. För komplexa problem var GeoGebra ett effektivt verktyg medan för enklare problem var GeoGebra mer eller mindre ett distraktionsobjekt för eleverna. Eleverna tar längre tid på sig att lösa de enklare problemen med användningen av GeoGebra och bidrog inte mycket till elevernas lärande. Därför menar Ljajko (2016) att det är istället bättre att använda penna-och-papper till enklare problem. Det framstår även utifrån resultatet att GeoGebra fungerar som en bra plattform för delat arbetsutrymme åt elever i kollaborativt arbete i problemlösning. Carina och Olsson (2015) hävdar att elever som arbetar kollaborativt med GeoGebra på en dator använder sig av kreativt resonering och återkoppling som erhålls av programmet. Dessa elever testar olika lösningsstrategier för att komma fram till svar på problemen. Olsson (2017) menar att de elever som var mest framgångsrika i kollaborativt arbete med GeoGebra använde sig av kreativ resonering och återkoppling i en stor utsträckning. Utifrån dessa resultat så kan vi dra slutsatsen att GeoGebra är ett effektivt verktyg i problemlösning för analytisk geometri men att detta ställer krav på läraren. Lärare bör konstruera väl genomtänkta aktiviteter och

matematikuppgifter som aktiverar elevernas kognitiva förmåga. Genom att konstruera uppgifter som ligger på en bra kognitiv nivå för eleverna så kan lärandet ske genom problemlösning och kreativt resonemang genom samarbete mellan elever och lärare i matematikundervisningen. Detta är ett arbetssätt som även motiveras i läroplanen. Eleverna ska få möjlighet att utveckla sin förmåga att ”formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat” (Skolverket 2011).

Visuellt lärande med GeoGebra hjälper eleverna att lära sig matematiska begrepp. Zengin och Tatar (2017) hävdar att elever som arbetade med GeoGebra uppfattade att visualiseringen gjorde matematiska begrepp tydligare att förstå. Dessutom uppskattade eleverna i studien när GeoGebra användes i en kooperativ lärandemiljö. De var motiverade och intresserade av matematiken under aktiviteterna. Abdul Saha, Ahmad Tarmizi och Mohd Ayub (2010) bestyrker detta i sin undersökning. De menar att GeoGebra kan användas som ett verktyg för att lära sig matematik genom visualisering och förbättra den matematiska förståelsen. Denna effekt visades vara tydligast för elever som hade låg spatial förmåga i jämförelse med elever med hög spatial förmåga. Reis och Ozdemir (2010) betonar fördelarna med visuellt lärande med GeoGebra. De menar att matematiska begrepp som annars uppfattas vara abstrakta visualiseras med hjälp av GeoGebra. Således hjälper GeoGebra eleverna att engagera sig i matematiken, fånga deras uppmärksamhet och demonstrera hur matematiken är relevant för deras verkliga liv. Alltså är GeoGebra ett bra verktyg för att hjälpa eleverna att visualisera abstrakta matematiska begrepp vilket i sin tur hjälper elevernas förståelse av matematiken.

Resultatet i litteraturstudien visar att skolledare har en effekt på lärares intention att föra in GeoGebra i klassrummet. Detta resultat bestyrks av tidigare forskning (Pelgrum och Voogt 2006). Pelgrum och Voogt (2006) menar att länder som har en högfrekvent användning av IKT får mycket stöd av skolledare. Zhou, Chan och Teo (2016) hävdar att de lärare som hade högre förtroende för användandet av DGS hade skolledare som gjorde insatser för att stärka och stödja lärarnas kunskaper för teknologi. Ytterligare menar de att attityd inte hade en stor betydelse för lärarens beslut om att använda DGS. Lärare värderade skolledares åsikter mer än sina egna. Lu (2008) menar att inställningen till användandet av GeoGebra är starkt förankrat i lärares uppfattningar om teknikanvändning. Hon observerade att de engelska lärarna i hennes studie, som har en utbildningspolitik som starkt främjar användningen av teknologi i klassrum, var mer självsäkra och skickliga i användningen av GeoGebra än de taiwanesiska lärarna, som hade en utbildningspolitik som förväntar sig lite användning av teknologi. Utifrån dessa resultat så kan det konstateras att skolledares ställningstagande till teknologi har en betydelse för lärares avsikt

till att använda GeoGebra i matematikundervisningen och därför är det viktigt att skolledare arbetar med att stödja lärares användning av GeoGebra i matematikundervisningen.

Lärare behöver ha goda kunskaper om GeoGebra för att på ett effektivt och säkert sätt använda det i matematikundervisningen. Tatar, Zengin och Kağızmanlı (2015) hävdar att blivande lärare behöver en god datorkompetens för att på ett säkert och effektivt sätt kunna använda teknik i matematikundervisningen. De menar även att blivande lärares uppskattning av användandet av teknik i matematikundervisningen ökar då deras datorkunskaper ökar och således minskar ångesten till att undervisa matematik. Hohenwater, Hohenwarter och Lavicza (2008) menar också att lärare bör ha en god digital kompetens för att integreringen av teknik ska bli framgångsrik i klassrummet. De skriver att workshops, handouts och litteratur hjälper lärarna att bli kunnigare i användandet av programvaran. Det kan konstateras utifrån resultatet att lärare behöver kunskaper om hur GeoGebra fungerar som program för att det ska bli ett effektivt verktyg i klassrummet. Lärare kan lära sig att använda programvaran själva med hjälp av litteratur och material från internet eller så kan workshops och seminarier planeras in på skolorna för att utbilda lärare om användning av GeoGebra i matematikundervisningen.

Stupler och Ben-Chaim (2017) hävdar att GeoGebra har goda effekter på lärares matematiska tänkande och breddar lärares arsenal av pedagogiska metoder. De menar att de blivande lärare i undersökningen som arbetade med programvaran fann olika sätt att lösa problem och betraktade hur olika grenar i matematiken förhåller sig till varandra. Det motiveras i ämnesplanen för matematik att undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt samt att eleverna ska få möjlighet till att utveckla sin förmåga att använda digitala verktyg (Skolverket, 2011). Lärare kan använda GeoGebra som ett verktyg för att variera undervisningen inom matematik och visa hur de olika områdena i matematiken hänger i samman med varandra.

7 Slutsats

Denna litteraturstudie pekar på att GeoGebra har goda effekter på elevernas matematikprestationer inom analytisk geometri och att lärare behöver kunskap och stöd för att GeoGebra i matematikundervisningen ska bli framgångsrik. Läraren behöver ha en förståelse för när en GeoGebra-aktivitet har en positiv effekt på elevernas matematiska lärande och när en sådan aktivitet inte leder till ett bättre lärande. Koehler och Mishras TPACK ramverk är ett sätt att få en förståelse om hur lärarens kompetenser samverkar. När GeoGebra används i undervisningen så är det en nödvändighet att läraren har tillräckligt med kunskaper om

ämneshållet, programvaran och pedagogiken, och hur dessa kunskaper samverkar med varandra. Lärare bör få stöd av skolledare genom att lärare erbjuds kompetens och fortbildning för att lyckas med GeoGebra i matematikundervisningen. I Sverige finns Matematiklyftet som är en kompetensutvecklingsinsats i matematikdidaktik av Skolverket och som kan bidra till att lärare utökar sin lärarkompetens. Lärare kan även delta i workshops och seminarier för att utöka sina kunskaper om GeoGebra eller andra DGS.

Denna litteraturstudies främsta hinder var att finna forskning som var relevant till syftet och frågeställningen. En bättre utarbetad sökstrategi skulle eventuellt leda till att mer relevant litteratur skulle hittats. För en eventuell framtida litteraturstudie skulle det vara av intresse att inkludera och jämföra flera DGS-effekter på elever och lärare när de används i matematikundervisningen.

8 Källförteckning

Abdul Saha, R., Mohd Ayub, A. & Ahmad Tarmizi, R. (2010). The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlighten Coordinate Geometry Learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 8, 686–693. doi: 10.1016/j.sbspro.2010.12.095

Allison Lu, Y. (2008). *Linking geometry and algebra: a multiple-case study of upper-secondary mathematics teachers' conceptions and practices of GeoGebra in England and Taiwan*, Master's thesis, University of Cambridge, UK. <https://archive.geogebra.org/static/publications/2008-Lu-GeoGebra-England-Taiwan.pdf> (Hämtad 2017-09-21).

Angeli, C. & Valanides, N. (Ed.) (2015). *Technological Pedagogical Content Knowledge*. New York: Springer.

Ayvaz Reis, Z. & Ozdemir, S. (2010). Using Geogebra as an information technology tool: parabola teaching. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 9, 565–572. doi: 10.1016/j.sbspro.2010.12.198

Chan, K. K. & Leung, S. W. (2014). Dynamic Geometry Software Improves Mathematical Achievement: Systematic Review and Meta-Analysis. *Journal Educational Computing Research*, 51(3), 311–325. doi: 10.2190/EC.51.3.c

Cox, S. (2008) *A Conceptual Analysis of Technological Pedagogical Content Knowledge*. All Theses and Dissertations. Paper 1482.

Cummins, E. (2018). *Situated Cognition: Theory & Definition*, <https://study.com/academy/lesson/situated-cognition-theory-definition.html> (Hämtad 2018-04-24).

Eriksson Barajas, K., Forsberg, C. & Wengström, Y. (2013). *Systematiska litteraturstudier i utbildningsvetenskap: vägledning vid examensarbeten och vetenskapliga artiklar*. (1. utg.) Stockholm: Natur & Kultur.

Granberg, C. & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. *Journal of Mathematical Behavior*, 37, 48–62. doi: 10.1016/j.jmathb.2014.11.001

Hall, J. & Lingefjärd, T. (2014). *Handbok för matematisk modellering med GeoGebra. Att undervisa mot förmågorna*. 1. uppl. Lund: Studentlitteratur.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. & Lavicza, Z. (2008). Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 28(2), 135–146.

Hohenwarter, M. & Lavicza, Z. (2010). *GeoGebra, its community and future*. Johannes Kepler Universitet och Cambridge Universitet. http://atcm.mathandtech.org/EP2010/invited/3052010_18180.pdf (Hämtad 2017-07-09).

International GeoGebra Institute (2018). *Vad är GeoGebra?* <https://www.geogebra.org/about> (Hämtad 2018-02-18).

Jönsson, P. & Lingefjärd, T. (2012). *IKT i grund- och gymnasieskolans matematikundervisning*. 1. uppl. Lund: Studentlitteratur.

Khalil, M., Sultana, N., & Khalil, U. (2017). Exploration of Mathematical Thinking and its Development through Geogebra. *Journal of Educational Research*, 20(1), 83–99.

Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2013). What is technological pedagogical content knowledge? *The Journal of Education*, 193(3), 13 – 19.

Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 22, 215 – 243. doi: 10.1007/s10648-010-9125-8

Ljajko, E. (2016). Does the Problem Complexity Impact Students' Achievement in a Computer Aided Mathematics Instruction? *The Teaching of Mathematics*, 19(1), 41–55.

Olsson, J. (2017). The Contribution of Reasoning to the Utilization of Feedback from Software When Solving Mathematical Problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*. doi: 10.1007/s10763-016-9795-x

Pelgrum, W. J., & Voogt, J. (2009). School and Teachers factors associated with frequency of ICT use by mathematics teachers: Country comparisons. *Education and Information Technologies*. 14(4), 293–308. doi: 10.1007/s10639-009-9093-0

Skolverket. (2011). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket. <https://www.skolverket.se/publikationer?id=2705> (Hämtad 2017-06-13).

- Stupel, M. & Ben-Chaim, D. (2017). Using multiple solutions to mathematical problems to develop pedagogical and mathematical thinking: A case study in a teacher education program. *Investigations in Mathematics Learning*, 9(2), 86–108. doi: 10.1080/19477503.2017.1283179
- Tallvid, M. (2016). *Skolan i ett digitaliserat samhälle*. Stockholm: Skolverket. https://larportalen.skolverket.se/#/modul/0-digitalisering/Grundskola/201_Leda_och%20lara_i_tekniktata_klassrum/del_01/ (Hämtad 2017-06-18)
- Tatar, E., Zengin, Y., & Kağızmanlı, T. B. (2015). What is the Relationship between Technology and Mathematics Teaching Anxiety? *Educational Technology & Society*, 18(1), 67–76.
- Zengin, Y., & Tatar, E. (2017). Integrating Dynamic Mathematics Software into Cooperative Learning Environments in Mathematics. *Educational Technology & Society*, 20(2), 74–88.
- Zhou, M., Chan, K. K., & Teo, T. (2016). Modelling Mathematics Teachers' Intention to use the Dynamic Geometry Environments in Macau: An SEM Approach. *Educational Technology & Society*, 19(3), 181–193.

9 Bilaga 1: Databassökning

Databas	Sökhistoria	Antal träffar	Antal valda träffar*
Uppsala Universitetsbibliotek**	(GeoGebra)	347	-
	(GeoGebra) AND (Analytisk Geometri)	0	0
	(GeoGebra) AND (Analytic Geometry)	41	1
Education Source (via EBSCOhost)	(GeoGebra)	114	-
	(GeoGebra) AND (Analytic Geometry)	3	1
JSTOR	(GeoGebra)	62	1
ProQuest	(GeoGebra)	210	-
	(GeoGebra) AND (Analytic Geometry)	25	0
	(GeoGebra) AND (Secondary)	105	1
ScienceDirect	(GeoGebra)	118	2
	(GeoGebra) AND (Analytic Geometry)	21	0
Google Scholar***	(GeoGebra)	24,300	2
	(GeoGebra) AND (Analytic Geometry)	1630	0

*: ”-” Inga av träffarna granskades.

** : Förfinad sökning: Disciplin: ”Mathematics” och ”Education”. Publikationstyp: ”Tidskriftartikel”. Endast ”Peer-reviewed” artiklar. Publiceringsår ”2002 – 2017”.

***: Artiklar sorterades efter relevans och de första 30 träffar granskades.

10 Bilaga 2: Artikelöversikt

Författare & År	Titel	Syfte	Metod	Urval	Resultat
Abdul Saha, R., Mohd Ayub, A. & Ahmad Tarmizi, R. (2010).	The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlighten Coordinate Geometry Learning.	Syftet var att undersöka effekten av att använda GeoGebra vid inläring av koordinatgeometri för elever som har hög spatial förmåga och elever med låg spatial förmåga.	Kvantitativ analys. Förtest och eftertest.	54 elever från en gymnasieskola i Malaysia.	Elever som fick undervisning med stöd av GeoGebra hade ett högre medelresultat på eftertestet i jämförelse med gruppen som fick traditionell undervisning.
Allison Lu, Y. (2008).	Linking geometry and algebra: a multiple-case study of upper-secondary mathematics teachers' conceptions and practices of GeoGebra in England and Taiwan.	Syftet var att undersöka engelska och taiwanesiska gymnasielärares uppfattningar och utövande av GeoGebra.	Kvalitativ analys. Videoinspelade intervjuer, dokumentation av GeoGebra relaterade hemsidor, kommunikation via email, och observationer.	2 gymnasielärare från Taiwan och 2 gymnasielärare från England.	Lärares undervisningspraxis påverkas markant av deras uppfattningar om GeoGebra i relation till matematisk kunskap och kulturella traditioner.
Ayvaz Reis, Z. & Ozdemir, S. (2010).	Using Geogebra as an information technology tool: parabola teaching.	Syftet var att undersöka hur effektiv GeoGebra är som IKT-verktyg på elevers lärande om parabler.	Kvalitativ och kvantitativ analys. Förtest, eftertest och frågeformulär.	204 gymnasieelever från olika skolor i Turkiet.	Testgruppen som fick undervisning med material förberett med GeoGebra presterade bättre än kontrollgruppen som fick traditionell undervisning.

Granberg, C. & Olsson, J. (2015).	ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software.	Syftet var att undersöka hur GeoGebra kan stödja elevers kollaborativa arbete och kreativa resonemang under matematisk problemlösning.	Kvalitativ analys. Inspelade konversationer och datoraktiviteter analyserades.	36 elever från två gymnasieskolor i Sverige.	GeoGebra stödjer kollaborativt arbete och kreativt resonemang i problemlösning.
Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. & Lavicza, Z. (2008).	Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra.	Syftet var att identifiera svårigheter och hinder som gymnasielärare möter i arbetet med GeoGebra och bedöma användbarheten av själva mjukvaran.	Kvalitativ analys. Workshops som utvärderas med hjälp av frågeformulär.	44 mellanstadie-, högstadie- och gymnasielärare från USA.	Lärare stötte på en rad olika tekniska problem vid hanteringen av GeoGebra. Studien visade en omedelbar förbättring av användningen av GeoGebra under de på varandra följande workshopen, och genom utlämning av böcker och nya handouts om GeoGebra.
Khalil, M., Sultana, N., & Khalil, U. (2017).	Exploration of Mathematical Thinking and its Development through GeoGebra.	Syftet var att ta reda på den potentiella effekten av GeoGebra har på elevernas matematiska tänkande och utforska tänkande strukturen i analytisk geometri.	Kvantitativ analys. Förtest och eftertest med en 4 poängskalig rubric.	40 gymnasieelever från en skola i Pakistan.	Resultaten visade signifikant skillnad på fem variabler mellan kontroll- och testgruppen (generalisering, analytisk tänkande, logiskt tänkande, abstrakt tänkande och representation). Medelvärde för problemlösning var högre för testgruppen, men denna skillnad var inte signifikant.

Ljajko, E. (2016).	Does the Problem Complexity Impact Students' Achievement in a Computer Aided Mathematics Instruction?	Syftet var att bedöma möjligheterna att förbättra undervisning i plan analytisk geometri i en miljö försedd med datorer och GeoGebra samt bedöma den omfattningen av de kunskaper som eleverna har behållit efter avslutad undervisning i analytisk geometri som demonstreras av elever i en IKT-berikad miljö i jämförelse med elever i en IKT-berövad miljö.	Kvantitativ analys. Tre tester med frågor som kunde få maximalt 10 poäng per fråga.	233 gymnasieelever från en skola i Serbien.	GeoGebra hade ingen effekt på enklare problem till skillnad från mer komplexa. Arbetet med GeoGebra med enklare problem kan vara distraherande. Ingen signifikant skillnad på elevernas bevarade kunskaper i analytisk geometri efter sex månader mellan test- och kontrollgruppen.
Olsson, J. (2017).	The Contribution of Reasoning to the Utilization of Feedback from Software When Solving Mathematical Problems.	Syftet var att undersöka hur elevers resonering bidrar till användandet av återkoppling som genereras av GeoGebra.	Kvalitativ analys. Skärminspelningar med integrerad röst- och videoinspelning.	16 elever från en gymnasieskola i Sverige.	Elever använder kreativt resonemang och direkt återkoppling som genereras av aktiviteter i GeoGebra i en stor utsträckning.

<p>Stupel, M. & Ben-Chaim, D. (2017).</p>	<p>Using multiple solutions to mathematical problems to develop pedagogical and mathematical thinking: A case study in a teacher education program.</p>	<p>Syftet var att: 1) testa blivande gymnasielärares förmåga att lösa problem på flera olika sätt och sedan utvärdera effekten av lärandet, attityd, inövning, och framtida undervisning. 2) undersöka attityden till konceptet om att lösa problem på olika sätt hos lärarutbildarna.</p>	<p>Kvalitativ analys. Fallstudie. Distribuerade frågor, problem, frågeformulär och personliga intervjuer.</p>	<p>37 blivande gymnasie matematiklärare och 13 universitetslektorer från Israel.</p>	<p>GeoGebra hjälpte deltagarna att göra sina egna antagande om problemet, uppskatta olika områden i matematiken och uppleva hur ett problem kan tacklas från olika perspektiv.</p>
<p>Tatar, E., Zengin, Y., & Kağızmanlı, T. B. (2015).</p>	<p>What is the Relationship between Technology and Mathematics Teaching Anxiety?</p>	<p>Syftet var att fastställa förhållandet mellan blivande matematiklärares för grundskolan och gymnasiet uppfattning om teknikanvändning i matematikundervisningen och deras kunskaper om datoranvändning samt deras matematikundervisnings ångest.</p>	<p>Kvantitativ analys. Tre mätskalor där lägsta poäng motsvarar "håller inte alls med" och högsta poäng motsvarar "håller fullständigt med".</p>	<p>320 blivande grundskolematematiklärare och 161 blivande gymnasie matematiklärare.</p>	<p>Blivande matematiklärare som har en hög datorkompetens har en lägre ångestnivå. Blivande matematiklärare som anser att teknologin är ogynnsam har en högre ångestnivå till matematikundervisningen.</p>

Zengin, Y., & Tatar, E. (2017).	Integrating Dynamic Mathematics Software into Cooperative Learning Environments in Mathematics.	Syftet var att utvärdera genomförandet av en kooperativ inlärningsmodell med stöd utav GeoGebra utifrån en konstruktivistisk syn på lärandet.	Kvalitativ och kvantitativ analys. Förtest, eftertest och frågeformulär.	61 gymnasieelever från en skola i Turkiet.	Eleverna uppfattade att visualisering gjorde matematiska koncept lättare att förstå och att den kooperativa lärande modellen och användande av GeoGebra skapade en trevlig lärandemiljö för eleverna samt ökade elevernas motivation och intresse till matematiken. Ytterligare visar resultatet att eleverna behöver ha kunskaper om användandet av datorn och programvaran för att uppnå goda resultat.
Zhou, M., Chan, K. K., & Teo, T. (2016).	Modelling Mathematics Teachers' Intention to use the Dynamic Geometry Environments in Macau: An SEM Approach.	Syftet var att undersöka gymnasielärares avsikter att använda dynamiskt geometriprogram i matematikundervisningen genom att tillämpa modellen "Theory of Planned Behavior".	Kvantitativ. Frågeformulär (SEM).	190 gymnasielärare från olika skolor i Macau.	Subjektiva normer och uppfattad beteendekontroll har en aignifikant effekt på lärares avsikt. Lärares egna attityder hade ingen signifikant effekt på lärares avsikt att använda dynamiskt geometriprogram i matematikundervisningen.