UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2018:38

Cavalieris indivisibler

Rasmus Andersson

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare: Anders Öberg
Examinator: Martin Herschend
Augusti 2018

Department of Mathematics
Uppsala University

Abstract

In this essay I will describe Cavalieri’s method of indivisibles: indivisible segments of lines, surfaces and bodies. This has been studied by other mathematicians but Cavalieri was the first one who made a serious effort to create a rigorous theory. Cavalieri lived in the seventeenth century, and the purpose of his method was to prove area and volume formulas in an ostensive way, without using proofs of contradiction. Like the Greek mathematicians Cavalieri used comparisons between figures but, compared to the Greeks, he was not as critical to the use of infinities. Cavalieri's indivisibles came to play an important part in the development of mathematics from the Greek tradition of double proofs of contradiction into Leibniz infinitesimals, Though this he was strongly criticised by some of the mathematicians of his own time which I also will refer to in this essay. The progress of infinitesimals and integral calculations made however the theory of indivisibles disappear in to the background, but according to me, there are still times when it could be useful even today which I will explain further in the final chapter.

Sammanfattning

I denna uppsats beskrivs Cavalieris metod för indivisibler: odelbara segment av linjer, ytor och kroppar. Detta har tidigare matematiker också arbetat med men Cavalieri var den förste att försöka göra en mer rigorös teori. Cavalieri levde på sextonhundratalet och syftet med hans metod var att på ett direkt sätt bevisa area- och volymformler utan motsägelsebevis. Likt de grekiska matematikerna använde sig Cavalieri av jämförelser mellan figurer men var till skillnad från dem inte lika kritisk när det kom till användandet av oändligheter. Cavalieris indivisibler kom att spela en betydande roll i matematikens utveckling från grekernas dubbla motsägelsebevis till Leibniz infinitesimaler. Han fick dock stark kritik från vissa av sina samtida matematiker vilket jag också kommer att beröra. Med infinitesimalernas och integralkalkylens framgångar förpassades emellertid läran om indivisibler till marginalen men enligt mig finns det ändå tillfällen då den är användbar än idag vilket jag redogör för i slutet av uppsatsen.

Innehållsförteckning

1. Material

Nedan följer en redogörelse för de böcker vilka använts som källor till uppsatsen samt kommentarer om vad varje bok använts till.

Andresen, Kirsti, Cavalieri's Method Of Indivisibles

Andresens avhandling förklarar Cavalieris metod för indivisibler på ett lättbegripligt sätt till skillnad från Cavalieri själv och jag har använt den huvudsakligen till avsnitt 3 och 4 men även som komplement till avsnitt 2 och 5.

Mancosu, Paolo, Philosophy Of Mathematics And Mathematical Practice In The Seventeenth Century

Mancosus bok beskriver, med delvis hjälp av Andresens avhandling, Cavalieris metod för indivsibler men fokuserar främst på den matematiska och filosofiska kontexten som Cavalieri verkade i och jag har använt den främst till avsnitt 2 och 5 men även som komplement till avsnitt 3 och 4.

Katz, Victor J., History Of Mathematics: Pearson New International Edition, 3rd ed.

Katz stora bok berör matematikhistoria från år 3 000 f.Kr. till 1900-talet och nämner endast Cavalieri mycket kort. Jag har emellertid använt denna bok som komplement till avsnitt 2 samt till beviset för volymen av en sfär i avsnitt 4.

Joyce, David E., Euclid's Elements, https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/

Detta är en engelsk webbversion av Euklides Elementa och jag har använt den till att förstå vissa av Cavalieris bevis där det hänvisas till definitioner och propositioner i Elementa bok V.

2. Inledning

Om Cavalieri

Bonaventura Cavalieri föddes 1598 i Milano och var en italiensk matematiker och Jesuatibroder som från år 1629 till sin död 1647 innehade en professur i matematik vid universitet i Bologna. Cavalieri korresponderade med Galileo Galilei och skrev under sitt liv flera matematiska verk bland annat inom astronomi och optik. Det verk som gjort honom mest känd är dock *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Geometri framlagt på ett nytt sätt med kontinuumens indivisibler, i kortform kallad *Geometria*) i vilken Cavalieri introducerar sina metoder för indivisibler och utför area- och volymberäkningar med hjälp av dem. *Geometria* är ett stort och komplicerat verk på omkring 700 sidor och om vilket den franske 1800-tals matematikhistorikern Maximilien Marie sade att om det fanns ett pris för den mest oläsbara boken så borde det ges till Cavalieri för *Geometria*. Det är om dessa indivisibler och kalkyler som min uppsats kommer att redogöra för.

Bakgrund

I 1600-talets Europa levde de grekiska matematikernas idéer kvar, inte minst inom geometrin. För att förstå Cavalieris metod måste vi därför först förstå i vilken kontext den växte fram. När antikens matematiker skulle bestämma arean eller volymen av en figur, F_1, gjorde man det genom att jämföra den med en figur, F_2, vars area eller volym redan var känd och försökte få fram ett förhållande dem emellan, $F_1 : F_2$. Förhållandet bevisades sedan med hjälp utav uttömningsprincipen och dubbla motsägelsebevis. Med andra ord, om till exempel figurernas areor, A_{F_1} och A_{F_2} förhöll sig till varandra på så vis att $k_1 A_{F_1} = k_2 A_{F_2}$, där $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ så bevisade grekerna att detta var sant genom att visa att $k_1 A_{F_1} \not< k_2 A_{F_2}$ och att $k_1 A_{F_1} \not> k_2 A_{F_2}$ och således måste likheten gälla. Dessa typer av bevis kom under 1600-talet att möta stark kritik och det utav flera anledningar. Dels för att de inte redogjorde för hur man hade kommit fram till förhållandet som prövades och dels för att motsägelsebevis, såväl enkla som dubbla, ifrågasattes av flera matematiker och naturfilosofer huruvida de var vetenskapligt korrekta eller inte. Detta ifrågasättande var en del i en större debatt kring vad som är vetenskap, aristotelisk vetenskap, och huruvida matematiken kunde klassas som en sådan.

För att något ska vara aristoteliskt vetenskapligt krävs att man förvärvar kunskaperna om det genom orsakerna/förklaringarna till varför saken är som den är. Så om till exempel ett geometriskt bevis rörande en viss figur skulle anses aristoteliskt vetenskapligt behövde det beviset härledas från orsaker inneboende hos figuren. De flesta av samtidens tänkare ansåg att direkta matematiska bevis uppfyllde dessa krav medan motsägelsebevis inte ansågs göra det, åtminstone inte lika väl. Det man således önskade finna inom matematiken på 1600-talet var en metod som både hittade en lösning till de geometriska problemen samt bevisade dem på ett direkt sätt utan motsägelsebevis och det var detta Cavalieri ville åstadkomma med sin metod för indivisibler. Idéer kring indivisibler (odelbara segment av linjer, ytor eller kroppar) hade förekommit tidigare i olika former även så tidigt som hos de klassiska grekerna. Arkimedes hävstångsmetod inom geometrin var en sådan men denna var inte känd i Europa under 1600-talet och Arkimedes själv ansåg inte att den dög som bevismetod utan var endast ett sätt för honom att komma fram till lösningar som sedan visades med uttömningsprincipen och dubbla motsägelsebevis. Mer samtida matematiker, som Kepler och Galileo, hade också metoder som innefattade indivisibelliknande grepp men det var Cavalieri som var den förste som gav sig in på att försöka utforma en mer rigorös teori kring indivisibler.

En likhet mellan Cavalieris metod för indivisibler och grekernas metod med uttömningsprincipen och dubbla motsägelsebevis är, som vi kommer att se, att båda metoderna använder sig av jämförelser mellan figurer. Innan vi går in på Cavalieris metod kan det således vara på sin plats att säga något om den proportionalitetslära som existerade under denna tid, nämligen den av Eudoxos och som återfinns i Elementa bok V.

För två givna element, A och B, tillhörande samma storhet (tal, sträckor, ytor eller rum) gäller följande:

1. *A och B förhåller sig till varandra på ett och endast ett av följande sätt. Antingen är $A < B$, $A = B$ eller så är $A > B$.*
2. *A och B kan bli adderade till varandra och resultatet, $A + B$, tillhör samma storhet som A och B.*
3. *Om $A > B$ så kan B bli subtraherat från A så att resultatet, $A - B$, tillhör samma storhet som A och B.*
4. *A och B kan bilda ett förhållande till varandra, A:B.*

Även definition 5 från Elementa bok V är av intresse och den lyder som följer:

Två givna element, A och B, tillhörande samma storhet och två givna element, C och D, tillhörande samma storhet (men ej nödvändigtvis samma storhet som A och B) sägs ha lika förhållanden till varandra, $A:B = C:D$, om:

1. $A + A + \cdots + A = n_1 * A > B + B + \cdots + B = m_1 * B \Rightarrow$
   $C + C + \cdots + C = n_1 * C > D + D + \cdots + D = m_1 * D$
2. $n_2 * A = m_2 * B \Rightarrow n_2 * C = m_2 * D$
3. $n_3 * A < m_3 * B \Rightarrow n_3 * C < m_3 * D$

där $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

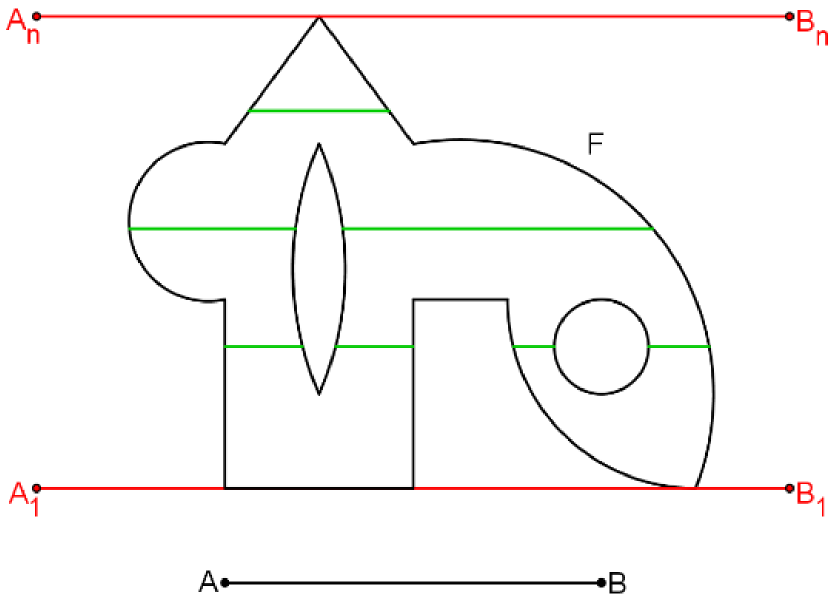
Anledningen till att grekerna använde sig av jämförelser inom geometrin var på grund av det så kallade inkommensurabilitetsproblemet, som fick aritmetiken och geometrin att gå skilda vägar och Cavalieri fortsatte på den vägen även om han i andra avseende skulle komma med förnyelse. Det Cavalieri kom att göra var nämligen att instifta en ny storhet, mängden av alla indivisibler tillhörande en figur, och tillämpa Eudoxos proportionalitetslagar på dem och på så vis förena de nyskapande idéerna om indivisibler med de erkända räknelagarna i Elementa i ett försök att göra metoden mindre kontroversiell. Cavalieri fick dock under sin levnadstid motta mycket kritik för sina metoder för indivisibler från samtida matematiker och filosofer, i synnerhet ifrån den schweiziske matematikern Paul Guldin. Jag kommer att återkomma till denna kritik i avsnitt 5 och istället börja med att presentera Cavalieris metod för indivisibler oemotsagd med endast en del invändningar i några av mina anmärkningar.

3. Cavalieris indivisibler

Definition

Cavalieri definierade sina indivisibler på följande vis för plana figurer:

Givet en sluten, plan figur, F. *Låt* AB *vara en riktning, regula, i samma plan som* F *som anger vilken riktning linjerna, indivisiblerna, ska ha. Dra de två tangenterna,* A_1B_1 *och* A_nB_n, *till figuren som är parallella med regulan och bilda två parallella plan som skär genom tangenterna och som antingen är vinkelräta mot figurens plan, recti transitus, eller sneda, obliqui transitus, och låt det ena planet vandra mot det andra planet genom figuren. På så vis bildas skärningslinjer mellan det vandrande planet och figuren. Dessa linjer kallas indivisibler.*



Figur 1. En godtycklig figur F *(i svart) med regulan* AB, *tangenterna* A_1B_1 *och* A_nB_n *och exempel på några indivisibler (i grönt).*

I fallet då figuren är en kropp istället för en plan figur används en liknande definition med skärningsplan som indivisibler istället för skärningslinjer.

Anmärkningar:

1. Indivisibler kan vara uppdelade i flera segment, likt de två nedre indivisiblerna i figur 1, som är uppdelade i fyra respektive två segment. Oavsett antalet segment är de dock en och samma indivisibel.

2. Cavalieri använde sig av en annan definition för tangenter än vad vi gör idag. Med tangent åsyftar Cavalieri en linje som möter en kurva i en punkt eller längs med en linje och som endast har kurvan om ena sidan på sig. Vilket innebär att en kurva har två och endast två tangenter med en given lutning, likt tangenterna A_1B_1 och A_nB_n i figur 1. Varför Cavalieri använder sig av en sådan definition av tangenter är uppenbart då det ger en tydlig start- och slutpunkt för det vandrande planet och inkluderar punkter så som baser och hörn på polygoner, vilket är nödvändigt för hans definition av indivisibler.

3. I de allra flesta fall använder sig Cavalieri av *recti transitus* och alla exempel som jag kommer att behandla kommer också att vara *recti transitus*. I enstaka fall använder sig dock Cavalieri istället av *obliqui transitus* och det är på grund av dessa undantag som han har vandrande plan istället för vandrande linjer.

Räknelagar med tillhörande bevis

För att beräkna arean eller volymen av en figur jämförde Cavalieri, likt grekerna, den givna figuren med en figur vars area eller volym redan var känd. Till skillnad från dem jämförde han dock inte areorna eller volymerna direkt med varandra utan tittade istället på mängderna av indivisibler hos figurerna med hänsyn till en och samma *regula* och anslog följande två propositioner:

1. $A_{F_1}\!:A_{F_2} = O_{F_1}(l)_{AB}\!:O_{F_2}(l)_{AB}$

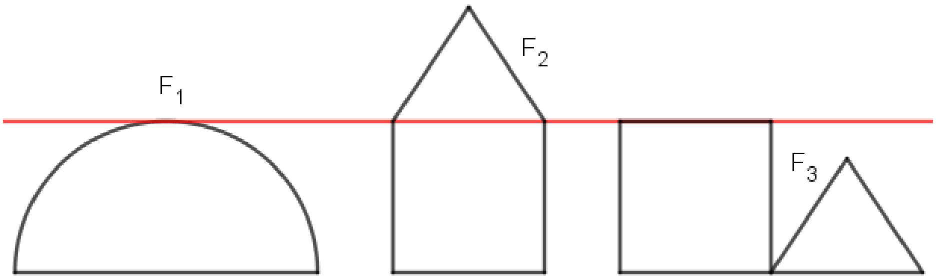
Givet två figurer, F_1 och F_2, med areorna A_{F_1} och A_{F_2} så förehåller sig A_{F_1} till A_{F_2} på samma sätt som alla (O som i omnes) indivisibler, alla linjer (l), i F_1 förhåller sig till alla indivisibler, alla linjer, i F_2 med hänsyn till regulan AB.

2. $V_{F_1}\!:V_{F_2} = O_{F_1}(p)_{AB}\!:O_{F_2}(p)_{AB}$

Givet två figurer, F_1 och F_2, med volymerna V_{F_1} och V_{F_2} så förehåller sig V_{F_1} till V_{F_2} på samma sätt som alla (O som i omnes) indivisibler, alla plan (p), i F_1 förhåller sig till alla indivisibler, alla plan, i F_2 med hänsyn till regulan AB.

För att förstå detta måste vi veta vad som menas med ett förhållande mellan två mängder av indivisibler. Cavalieri såg sådana mängder som en egen storhet, likt tal, sträckor, ytor och rum, för vilka Eudoxos proportionalitetslagar 1-3 förutsattes gälla. Att den fjärde lagen, den om existens av ett förhållande mellan två element tillhörande samma storhet, var sann för indivisibler ansåg sig dock Cavalieri vara tvungen att bevisa vilket han gjorde på följande sätt för plana figurer:

Bevis för att förhållanden mellan indivisibler existerar



Figur 2. Två godtyckliga figurer, F_1 och F_2, med höjderna $h_{F_1} < h_{F_2}$ samt figuren $F_3 \equiv F_{2_1} + F_{2_2}$, med $h_{F_3} = h_{F_1}$.

Givet två plana figurer, F_1 och F_2, med indivisiblerna $O_{F_1}(l)_{AB}$ och $O_{F_2}(l)_{AB}$.
Låt $O_{F_1}(l)_{AB} < O_{F_2}(l)_{AB}$.
För att ett förhållande $O_{F_1}(l)_{AB}: O_{F_2}(l)_{AB}$ ska existera måste $O_{F_1}(l)_{AB}$ kunna förlängas så att $O_{F_1}(l)_{AB} + O_{F_1}(l)_{AB} + \cdots + O_{F_1}(l)_{AB} = k * O_{F_1}(l)_{AB} > O_{F_2}(l)_{AB}$ där $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Om F_1 och F_2 har samma höjd, $h_{F_1} = h_{F_2} = h$, kan ett sådant k hittas genom att jämföra indivisiblen l_{1_x} i figur F_1 med indivisiblen l_{2_x} i figur F_2 på samma avstånd $x \in [0, h]$ ifrån basen, tillika *regulan*, AB. k är då ett naturligt tal sådant att $k * |l_{1_x}| > |l_{2_x}| \ \forall \ x \in [0, h]$, där $|l_{1_x}|$ och $|l_{2_x}|$ är längderna av indivisiblerna.

Om däremot F_1 och F_2 har olika höjd, säg $h_{F_1} < h_{F_2}$, kan figur F_2 delas upp i två eller flera figurer, $F_{2_1}, F_{2_2}, \dots, F_{2_n}$, med höjderna, $h_{F_{2_1}}, h_{F_{2_2}}, \dots, h_{F_{2_n}}$, sådana att:
$h_{F_1} = h_{F_{2_1}} = h_{F_{2_2}} \dots = h_{F_{2_{n-1}}}$ och $h_{F_1} \geq h_{F_{2_n}}$.

Genom att placera figurerna $F_{2_1}, F_{2_2}, \dots, F_{2_n}$ efter varandra kan en ny figur, F_3, bildas.
$F_3 \equiv F_{2_1} + F_{2_2} \dots + F_{2_n} \equiv F_2$ och vars höjd $h_{F_3} = h_{F_1}$.

På så vis kan ett k hittas på samma sätt som i fallet med $h_{F_1} = h_{F_2}$.

Q.E.D.

Anmärkning:

4. Detta bevis bygger på att Eudoxos proportionalitetslagar 1-3 gäller för indivisibler samt att:

i) $F_3 \equiv F_2 \Rightarrow O_{F_3}(l)_{AB} = O_{F_2}(l)_{AB}$

och

ii) $F_3 \equiv F_{2_1} + F_{2_2} \dots + F_{2_n} \Rightarrow O_{F_3}(l)_{AB} = O_{F_{2_1}}(l)_{AB} + O_{F_{2_2}}(l)_{AB} \dots + O_{F_{2_n}}(l)_{AB}$, vilka Cavalieri också tog för givet.

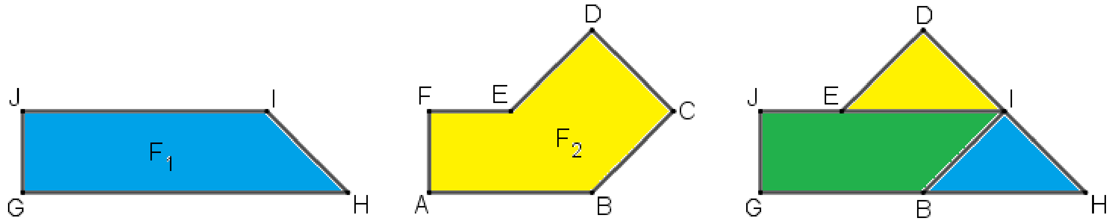
För att bevisa propositionerna 1 och 2 räcker det dock inte med det som nämnts i anmärkningen ovan utan för det så behövde Cavalieri även följande formler:

iii) $A_{F_1} = A_{F_2} \Rightarrow O_{F_1}(l)_{AB} = O_{F_2}(l)_{AB}$

iv) $A_{F_1} > A_{F_2} \Rightarrow O_{F_1}(l)_{AB} > O_{F_2}(l)_{AB}$

För den första av dessa formler, iii), gav Cavalieri följande bevis:

Bevis för att: $\boldsymbol{A_{F_1} = A_{F_2} \Rightarrow O_{F_1}(l)_{AB} = O_{F_2}(l)_{AB}}$



Figur 3. Två godtyckliga figurer, $F_1 \equiv GHIJ$ och $F_2 \equiv ABCDEF$, var för sig samt första steget i att täcka F_1 med F_2, där $F_{3_1} \equiv F_{2_1} \equiv F_{1_1} \equiv GBIJ$, $F'_{1_1} \equiv BHI$ och $F'_{2_1} \equiv EID$.

Givet två figurer, F_1 och F_2, med lika stora areor, $A_{F_1} = A_{F_2}$.
Placera den ena figuren, säg F_2, ovanpå den andra F_1.
F_1 och F_2 får då en gemensam, överlappande area, $A_{F_{3_1}} \leq A_{F_1}$.
Det Cavalieri sedan gör, om $A_{F_{3_1}} < A_{F_1}$, är att han delar upp F_1 och F_2 i två delar vardera, F_{1_1} och F'_{1_1} respektive F_{2_1} och F'_{2_1}, där $F_{1_1} \equiv F_{2_1} \equiv F_{3_1}$och F'_{1_1}och F'_{2_1} är de delar av F_1 och F_2 som inte överlappar varandra.
F'_{2_1} flyttas sedan så att den hamnar ovanpå F'_{1_1} men utanför F_{1_1}.
F'_{1_1} och F'_{2_1} får på så vis en gemensam, överlappande area, $A_{F_{3_2}} \leq A_{F'_{1_1}}$
Om $A_{F_{3_2}} < A_{F'_{1_1}}$så delas F'_{1_1} och F'_{2_1} upp i två delar vardera, F_{1_2} och F'_{1_2} respektive F_{2_2} och F'_{2_2}, där $F_{1_2} \equiv F_{2_2} \equiv F_{3_2}$och F'_{1_2}och F'_{2_2} är de delar av F'_{1_1} och F'_{2_1} som inte överlappar varandra.
Proceduren, som beskrivs ovan, upprepas sedan om och om igen tills det att $A_{F_{3_n}} = A_{F'_{1_{n-1}}}$och delarna av F_2 helt täcker F_1.
Låt figurerna $F_{3_1}, F_{3_2}, \ldots, F_{3_n}$, som alla är delar från figur F_2 tillsammans bilda figuren F_3.
Således är $F_2 \equiv F_{3_1} + F_{3_2} + \cdots + F_{3_n} \equiv F_3 \equiv F_1 \Rightarrow O_{F_2}(l)_{AB} = O_{F_1}(l)_{AB}$

Q.E.D.

Anmärkning:

5. Cavalieri insåg själv senare att det här beviset inte var helt problemfritt vilket jag kommer att återkomma till i avsnitt 5.

Vad gäller den andra formeln iv) så gav Cavalieri aldrig ett bevis för den men det är tänkbart att han resonerade ungefär så här:

Bevis för att: $\boldsymbol{A_{F_1} > A_{F_2} \Rightarrow O_{F_1}(l)_{AB} > O_{F_2}(l)_{AB}}$
Låt F_1 och F_2 vara två figurer där $A_{F_1} < A_{F_2}$
Då måste det finnas två figurer F_3 och F_4 sådana att $F_1 \equiv F_3$ och $F_2 \equiv F_3 + F_4$
Vilket medför att: $O_{F_2}(l)_{AB} = O_{F_3}(l)_{AB} + O_{F_4}(l)_{AB} = O_{F_1}(l)_{AB} + O_{F_4}(l)_{AB} > O_{F_1}(l)_{AB}$

Q.E.D.

Med formlerna i)-iv) bevisade Cavalieri proposition 1 i enlighet med definition 5 från Elementa bok V.

Bevis för proposition 1
Givet två figur, F_1 och F_2, med areorna, A_{F_1}och A_{F_2}.
Bilda figurerna, F_3 och F_4, med areorna, A_{F_3}och A_{F_4}, genom att sätta samman flera figurer, identiska med F_1 respektive F_2 , så att:
$F_3 \equiv F_1 + F_1 + \cdots + F_1 \equiv n * F_1$
och
$F_4 \equiv F_2 + F_2 + \cdots + F_2 \equiv m * F_2$,
där $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Vilket medför, enligt formel ii) att:
$O_{F_3}(l)_{AB} = O_{F_1}(l)_{AB} + O_{F_1}(l)_{AB} + \cdots + O_{F_1}(l)_{AB} = n * O_{F_1}(l)_{AB}$
och
$O_{F_4}(l)_{AB} = O_{F_2}(l)_{AB} + O_{F_2}(l)_{AB} + \cdots + O_{F_2}(l)_{AB} = m * O_{F_3}(l)_{AB}$
Areorna, A_{F_3}och A_{F_4}, måste enligt Eudoxos proportionalitetslag nummer 1, förhålla sig till varandra på ett utav följande tre sätt: $A_{F_3} < A_{F_4}$,$A_{F_3} = A_{F_4}$ eller $A_{F_3} > A_{F_4}$.

1. Om $A_{F_3} = n * A_{F_1}$är mindre än $A_{F_4} = m * A_{F_2}$ så medför det enligt formel iv) att: $O_{F_3}(l)_{AB} = n * O_{F_1}(l)_{AB}$ är mindre än $O_{F_4}(l)_{AB} = n * O_{F_2}(l)_{AB}$.
2. Om $A_{F_3} = n * A_{F_1}$ är lika med $A_{F_4} = m * A_{F_2}$ så medför det enligt formel iii) att: $O_{F_3}(l)_{AB} = n * O_{F_1}(l)_{AB}$ är lika med $O_{F_4}(l)_{AB} = n * O_{F_2}(l)_{AB}$.
3. Om $A_{F_3} = n * A_{F_1}$är större än $A_{F_4} = m * A_{F_2}$ så medför det enligt formel iv) att: $O_{F_3}(l)_{AB} = n * O_{F_1}(l)_{AB}$ är större än $O_{F_4}(l)_{AB} = n * O_{F_2}(l)_{AB}$.

Q.E.D.

Anmärkning:

6. Alla ovangjorda bevis har gjorts för indivisibla linjer, (l), men liknande resonemang kan föras för indivisibla plan, (p).

Proposition 1 och 2 utgör grunden för Cavalieris lära om indivisibler och det var dessa han främst använde sig av i sina area- och volymberäkningar i *Geometria*. I bok VII av *Geometria* introducerar dock Cavalieri ytterligare ett tillvägagångssätt för sina indivisibler, nämligen det som oftast kallas för Cavalieiris princip, där han endast jämför figurer av samma höjd och istället för att titta på mängden av alla linjer eller plan till figurerna tittar han på indivisiblerna parvis.

Cavalieris princip
Givet två figurer, F_1 och F_2, med lika höjd, h, och vars indivisibler l_{1_x} och l_{2_x} (alternativt p_{1_x} och p_{2_x}), på lika avstånd, $x \in [0, h]$, ifrån basen, tillika regulan, AB, förhåller sig till varandra på samma sätt, oavsett avståndet, så kommer figurernas areor (eller volymer) också att förhålla sig till varandra på samma sätt.

Med andra ord:

Om $l_{1_x}: l_{2_x} = m: n \; \forall \; x \in [0, h]$, där $m, n \in \mathbb{R}$ så medför det att:
$O_{F_1}(l)_{AB}: O_{F_2}(l)_{AB} = m: n \Rightarrow A_{F_1}: A_{F_2} = m: n$

Denna princip tillkom för att bemöta eventuell kritik, som vi kommer att återkomma till. Den bygger dock på samma grund som de tidigare propositionerna och även om Cavalieri gillade sin nya princip och använde den mycket slutade han aldrig helt att använda de tidigare propositionerna.

Nedan, i avsnitt 4, följer några räkneexempel, teorem och bevis för area- och volymformler.

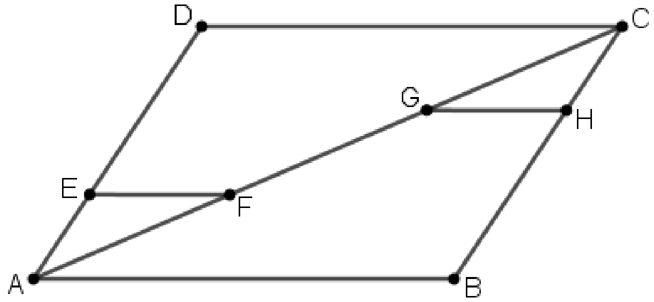
4. Teorem och bevis för några area- och volymformler

Som berördes inledningsvis var Cavalieri inte främst ute efter att bevisa nya area- och volymformler utan han sökte efter en direkt metod att bevisa så väl redan kända formler som nya och oprövade. Flera av hans inledande teorem och bevis för dem är således inte så imponerande resultatmässigt men intressanta att studera ur metodsynpunkt. Till exempel:

Teorem II.19 (från *Geometria*)
Givet en parallellogram, $ABCD$, med diagonalen, AC, och trianglarna, ADC och CBA.
Då gäller följande:

$A_{ABCD} = 2 * A_{ABC} = 2 * A_{CDA}$

Bevis för teorem II.19



Figur 4. Ett parallellogram, $ABCD$, med en diagonal, AC, och två indivisibler, EF och GH, där $|AE| = |CH|$.

Låt $ABCD$ vara en godtycklig parallellogram
med diagonalen, AC, och trianglarna, ADC och CBA.
Dra en godtycklig indivisibel $EF \in O_{ADC}(l)_{AB}$
och para ihop den med indivisibeln $GH \in O_{CBA}(l)_{AB}$, där $|CH| = |AE|$.
Enligt Elementa I.26 är då trianglarna AEF och CHG kongruenta
vilket medför att $|EF| = |GH|$.
Då EF var godtyckligt vald innebär det att alla indivsibler tillhörande $O_{ADC}(l)_{AB}$
kan paras ihop med en lika stor indivisibel tillhörande $O_{CBA}(l)_{AB}$ och således är:

$$O_{ADC}(l)_{AB} = O_{CBA}(l)_{AB} \Rightarrow A_{ADC} = A_{CBA} \Rightarrow$$

$$A_{ABCD} = 2 * A_{ABC} = 2 * A_{CDA}$$

Q.E.D.

Cavalieri beräknade många formler för parallellogram och använde sig i flera utav fallen av indivisibla kvadratiska plan. Detta innebar att varje indivisibel (l) fick en kvadrat ($\Box l$) ortogonal mot figuren. Vilket till exempel är fallet i följande formler:

Teorem II.11 (från *Geometria*)
Givet två parallellogram, P_1 och P_2, med baserna, b_1 och b_2, samt höjderna h_1 och h_2.
Då gäller följande:

$$O_{P_1}(\Box l)_{AB} : O_{P_2}(\Box l)_{AB} = \Box b_1 : \Box b_2 \text{ , då } h_1 = h_2$$

$$O_{P_1}(\Box l)_{AB} : O_{P_2}(\Box l)_{AB} = h_1 : h_2 \text{ , då } b_1 = b_2$$

, där *regulan* AB är parallell med baserna.

Vilket medför att:

$$O_{P_1}(\Box l)_{AB} : O_{P_2}(\Box l)_{AB} = (\Box b_1 : \Box b_2) * (h_1 : h_2) \text{ (Teorem II.11)}$$

Teorem II.22 (från *Geometria*)
Givet två parallellogram, $A_1B_1C_1D_1$ och $A_2B_2C_2D_2$, med diagonalerna, A_1C_1 och A_2C_2, och trianglarna, $A_1B_1C_1$ och $C_1D_1A_1$ respektive $A_2B_2C_2$ och $C_2D_2A_2$.
Då gäller följande:

$$O_{A_1B_1C_1D_1}(\square l)_{AB}:O_{A_1B_1C_1}(\square l)_{AB} = O_{A_2B_2C_2D_2}(\square l)_{AB}:O_{A_2B_2C_2}(\square l)_{AB} \text{ ,}$$

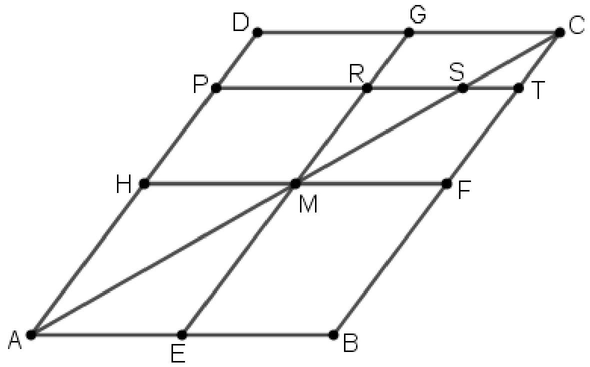
där *regulan* AB är parallell med A_1B_1 och A_2B_2.

Dessa teorem, II.11 och II.22, använde Cavalieri för att bevisa det mer intressanta teoremet II.24.

Teorem II.24 (från *Geometria*)
Givet en parallellogram, $ABCD$, med diagonalen, AC och trianglarna, ABC och CDA.
Då gäller följande:

$$O_{ABCD}(\square l)_{AB} = 3 * O_{ABC}(\square l)_{AB} = 3 * O_{CDA}(\square l)_{AB}$$

Bevis för teorem II.24



Figur 5. En parallellogram, $ABCD$, med diagonalen, AC, mittpunkten, M, mittpunkterna, E, F, G och H på sträckorna AB, BC, CD respektive DA samt den godtyckliga indivisibeln, PT, med skärningspunkterna, R och S, till sträckorna EF respektive AC.

Låt $ABCD$ vara en godtycklig parallellogram
med diagonalen, AC, och trianglarna, ABC och CDA.
Låt M vara parallellogrammets mittpunkt och punkterna E, F, G och H vara mittpunkterna på sträckorna AB, BC, CD respektive DA.
Dra sträckorna EF och FH samt en godycklig indivisibel, PT, parallel med *regulan*, tillika basen, AB.
Låt R och S vara skärningspunkterna mellan PT och EF respektive PT och AC.

$|PS|^2 = (|PR| + |RS|)^2 = |PR|^2 + |RS|^2 + 2|PR||RS|$
$|ST|^2 = (|RT| - |RS|)^2 = (|PR| - |RS|)^2 = |PR|^2 + |RS|^2 - 2|PR||RS| \Rightarrow$

$|PS|^2 + |ST|^2 = 2|PR|^2 + 2|RS|^2 \Leftrightarrow \square PS + \square ST = 2 * \square PR + 2 * \square RS \Rightarrow$

$O_{CDA}(\square l)_{AB} + O_{ABC}(\square l)_{AB} = 2 * O_{AEGD}(\square l)_{AB} + 2 * (O_{CGM}(\square l)_{AB} + O_{AEM}(\square l)_{AB}) \Rightarrow$

$2 * O_{ABC}(\square l)_{AB} = 2 * O_{AEGD}(\square l)_{AB} + 4 * O_{AEM}(\square l)_{AB} \Rightarrow$

$O_{ABC}(\square l)_{AB} = O_{AEGD}(\square l)_{AB} + 2 * O_{AEM}(\square l)_{AB}$

Enligt teorem II.11 så är:

$O_{ABCD}(\square l)_{AB}: O_{AEGD}(\square l)_{AB} = \square AB: \square AE = |AB|^2: \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = 4:1$

och

$O_{ABCD}(l)_{AB}: O_{AEMH}(l)_{AB} = (\square AB: \square AE) * (h_{ABCD}: h_{AEMH}) =$

$\left(|AB|^2: \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2\right) * \left(h_{ABCD}: \frac{h_{ABCD}}{2}\right) = (4:1) * (2:1) = 8:1$

Enligt teorem II.22 så är:

$O_{AEMH}(\square l)_{AB}: O_{AEM}(\square l)_{AB} = O_{ABCD}(\square l)_{AB}: O_{ABC}(\square l)_{AB} \Rightarrow$

$O_{ABC}(\square l)_{AB}: O_{AEM}(\square l)_{AB} = O_{ABCD}(\square l)_{AB}: O_{AEMH}(\square l)_{AB} = 8:1$

Således är:

$O_{ABC}(\square l)_{AB} = O_{AEGD}(\square l)_{AB} + 2 * O_{AEM}(l)_{AB} = \frac{1}{4} * O_{ABCD}(\square l)_{AB} + 2 * \frac{1}{8} * O_{ABC}(\square l)_{AB} \Rightarrow$

$\frac{3}{4} * O_{ABC}(l)_{AB} = \frac{1}{4} * O_{ABCD}(l)_{AB} \Rightarrow 3 * O_{ABC}(l)_{AB} = O_{ABCD}(l)_{AB}$

Q.E.D.

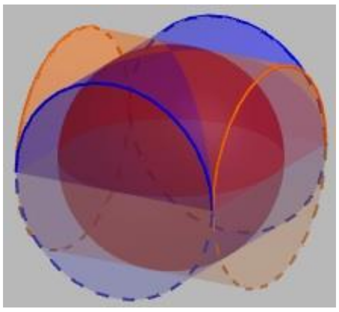
Teorem II.24 leder fram till flera intressanta resultat. Bland annat att volymen av en pyramid är lika med en tredjedel av den omskrivna prismans volym.

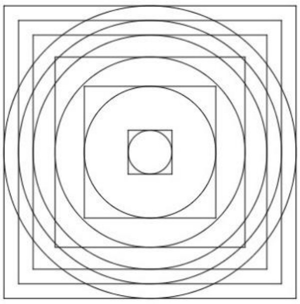
Nedan följer ytterligare ett bevis för en volymformel, nämligen volymen av en sfär. Detta bevis är dock inte ett av Cavalieris egna utan kommer ifrån den kinesiska matematikern Zu Geng som levde runt år 500 e.Kr.. Hans lösning går emellertid att bevisa med hjälp av indivisibler och Cavalieris princip.

Bevis för volymen av en sfär med hjälp av indivisibler

Givet att vi vet att en cirkel har arean $A_C = \pi r^2$ så kan vi beräkna att förhållandet mellan den och arean av en omskriven kvadrat, $A_k = (2r)^2 = 4r^2$, är $A_K : A_C = 4 : \pi$.
På samma sätt förhåller sig volymen av en bicylinder, V_B, skärningskroppen mellan två ortogonala cylindrar, till volymen av en inskriven sfär, V_S, som $4 : \pi$. Då, alla indivisbler av en sådan figur består utav kvadratiska plan omskrivna kring cirklar.

$p_{B_x} : p_{S_x} = 4 : \pi \ \forall \ x \in [0{,}2r]$ vilket enligt Cavalieris princip medför att:
$O_B(p)_{AB} : O_S(p)_{AB} = 4 : \pi \Rightarrow V_B : V_S = 4 : \pi$



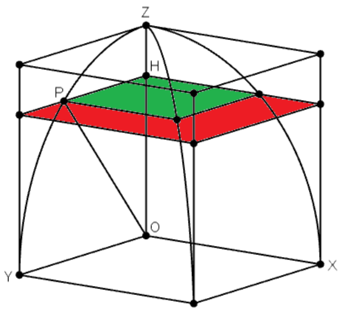


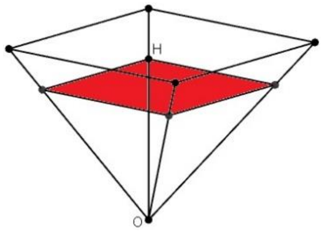
Figur 6. Två ortogonala cylindrar (i blått och orange) med en inskriven sfär och vars skärningskropp bildar en bicylinder.
Figur 7. Indivisibla kvadratiska plan av en bicylinder omskrivna kring indivisibla cirkulära plan av en inskriven sfär till bicylindern.

För att beräkna volymen av en sfär kan man alltså beräkna volymen av en omskriven bicylinder och sedan multiplicera den arean med $\pi/4$. Med andra ord: $V_S = V_B * \pi/4$.

Vi studerar en oktant av en bicylinder, B, inskriven i en kub, K, i ett tredimensionellt koordinatsystem med bicylinderns mittpunkt i origo, O. Låt en godtycklig indivisibel av kuben, p_{K_h}, parallell med basen, skära z-axeln i punkten, H, och y-axeln och bicylinderns periferi i punkten, P. Då, fås att arean av indivisibeln till kuben, $A_{p_{K_h}} = r^2$, och arean utav indivisibeln till en åttondelen av bicylindern,

$A_{p_{B_{\frac{1}{8}h}}} = |HP|^2 = |OP|^2 - |OH|^2 = r^2 - |OH|^2$,
vilket medför att differensen $A_{p_{K_h}} - A_{p_{B_{\frac{1}{8}h}}} = r^2 - (r^2 - |OH|^2) = |OH|^2$.





Figur 8. En åttondel av en bicylinder omskriven av en kub i ett koordinatsystem.
Figur 9. En uppochnervänd pyramid med kvadratisk bas och vertex i origo.

$|OH|^2$ är också arean utav en indivisibel, p_{P_h}, på samma höjd, h, till en uppochnervänd pyramid med vertex i origo och den kvadratiska basarean, r^2.

Således är: $A_{p_{B\frac{1}{8}h}} = A_{p_{K_h}} - A_{p_{P_h}} \forall\, h \in [0, r]$

Vilket enligt Cavalieris princip medför att:

$$O_{B\frac{1}{8}}(p)_{AB} = O_K(p)_{AB} - O_P(p)_{AB} \Rightarrow$$

$$V_{B\frac{1}{8}} = V_K - V_P = r^3 - \frac{r^3}{3} = \frac{2r^3}{3} \Rightarrow$$

$$V_B = 8 * V_{B\frac{1}{8}} = \frac{16r^3}{3}$$

Och då $V_B : V_S = 4 : \pi$ medför det att:

$$V_S = V_B * \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Q.E.D.

5. Samtida kritik och respons

Cavalieri var medveten om att han skulle kunna få kritik för sin banbrytande metod för indivisibler och det var alltså på grund av denna farhåga som han också la fram en modifierad metod för dem redan i bok VII av *Geometria*. Cavalieri hoppades att den modiefierade versionen skulle få Galileo att ställa sig bakom honom men Galileo förblev förhållandevis tyst om Cavalieris indivisibler. I den mån Galileo alls uttryckte något var det snarare en skepsis för dem än ett gillande. Den största kritikern mot Cavalieri var emellertid den schweiziske matematikern Paul Guldin som höll fast vid mer av den klassiska grekiska matematiken. Guldin attackerade Cavalieri på flera punkter och jag kommer härefter att nämna tre av dem.

1. För det första anklagade Guldin Cavalieri för att ha plagierat sin metod för indivisibler från Johannes Kepler. Kepler hade helt riktigt presenterat arbeten med indivisibler, i bland annat *Stereometria Doliorum*, men dessa skiljde sig klart från Cavalieris på åtminstone två sätt:

    a. Keplers indivisibler hade infinitesimala areor eller volymer medan Cavalieries indivisibler var linjer eller plan med längder respektive areor. Keplers och Cavalieris indivisibler var alltså av olika dimensioner.

    b. I sin metod använde sig Cavalieri av jämförelser mellan figurer och mängder av indivisibler vilket Kepler inte gjorde.

    Guldins plagiatanklagelser får således ses som felaktiga.

2. Guldins andra invändning var tyngre och riktade sig mot ”alla linjer”-konceptet och han ifrågasatte vad Cavalieri menade med storheten av alla linjer, indivisibler, som tillhör en figur och han ansåg att det fanns två möjliga svar på det. Antingen syftade Cavalieri på området inom figuren som det vandrande planet passerade igenom eller så syftade han på summan av längderna hos alla oändligt många indivisibler. I det första fallet var i så fall ”alla linjer” detsamma som figuren själv och i det andra så skulle summorna, oavsett figurer, bli oändliga och således ojämförbara enligt Guldin. Denna kritik kan

kopplas samman med frågan om huruvida en linje kan byggas upp av bara punkter, en area av linjer eller en volym av plan eller om de inte kan det. En filosofisk debatt som härrörde ända från Aristoteles dagar och som under indivisiblernas framväxt på 1600-talet åter fick nytt liv. Guldin var av den bestämda åsikten att en area inte kan byggas upp av linjer medan Cavalieri inte yttrade sig öppet i frågan utan försvarade sina indivisibler ur bägge perspektiven. Cavalieri framhöll att om en area kan byggas upp av bara linjer skulle storheten av de linjerna, mängden av alla indivisibler, vara densamma som storheten av figuren själv och således ekvivalenta. Om däremot en area inte kan byggas upp av bara linjer ryms de delar av arean som inte beskrivs av linjerna i vandringen av tangentplanet från den ena tangenten till den andra. De indivisibler som därmed är en del av arean kan då mätas i längd. Den uppmätta längden blir dock inte som en oändlig summa av längder utan som var och en av indivisiblernas längd för sig på sin givna position, begränsad på samma sätt som den givna figuren.

3. Den tredje kritiken från Guldin påminner om den just nämnda men är mindre filosofiskt laddad och var den som Cavalieri redan själv anat att han skulle kunna komma att få och vilken fått honom att modifiera sin metod. Kritiken är den att oändligheter, i det här fallet två oändliga mängder av indivisibler tillhörande varsina figurer, inte kan ha ett förhållande till varandra. Om sådana förhållanden inte existerar skulle Cavalieris metod falla totalt och han tog denna specifika kritik på stort allvar. Cavalieris svar blev att konstruera två olika typer av oändligheter. Absoluta oändligheter som är oändliga i alla avseenden och relativa oändligheter som är oändliga endast i vissa avseenden. Vad gäller absoluta oändligheter så gav han Guldin rätt, att sådana inte kan ha ett förhållande med varandra men då det gäller relativa oändligheter menade Cavalieri att sådana förhållanden existerar. Mängderna av alla indivisibler tillhörande två figurer med avseende på samma *regula* är relativa oändligheter då de är oändliga i sitt antal men inte med hänsyn till var och en av indivisiblernas storlek, längd eller area, eller till indivisiblernas utbredningsområde, tillika figurernas area eller volym. På så vis motiverade Cavalieri existensen av förhållande mellan mängder av indivisibler och genom att dessutom, som i Cavalieris princip, endast tillåta jämförelser mellan figurer med samma höjd ansåg han att problemet med att mängderna bestod utav oändligt många indivisibler vara löst. Det var inte antalet indivisibler som jämfördes utan, som nämnt i punkt 2, storleken på motsvarande indivisibler, indivisibler på samma höjd, i figurerna som jämfördes.

Som nämnt i anmärkning 5 hade Cavalieri även en del problem med ett annat av sina bevis, nämligen beviset för att: $A_{F_1} = A_{F_2} \Rightarrow O_{F_1}(l)_{AB} = O_{F_2}(l)_{AB}$, i vilket han använde sig av superpositionering tills det att delarna av F_2 helt täcker F_1. Problemet är att en sådan upprepning kan fortgå i oändligheten och kommer att göra så, så länge inte både F_1 och F_2 är polygoner. Här hjälper inte heller Cavalieris modifiering med att endast tillåta jämförelser av figurer av samma höjd utan problemet kvarstår även då och Cavalieri lyckades aldrig ta sig runt det utan var beredd att tillåta den typen av bevis. Något som i ett avseende kunde tyckas motsägelsefullt då han likt de grekiska matematikerna ville undvika oändligheter men i ett annat avseende, med dagens ögon, skulle kunna ses som ett steg framåt i matematiken när det gäller att våga ta sig an oändligheter.

En sak som Cavalieri och Guldin trots allt var överens om var vikten av direkta bevis till skillnad från grekernas dubbla motsägelsebevis och en intressant anmärkning är att inte ett enda utav Cavalieris teorem i *Geometria* bevisas med motsägelsebevis förutom teorem II.22. Vad gäller det teoremet återkom dock Cavalieri i en av sina senare böcker med ett direkt bevis så i det avseendet måste man säga att Cavalieri lyckades. Guldin använde heller inga motsägelsebevis i sina area- och volymberäkningar med hjälp av rotationer och tyngdpunkter. Hans direkta bevis för Arkimedes cirkelsats, att arean av en cirkel, A_C, är lika med arean av en rätvinklig triangel, A_{ABC}, med kateterna, $|AB|$ lika med cirkelns radie, och $|AC|$ lika med cirkelns omkrets, såg till exempel ut som följer:

Guldins bevis för Arkimedes cirkelsats

Givet en sträcka RS med mittpunkten, tillika tyngdpunkten, T.
Låt RS rotera runt punkten R.
Då bildas två cirklar, C_{RS} och C_{RT}, med radierna, RS respektive RT,
och omkretsarna, O_{RS} och O_{RT}.
Enligt Pappus bok V, proposition 11, så är: $O_{RS}: O_{RT} = |RS|: |RT| = 2: 1$.
O_{RT} är emellertid också den väg som tyngdpunkten, T, färdas i sin rotation runt R.
Enligt Guldins metod är då arean av cirkeln, C_{RS}, lika med arean av en rektangel, $ABCD$, med sidorna $|AB| = |RS|$ och $|AD| = O_{RT} = \frac{1}{2} O_{RS}$.
Alltså är arean av cirkeln, $A_{C_{RS}} = \frac{1}{2} * |RS| * O_{RS}$

Q.E.D.

Detta bevis var visserligen ett direkt bevis utan motsägelser och utan indivisibler. Cavalieri kritiserade emellertid Guldin för att hans metod inte gick att bevisa utan motsägelsebevis såvida man inte använde sig av indivisibler vilket han själv också bevisade för Guldin. På så vis ansåg Cavalieri att poängen med Guldins metod föll då de direkta bevisen byggde på ett icke-direkt bevis.

Flera matematiker kom att fortsätta i Cavalieris fotspår och Cavalieri spelade en betydande roll i matematikens utveckling från Arkimedes dubbla motsägelsebevis med uttömningsprincipen till Leibniz infinitesimaler. Med infinitesimalernas och sedermera integralkalkylens framgångar förpassades emellertid läran om indivisibler mer och mer. I nästa avsnitt kommer jag själv att dela lite tankar kring indivisibler och vad man möjligtvis skulle kunna använda dem till idag.

6. Egna tankar

Något som fascinerar mig då jag studerar matematikhistoria är att se vad matematiker för hundra- och tusentals år sedan klarade av att göra trots att de inte hade de matematiska redskap som vi har idag. Ett tydligt sådant exempel är area- och volymberäkningar, där vi idag kan bevisa många formler med hjälp av integralkalkyler samtidigt som de gamla grekerna lyckades bevisa flera av dem med dubbla motsägelsebevis och uttömningsprincipen och Cavalieri fixade ytterligare några med sina indivisibler. Integralkalkylerna är oftare enklare och snyggare enligt min mening men i vissa fall är de äldre lösningarna bättre och den mindre avancerade matematiken som används i dem gör att de går att lära sig tidigare. När jag studerade på Älvkullegymnasiet i Karlstad gjorde jag i trean ett projektarbete i matematik med namnet ”Betydelsen av en djupare förståelse vid inlärning av matematik” som handlade om problemet med att lärare ibland tvingas låta bli att härleda formler som man använder i undervisningen då matematiken bakom dem först tas upp i senare kurser. Även här är area- och volymformler ett bra exempel då man ofta lära sig flera av dessa tidigt i skolan. Arean av en triangel må vara enkel att förklara men när det gäller volymen av en pyramid eller en sfär blir det desto krångligare och här tror jag att Cavalieris indivisibler faktiskt skulle kunna komma till användning. Jag menar inte att lärare ska ägna flera lektioner åt att lära elever att använda Cavalieris metoder men jag tänker att man skulle kunna tillhandahålla material för de som är intresserade så att de ser att de geometriska formlerna inte är tagna ur tomma intet och då tror jag, i ett sådant sammanhang, att Cavalieris indivisibler skulle vara mer lättbegripliga än integraler.

Förutom den pedagagogiska betydelsen av att undervisa om Cavalieris metoder vore det intressant att se ny forskning kring indivisibler. Jag tycker att det är tråkigt att idéerna kring indivisibler mer eller mindre försvann i och med integralkalkylens framgångar och jag tänker att precis som man utvecklat läran kring infinitesimaler på senare år så borde det gå att utveckla en kring indivisibler som är mer korrekt med dagens mått. Problemet med Cavalieris metod är att den likt grekernas dubbla motsägelsebevis använder sig av jämförelser mellan figurer och att man på så vis är beroende av att veta vilka figurer man ska jämföra med varandra till skillnad från integraler som man kan använda direkt. För den som är intresserad tror jag emellertid att ny forskning kring indivisibler skulle kunna vara ett intressant område för ett annat examensarbete att gräva vidare i. Jag slutar emellertid här.

7. Referenslista

Andresen, Kirsti, Cavalieri's Method Of Indivisibles, Archive for the History of Exact Sciences, 1985. 31. 291-367.

Joyce, David E., Euclid's Elements, https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/, 1998

Katz, Victor J., History Of Mathematics: Pearson New International Edition, 3rd ed. Edinburgh, Pearson Education Limited, 2014.

Mancosu, Paolo, Philosophy Of Mathematics And Mathematical Practice In The Seventeenth Century. New York, Oxford University Press, Inc., 1996.