UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2019:24

Sonja Kovalevsky och hennes matematik

Lisa Segerdorff

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare: Gunnar Berg
Examinator: Jörgen Östensson
Juni 2019

Department of Mathematics
Uppsala University

Sammanfattning

Sonja Kovalevsky var en av de mest framgångsrika kvinnliga matematikerna under 1800-talet. Hon växte upp i Ryssland men reste sedan västerut för att kunna fortsätta studera matematik på en högre nivå. Kovalevsky reste under flera år runt i Europa på jakt efter en högre utbildning. Hon studerade bland annat under Weierstrass i Berlin och det var han som hjälpte Kovalevsky att ta sin doktorsexamen i matematik.

Kovalevsky deltog i *the Sixth Congress of Mathematicians and Physicians* 1880 och i publiken satt den svenska matematikern Gösta Mittag-Leffler, Tack vare Mittag-Leffler fick Kovalevsky en position på Stockholms högskola som privatdocent. Senare fick Kovalevsky en position som professor i Högre Matematisk Analys vid högskolan, därmed var hon den första kvinnan i Sverige att få en högre akademisk tjänst. Idag finns hennes föreläsningsanteckningar bevarade på Institut Mittag-Leffler i Djursholm, Stockholm.

Kovalevsky arbetade bland annat med partiella differentialekvationer och är känd för Cauchy-Kovalevskys sats. Hon vann även Bordinpriset 1888 för sin artikel om rotationen hos en stel kropp kring en fast punkt.

Nyckelord:

Sonja Kovalevsky, 1800-talet, Karl Weierstrass, Gösta Mittag-Leffler, Ordinära differentialekvationer, Partiella differentialekvationer, Cauchy-Kovalevskys sats.

Innehåll

1 Inledning

När feministrörelsen inspirerade en tillbakablick på vår historia med ett nytt perspektiv, i ett försök att uppskatta kvinnors bidrag som tidigare bara förbisetts, kändes Sonja Kovalevsky (1850-1891) igen som en av de första kvinnorna som bidragit med resultat av mycket hög kvalitet till matematiken [2]. Det påstås att Kovalevskys livsöde är ett av de mest fascinerande i vetenskapens historia. Hon var inte endast en briljant matematiker utan engagerade sig även i andra ämnen som exempelvis litteratur. Kovalevskys liv innehöll en blandning av spänning, tragik men framförallt en lysande karriär. Hon var på ständig jakt efter nya mål och reste mycket men hon återkom alltid till sina två favoritämnen - matematik och litteratur. Omgiven av intressanta personer och akademiker fick Kovalevsky relativt goda förutsättningar för högre studier inom matematik trots att hon var kvinna. Kovalevsky var väldigt intresserad och engagerad i kampen för att ge fler kvinnor möjlighet att studera. Hennas position som professor vid Stockholms högskola har blivit en milstolpe i historien eftersom hon var den första kvinnan i Sverige att få en högre akademisk tjänst. Arvet efter Kovalevskys lever kvar än idag och i Sverige såväl som i andra länder firar studenter Sonja-Kovalevsky dagar varje år för att främja en utbildning för alla [7]. Kovalevsky beskrev själv sitt livsmål som:

”Jag tror att mitt öde är att tjäna sanningen i vetenskapen, men också att arbeta för rättvisan genom att öppna nya vägar för kvinnor” [7]

I denna uppsats kommer en kort biografi samt ett exempel på Sonja Kovalevskys matematik, Cauchy-Kovalevskys sats, att presenteras.

2 Biografi: 1850-1874

2.1 Tidig uppväxt

Kovalevsky föddes som Sophia Vasilievna Krukovskaya i Moskva 1850, andra dottern till Vasily Kriukovskoi (1800-1874) och Elizaveta Schubert (1820-1874). Kovalevskys far arbetade inom militären och var stationerad i Kaluga, söder om Moskva, där Kovalevsky spenderade sina första år. När fadern avgick från militären 1858 flyttade familjen från Kaluga till Palibino. När Kriukovskoi var fri från sina militära plikter hade han mer tid till att ta hand om hemmet. Han insåg därmed att hans två döttrar var väldigt okunniga. Följaktligen avskedades deras tidigare nanny och ersattes av en engelsk guvernant, Miss Smith, och en polsk lärare, Joseph Malevich. Eftersom Kovalevskys syster Aniuta var 14 år vid denna tid ansågs hon vara oförbätterlig, fokuset hamnade istället på Kovalevsky och hennes vardag blev genast mycket striktare. Miss Smith förbjöd exempelvis Kovalevsky från att läsa några böcker som Miss Smith inte hade godkänt. Kovalevsky löste det genom att läsa de böcker hon själv ville när Miss Smith trodde att hon gjorde övningar i biblioteket [2]. Malevich lärde istället Kovalevsky grunderna i en ung kvinnas utbildning och introducerade henne för aritmetik [10].

2.2 Introduktionen till matematiken

Kovalevsky hade en morbror, Fyodor, och en farbror, Pyotr, som hade extra stor betydelse för henne. Fyodor brukade berätta historier för Kovalevsky, men inte de typiska ryska berättelserna om hjälpsamma vargar och trupialer [1], utan han berättade istället om biologi, om infusionsdjur och alger. Medan Fyodor berättade om biologi berättade Pyotr istället om matematik. Kovalevsky har själv berättat att långt innan hon förstod vad orden betydde, berättade Pyotr om kvadrering av cirkeln, asymptoter och många andra matematiska begrepp. Kovalevsky har även berättat att ett av rummen i fastigheten i Palibino saknade riktiga tapeter och rummet var istället tapetserat med litograferade anteckningar från en kalkylkurs, troligtvis från en kurs som gavs av den kända ryska matematikern Ostrogradsky. Kovalevsky menade att denna slumpmässiga introduktion till matematiken gjorde henne bekväm med kalkylens formler och symboler [2].

Familjen Kriukovskoi var grannar med en fysiker vid namn Nikolai Tyrtov. En dag gav Tyrtov Kovalevsky en kopia av sin introduktionsbok till fysik. Denna bok använde sig av trigonometri, ett ämne Kovalvesky var helt obekant med [10]. Dessutom var hennes lärare Malevich obekant med trigonometri, därmed var Kovelevsky själv tvungen att försöka förstå sinusfunktionen. Kovalevskys gissning var att sinus av en medelpunktsvinkel i en cirkel är proportionell till kordan. Egentligen är sinus av en medelpunktsvinkel proportionell till halva kordan av dubbla vinkeln. Dock är skillnaden försumbar när det rör sig om små vinklar. I Ptolemy's *Almagest* där de tidigaste trigonometriska tabellerna återfinns var det tabeller av kordor istället för halv-kordor. När Tyrtov insåg vad Kovalevsky hade åstadkommit kallade han henne för den nya Pascal och försökte övertala hennes far att tillåta henne studera matematik på en högre nivå. Till slut gav Vasily med sig och tillät Kovalevsky att ta lektioner från Professor Alexander Strannoliubsky i Petersburg. [2]

2.3 Jakten efter en högre utbildning

Kovalevsky studerade differential och integralkalkylen tillsammans med Strannoliubsky och när hon var 17 år gammal avslutade hon sin utbildning hos honom. Tyvärr fanns det ingen möjlighet för Kovalevsky att fortsätta utbilda sig eller skaffa en karriär i Ryssland, på grund av att den liberaliserade rörelsen 1861-1862 hade nått sitt slut. Följaktligen bestämde sig Kovalevsky

[1] Trupialer är en familj i fågelordningen tättningar

och hennes äldre syster för att flytta västerut, precis som många andra unga kvinnor från deras generation gjort. Det fanns bara ett problem, som kvinna i Ryssland var det svårt att ta sig dit. Det var nämligen så att kvinnor vanligtvis inte fick pass i sitt eget namn, eftersom en underordnad kvinna var tvungen att ha ett tillstånd från antingen sin far eller sin man för att få tillstånd att resa utomlands. Inte nog med det var kvinnor som reste ensamma behandlade med nyfikenhet och misstänksamhet. Precis som många andra fäder under 1800-talet ville Vasily inte ge sin dotter tillstånd att resa utomlands för att studera matematik. Den lösningen många unga kvinnor tog till var att hitta en man som skulle ge dem tillåtelse att resa och gifta sig med honom för att få sitt pass. Ett påhittat giftermål kanske verkade som en drastisk lösning men man måste komma ihåg förklaringen som E.F Litvinova gav: ”You don't have to be a genius to understand that, but you do have to be a Russian” [2, s.11]. Den man som tillslut gifte sig med Kovalevsky var en förläggare och paleontolog vid namn Vladimir Kovalevsky.

Dock var vägen till giftermålet inte helt enkel för Kovalevsky, hennes far var nämligen emot giftermålet. Emellertid lyckades Kovalevsky övertala sin far att tillåta bröllopet, genom att först skicka ut information till gäster i Palbino att hon och hennes fästman var i full gång med att planera sitt bröllop. Vasily var därmed tvungen att antingen medge till sina gäster att hans dotter gjorde uppror eller ge ett offentligt erkännande av förlovningen. Vasily valde det senare alternativet. Dock var Vasily fortfarande emot giftermålet. Kovalevsky gick då till Vladimirs lägenhet och berättade för sin mamma att hon inte skulle gå därifrån förrän hennes föräldrar gick med på giftermålet. Kovalevsky och Vladimir gifte sig i september 1868 [2].

2.4 Studierna utomlands

Nu var planen att resa västerut tillsammans med Aniuta samt Aniutas vän Anna Mikhailovna Evreinova och Annas kusin Julia Lermontova för att studera. Dock gick planen i stöpet när Annas föräldrar inte tillät henne att åka och Aniutas tillstånd blev försenat. Istället flyttade Kovalevsky och Vladimir till Petersburg där de bodde i ett par månader och gick på föreläsningar i en mängd olika ämnen. Till slut insåg Kovalevsky att hon inte kunde studera alla dessa ämnen samtidigt utan att hon var tvungen att begränsa sig till ett ämne. Fokus låg nu endast på matematiken [2].

Under våren 1869 lämnade Kovalevsky, Vladimir och Aniuta Ryssland och reste till Wien. Därifrån lämnade Anita paret och reste vidare till Paris för att bli politiskt aktiv medan Vladimir och Kovalevsky flyttade vidare till Heidelberg. Kovalevsky hade länge drömt om att studera och efter ihärdiga försök lyckades Kovalevsky övertala administrationen att låta henne studera så länge hon fick tillåtelse av professorerna. Under ett år studerade Kovalvsky matematik med professorerna P. du Bois-Reymond och Leo Koeningsberger, vilka båda var studenter till Karl Weierstrass [2].

Hösten 1870 reste Kovalevsky ensam till Berlin för att uppsöka Professor Karl Weierstrass [2].

2.5 Kovalevsky och Weierstrass

Kovalevsky reste till Berlin i hopp om att bli antagen till Berlins universitet och den personen hon räknade med skulle hjälpa henne komma in var Professor Weierstrass. Men varför skulle en sådan framstående matematiker som Weierstrass hjälpa en 20-årig kvinna, med endast ett år av matematiska studier förutom kalkylen? En orsak var troligtvis att Kovalevsky hade med sig fina rekommendationer från sina lärare i Heidelberg. En annan orsak kan ha varit att Weierstrass förlorat många studenter när de begav sig ut i det Fransk-Tyska kriget 1870-1871. Den sista möjliga orsaken, men detta är endast en spekulation, var att Weierstrass kände till Kovalevskys morfar Fyodor Schubert som arbetat med att bestämma jordens form, en ellipsoid med tre olika axlar.

Emellertid hade Weierstrass ingen rätt att låta Kovalevsky delta under hans föreläsningar på grund av hur universitetets regler såg ut. Men det hindrade inte honom från att ge Kovalevsky en lista med matematiska problem att lösa som en form av intagningsprov. Kovalevskys lösningar på dessa problem var så pass imponerande att Weierstrass började ge Kovalevsky privatlektioner två gånger i veckan. Under denna tid hade Weierstrass inte någon examen i åtanke åt Kovalevsky eftersom han resonerade att en gift kvinna inte är i något behov av en examen. Därför lärde han Kovalevsky den matematik han lärde de andra studenterna på universitetet, såsom om elliptiska funktioner, abelska funktioner, introduktion till analytiska funktioner med mera [2].

Under ett och ett halvt år skrev Kovalevsky tre avhandlingar under Weierstrass ledning. Två av dessa ansåg Weierstrass tillräckligt respektabla för vilket universitet som helst medan den tredje och sista avhandlingen, partiella differentialekvationer, var så pass enastående att det inte fanns något som helst tvivel om att Kovalvsky förtjänade en doktorsexamen. Eftersom Kovalevsky inte fick skriva in sig vid universitetet i Berlin kunde hon heller inte få sin doktorsexamen där och Weierstrass vände sig därför till det mer liberala universitetet i Göttingen. Weierstrass lyckades ordna att Kovalevsky fick sin examen utan den vanliga muntliga examinationen. Weierstrass tyckte att Kovalevkys tyska var bristfällig och var rädd att hon skulle få scenskräck när hon skulle bli utfrågad av en stor grupp av seniora forskare. Kovalevsky hade ju aldrig tidigare tagit del av en universitetsexamination. På rekommendation av Weierstrass vänner Fuchs och Weber tilldelades Kovalevsky examen *summa cum laude* hösten 1874 [2]. *Summa cum laude* examen tilldelas de studenter som tar examen ”med högsta äran”

Kovalevskys doktorsavhandling fick mycket beröm från dem som kände till den. Exempelvis uttryckte Schwarz en önskan om att Koenigsberger och Fuchs kunde uttrycka sig på samma sätt som Kovalevsky. En annan person som berömde avhandlingen om partiella differentialekvationer var Charles Hermite [2].

Kovalevsky återvände till Ryssland uppfylld av beröm men utmattad av ansträngning efter att ha nått det första av sina livsmål [2].

3 Kovalevskys matematik: Cauchy-Kovalevskys sats

Under sin tid med Weierstrass skrev Kovalevsky tre artiklar, där en av dem handlade om en existenssats för partiella differentialekvationer, det som numera kallas för Cauchy-Kovalevskys sats. Resultatet var så pass betydelsefullt att det utgjorde en doktorsavhandling i sig [2]. I detta avsnitt kommer Cauchy-Kovalevskys sats att presenteras som ett exempel på Kovalevskys matematik. Inledningsvis kommer existenssatser i allmänhet beskrivas med en mer ingående beskrivning av Picard-Lindelöfs existenssats. Därefter kommer Cauchy-Kovalevskys sats för ODEs samt PDEs beskrivas.

3.1 Existenssatser

Under 1700- och 1800-talet skapade matematiker ett stort antal olika typer av differentialekvationer. Dock insåg matematikerna att de inte fanns metoder för att lösa alla dessa ekvationer vilket ledde till att de istället började bevisa att lösningar till ekvationerna existerar. Även om sådana bevis inte ger en lösning är de ändå användbara inom matematiken [6]. Att frågan om existens förbisågs så pass länge beror delvis på att differentialekvationer först uppstod i fysikaliska och geometriska problem och delvis på att det var intuitivt att dessa ekvationer hade lösningar [6].

Cauchy var den första som undersökte frågan om existens av lösningar till differentialekvationer och lyckades ge två metoder. Den första skapades någon gång mellan 1820 och 1830 och finns sammanfattad i hans *Exercices d'analyse*. Metoden utnyttjar samma idé som är involverad i integralen som ett gränsvärde av en summa. Den andra metoden, metoden om dominerande- eller majorantfunktioner, är mer allmän och lättare att tillämpa än den första metoden och Cauchy tillämpade metoden i den komplexa domänen. Metoden presenterades i flera artiklar i *Comptes Rendus* under 1839-1842 där Cauchy noterade att partiella differentialekvationer av ordning större än ett kan reduceras till ett system av partiella differentialekvationer och han behandlade existensen av en lösning för systemet. Metoden förenklades senare av Briot och Bouquet och deras version har blivit en standardmetod [6].

En tredje metod för att bevisa existensen av lösningar till en ordinär differentialekvation publicerades först av Liouville för en andra ordningens ekvation. Den här metoden använder sig av successiv approximation och numera beröms Emile Picard för metoden då han gav den en mer generell form.

Metoden utvidgades av Picard i en artikel 1893 till en andra ordningens ekvation och har senare även utvidgats till komplexa x och y [6].

De tre metoderna som beskrivs ovan tillämpades inte bara på högre ordningens ordinära differentialekvationer utan även på system av differentialekvationer för komplexa variabler. Således utvidgade Cauchy sin andra metod för att bevisa existens av lösningar till system av första ordningens ordinära ekvationer i n beroende variabler. Vidare utvidgade han även metoden till system i den komplexa domänen. Weierstrass nådde samma resultat under samma år, 1842, men publicerade det inte förrän hans *Werke* publicerades 1894. [6]

Cauchys arbete om system gjordes självständigt men arbetet förbättrades sedan av Sonja Kovalevsky. [6]

3.1.1 Picards metod av successiva approximationer

Picards metod av successiva approximationer bygger på att ersätta begynnelsevärdesproblemet med dess ekvivalenta integralekvation. För att lösa integralekvationen används iteration (upprepning). Med andra ord, man börjar med en grov approximation av lösningen och förbättrar den steg för steg genom att upprepa operationen för att komma så nära som möjligt till en exakt lösning. Härnäst följer ett exempel på Picards metod av successiva approximationer:

Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

Den ekvivalenta integralekvationen är

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)dt,$$

och det n:te steget av processen blir

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t)dt.$$

Med $y_0(x) = 1$ fås

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{t^2}{2})dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3},$$

och generellt

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Denna successiva approximation konvergerar mot en exakt lösning, eftersom approximationerna är de partiella summorna av potensserie expansionen av e^x. Alltså är lösningen till det givna begynnelsevärdesproblemet e^x [8].

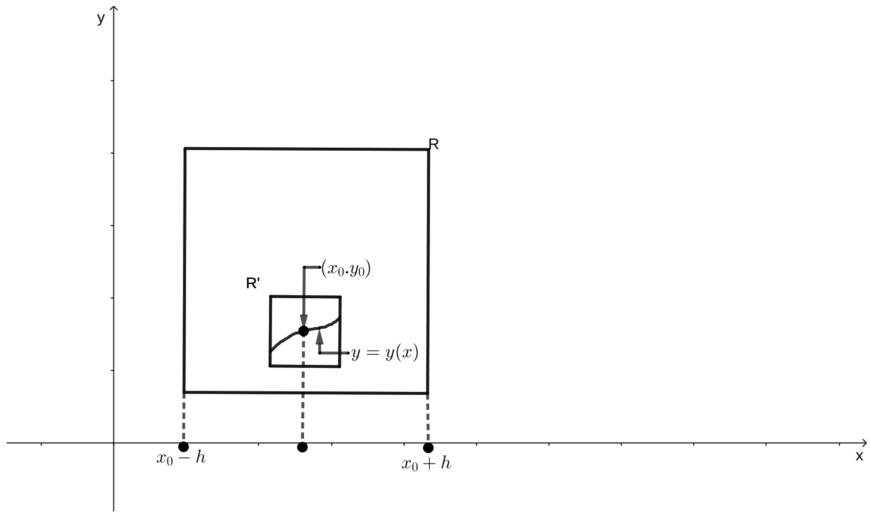
3.1.2 Picard-Lindelöfs existenssats

Först kommer satsen och beviset att presenteras med historiska termer. Därefter kommer satsen och beviset även att presenteras med mer moderna termer.

Sats 3.1. *Låt $f(x,y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ vara kontinuerliga funktioner av x och y på en sluten rektangel, R, med sidor parallella med axlarna (Figur 1). Om (x_0, y_0) är en inre punkt i R, så existerar det ett tal $h > 0$ med egenskapen att begynnelsevärdesproblemet*

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

har en och endast en lösning $y = y(x)$ på intervallet $|x - x_0| \leq h$.



Figur 1: Rektanglarna R och R'

Bevis. Till en början med vet vi att varje lösning till (1) även är en kontinuerlig lösning till integralekvationen

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{2}$$

och på samma sätt är varje lösning till (2) även en kontinuerlig lösning till (1). Från detta kan slutsatsen dras att (1) har en unik lösning på ett intervall $I = (x_0 - d, x_0 + d)$ om och endast om (2) har en unik kontinuerlig lösning på samma intervall.

Vidare ska vi bilda en sekvens av funktioner $y_n(x)$ som definieras av

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt \\ &\dots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \\ &\dots \end{aligned} \tag{3}$$

och visa att den konvergerar mot en lösning till (2). Härnäst är det möjligt att observera att $y_n(x)$ är de n:te partiella summan av funktionsserien

$$y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n(x) - y_{n-1}(x)) = y_0 + (y_1(x) - y_0(x)) + \\ (y_2(x) - y_1(x)) + \cdots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \dots \tag{4}$$

alltså är konvergensen av sekvens (3) ekvivalent med konvergensen av denna.

Vi ska nu definiera ett tal, $h > 0$, och visa att att följande påståenden är sanna på intervallet $|x - x_0| \leq h$.
(i) serien (4) konvergerar till en funktion $y(x)$,
(ii) $y(x)$ är en kontinuerlig lösning till (2),
(iii) $y(x)$ är den enda kontinuerliga lösningen till (2).

Förutsättningarna i satsen används för att konstruera det positiva talet h på följande sätt. Tidigare antogs det att $f(x, y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga funktioner på rektangeln, R. Men R är sluten i den mening att den inkluderar sin rand, och begränsad, vilket innebär att dessa funktioner är begränsade på R. I sin tur innebär detta att det existerar konstanter M och K så att

$$|f(x, y)| \leq M \tag{5}$$

och

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right| \leq K \tag{6}$$

för alla punkter (x, y) i R.

Observera att om (x, y_1) och (x, y_2) är distinkta punkter i R med samma x-koordinat innebär det att medelvärdessatsen garanterar att

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{\partial}{\partial y} f(x, y*)\right| |y_1 - y_2| \tag{7}$$

för något tal, $y*$ mellan y_1 och y_2.

Från (6) och (7) är det möjligt att se att

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \tag{8}$$

för alla punkter (x, y_1) och (x, y_2) i R (distinkta eller inte) som ligger på samma vertikala linje.

Vidare låter vi h vara något positivt tal så att

$$Kh < 1 \tag{9}$$

och rektangeln R' definieras av olikheterna $|x - x_0| \leq h$ och $|x - x_0| \leq Mh$ i R. Eftersom (x_0, y_0) är en inre punkt i R, är det möjligt att dra slutsatsen att ett sådant h existerar.

Från och med nu lägger vi fokuset på intervallet $|x - x_0| \leq h$. För att bevisa (i) räcker det att visa att serien

$$|y_0(x)| + |y_1(x) - y_0(x)| + |y_2(x) - y_1(x)| + \cdots + |y_n(x) - y_{n-1}(x)| + \ldots \tag{10}$$

konvergerar. För att visa detta uppskattas termerna $|y_n(x) - y_{n-1}(x)|$. Till en början är det viktigt att observera att alla funktioner $y_n(x)$ har en graf som ligger i R', följaktligen ligger grafen även i R. Denna observation kan göras då $y_0(x) = y_0$, så punkterna $(t, y_0(t))$ ligger i R'. Därefter ger (5) $|f(t, y_0(t))| \leq M$ och

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt \right| \leq Mh,$$

vilket bevisar påståendet för y_1. I och med denna olikhet följer att punkterna $(t, y_1(t))$ även befinner sig i R'. Alltså är $f(t, y_1(t)) \leq M$ och

$$|y_2(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt \right| \leq Mh,$$

och på liknande sätt är

$$|y_3(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt \right| \leq Mh,$$

och så vidare.

Tidigare nämndes det att termerna $|y_n(x) - y_{n-1}(x)|$ behöver uppskattas. Eftersom en kontinuerlig funktion på ett slutet intervall har ett maximum, och $y_1(x)$ är kontinuerlig kan en konstant, a, definieras som $a = max|y_1(x) - y_0|$, då det följer att

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq a$$

Punkterna $(t, y_1(t))$ och $(t, y_0(t))$ ligger också i R' därmed ger (8)

$$|f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))| \leq K|y_1(t) - y_0(t)| \leq Ka$$

vilket ger

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t)) dt \right| \leq Kah = a(Kh).$$

På liknande sätt,

$$|f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))| \leq K|y_2(t) - y_1(t)| \leq K^2 ah$$

alltså,

$$|y_3(x) - y_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t)) dt \right| \leq (K^2 ah)h = a(Kh)^2.$$

Genom att fortsätta på samma sätt fås

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq a(Kh)^{n-1}$$

för alla $n = 1, 2, 3 \ldots$ Varje term av (10) är därför mindre eller lika med den motsvarande serien av konstanter

$$|y_0| + a + a(Kh) + a(Kh)^2 + \cdots + a(Kh)^{n-1} + \ldots.$$

Dock garanterar (9) att denna serie konvergerar, därmed konvergerar (10) enligt jämförelsekriteriet, (4) konvergerar till en summa som betecknas som $y(x)$, och $y_n(x) \to y(x)$. Eftersom grafen av varje $y_n(x)$ ligger i R' är det tydligt att även $y(x)$s graf har denna egenskap.

Nu kommer beviset av (ii) att presenteras. Ovanstående argument visar både att $y_n(x)$ konvergerar till y(x) i intervallet samt att detta är en likformig konvergens. Detta innebär att om n väljs som tillräckligt stort är det möjligt att göra $y_n(x)$ så nära som vi vill till $y(x)$ för alla x i intervallet: eller mer precist, om $\epsilon > 0$ är givet, existerar det ett positivt heltal n_0 så att om $n \geq n_0$ fås $|y(x) - y_n(x)| < \epsilon$ för alla x i intervallet. Eftersom varje $y_n(x)$ är kontinuerliga implicerar denna likformiga konvergens att gränsvärdesfunktionen $y(x)$ också är kontinuerlig. Denna implikation grundar sig i olikheten

$$|y(x) - y(\bar{x})| = |(y(x) - y_n(\bar{x}) + (y_n(\bar{x}) - y(\bar{x}))| \leq |(y(x) - y_n(\bar{x})| +$$
$$|y_n(\bar{x}) - y(\bar{x})| + |y_n(\bar{x}) - y(\bar{x})|.$$

För att bevisa att $y(x)$ faktiskt är en lösning till (2) måste vi visa att

$$y(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt = 0 \tag{11}$$

Vi vet att

$$y_n(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt = 0 \tag{12}$$

Genom att subtrahera det vänstra ledet av (12) från det vänstra ledet av (11) fås

$$y(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = y(x) - y_n(x) + \int_{x_0}^{x} (f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y(t))dt,$$

vilket ger

$$\left| y(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right|$$
$$\leq |y(x) - y_n(x)| + \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y(t))dt \right|.$$

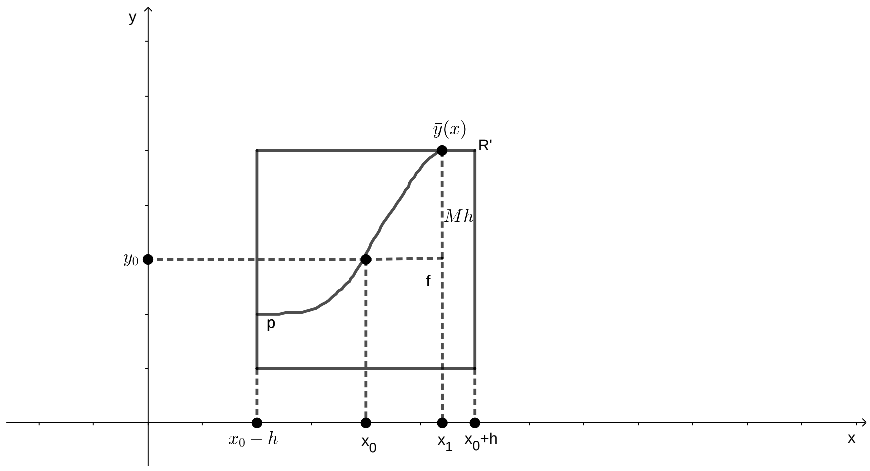
Eftersom grafen till $y(x)$ ligger i R' och därmed även i R ger (8)

$$\left| y(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right| \leq |y(x) - y_n(x)| + Kh \max|y_{n-1}(x) - y(x)|. \tag{13}$$

Den likformiga konvergensen av $y_n(x)$ till $y(x)$ implicerar nu att det högra ledet av (13) kan göras så lite som vi vill genom att göra n tillräckligt stor. (13)s vänstra led måste därför vara lika med noll, och vi har nu bevisat (11).

För att bevisa (iii) antar vi att $\bar{y}(x)$ också är en kontinuerlig lösning till (2) på intervallet $|x - x_0| \leq h$ och visar att $\bar{y}(x) = y(x)$ för alla x i intervallet. Något som är viktigt för detta bevis är att grafen till $\bar{y}(x)$ ligger i R' och därmed även i R, därför inleder vi med att visa detta.

Antag att grafen till $\bar{y}(x)$ lämnar R' (Figur 2). Denna funktions egenskaper (kontinuitet och $\bar{y}(x) = y(x)$) implicerar att det existerar ett tal x_1 så att $|x_1 - x_0| < h, |\bar{y}(x_1) - y_0| = Mh$ och $|\bar{y}(x) - y_0| < Mh$ om $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.



Figur 2: $\bar{y}$ lämnar R'

Från detta följer

$$\frac{|\bar{y}(x_1) - y_0|}{|x_1 - x_0|} = \frac{Mh}{|x_1 - x_0|} > \frac{Mh}{h} = M$$

Men enligt medelvärdessatsen existerar det ett tal, x^* mellan x_0 och x_1 så att

$$\frac{|\bar{y}(x_1) - y_0|}{|x_1 - x_0|} = |\bar{y'}(x^*)| = |f(x^*, \bar{y}(x^*))| \leq M,$$

eftersom punkten $(x^*, \bar{y}(x^*))$ ligger i R'. Detta motsägelsebevis visar att det inte existerar en punkt, x_1 vilket innebär att grafen till $\bar{y}(x)$ ligger i R'

Avslutningsvis används det faktum att både $\bar{y}(x)$ och $y(x)$ är lösningar till (2) för att skriva

$$|\bar{y}(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, \bar{y}(t)) - f(t, y(t))dt \right|.$$

Eftersom graferna till både $\bar{y}(x)$ och $y(x)$ ligger i R' ger (8)

$$|\bar{y}(x) - y(x)| \leq Kh \max|\bar{y}(x) - y(x)|.$$

Alltså,

$$\max|\bar{y}(x) - y(x)| \leq Kh \max|\bar{y}(x) - y(x)|.$$

Detta implicerar att $\max|\bar{y}(x) - y(x)| = 0$ för annars finns en motsägelse i $1 \leq Kh$ till (9). Följaktligen är $\bar{y}(x) = y(x)$ för alla x i intervallet $|x - x_0| < h$ och Picard-Lindelöfs sats är bevisad [8]. $\square$

Nu kommer en ”modernare” variant av beviset att presenteras:

Sats 3.2. *Antag att funktionen $F(x,y)$, där $(x,y) \in G$, uppfyller Lipschitzvillkoret $|F(x,y_1) - F(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$. Då finns det ett öppet intervall $I = (x_0 - d, x_0 + d)$, sådant att begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{14}$$

har en entydig lösning $y = \phi(x)$, där $x \in I$

Bevis. Eftersom F är kontinuerlig gäller $|F(x,y)| \leq k$ i något område $G' \subseteq G$, som innehåller (x_0, y_0). Välj nu talet $d > 0$ sådan att $Md < 1$ och $(x,y) \in G'$, om $|x_0 - x| \leq d$ och $|y_0 - y| \leq kd$.
Låt $A : C \to C$, där C innehåller alla kontinuerliga funktioner som är definierade på intervallet I, vara $A\phi = \psi$, där

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \phi(t))dt \text{ för } x \in I$$

$x \geq x_0$ kan antas eftersom fallet $x < x_0$ visas analogt. Eftersom

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} F(t,\phi(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |F(t,\phi(t))|dt \leq \int_{x_0}^{x} kdt = k(x - x_0) \leq kd,$$

gäller $A[C] \subseteq C$. Eftersom $Md < 1$, är A en kontraktion[2] eftersom om $\psi_1, \psi_2 \in C$, gäller

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |F(t,\phi_1(t)) - F(t,\phi_2(t))|dt \leq Md\, max_{x \in I}|\phi_1(x) - \phi_2(x)|.$$

Följaktligen har operatorekvationen $\phi = A\phi$ och därmed integralekvationen

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,\phi(t))dt$$

och det ekvivalenta begynnelsevärdesproblemet ovan entydiga lösningar. [9]. □

Den "modernare" varianten av beviset grundar sig i kontraktionsprincipen som säger att varje kontraktion i ett fullständigt metriskt rum har en och endast en fix punkt, vilket innebär att ekvationen $\phi = A\phi$ har en entydig lösning. [9]

[2]Kontraktion är en avbildning där avståndet mellan två punkter före avbildningen är större än avståndet mellan punkterna efter avbildningen.

3.2 Definitioner och notationer

Reellt analytisk funktion:

Definition 3.3. *Låt $I \subset \mathbb{R}$ vara en öppen mängd. En funktion $f : I \to \mathbb{R}$ kallas för en analytisk funktion om det för alla $x_0 \in I$ finns en omgivning $J \subset I$ till x_0 och en potensserie $\sum a_n(x - x_0)^n$ sådan att*

$$f(x) = \sum_n a_n(x - x_0)^n \quad \forall x \in J$$

Denna definition kan även utvidgas för att täcka in funktioner av flera variabler:

Definition 3.4. *Låt $U \subset \mathbb{R}^k$ vara en öppen mängd. En funktion $f : U \to \mathbb{R}$ kallas för en analytisk funktion om det för varje $x_0 \in U$ finns en omgivning V till x_0 och en sekvens P_n av homogena polynom av grad n i k variabler sådan att*

$$f(x) = \sum_n P_n(x - x_0) \quad \forall x \in V$$

Definition 3.5. *En majorant till en delmängd X av en ordnad mängd E är ett element $y \in E$ sådan att $y \geq x$ för alla $x \in X$.*

Definition 3.6. *En meromorf funktion är en funktion $f(z)$ på formen*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

där $g(z)$ och $h(z)$ är funktioner som är analytiska i alla punkter av det komplexa planet, $\mathbb{C}$. Då $h(z) = 0$ är funktionen, $f(z)$, inte längre analytisk och vid dessa singulära punkter går funktionen mot oändligheten som ett polynom.

3.3 Cauchy-Kovalevskys sats för ODEs

Sats 3.7. *Anta att a $>$ 0 och F: (-a,a) $\to \mathbb{R}$ är en reellt analytisk funktion nära 0 och u(t) är den unika lösningen till ODE*

$$\frac{d}{dt}u(t) = F(u(t)) \qquad \textit{med } u(0) = 0$$

då är u också en reellt analytisk funktion nära 0.

Observera att existensen och entydigheten av lösningarna garanteras av Picard-Lindelöfs sats. Dock kan argument för lösningarnas existens och entydighet även utarbetas genom argumenten som presenteras nedan. Observera även att det är tillräckligt att visa analyticiteten i en omgivning av 0, även litet, eftersom argumentet då kan utföras igen runt alla punkter där u är definierad och F är en analytisk funktion [4].

Bevis. Detta är det historiska beviset av Cauchy som sedan förbättrades av Sonja Kovalevsky. Det är även detta bevis som senare kommer användas för PDEs. Detta kallas för *majorantmetoden.* [4] Vi använder först analyticiteten hos F samt Picard Lindelöfs sats för att visa att $u(t)$ kan deriveras oändligt många gånger. Sedan konstaterar vi en majorantfunktion och visar med hjälp av denna att u är analytisk. Vidare beräknas derivatan med hjälp av kedjeregeln samt produktregeln:

Givet (från sats 3.7) är

$$u^{(1)}(t) = F(u(t)). \tag{15}$$

Med hjälp av kedjeregeln kan andraderivatan beräknas

$$u^{(2)}(t) = F^{(1)}(u(t))u^{(1)}(t) \tag{16}$$

Tillsammans med (15) ger detta

$$u^{(2)}(t) = F^{(1)}(u(t))F(u(t)) \tag{17}$$

Vidare beräknas tredjederivatan med hjälp av produktregeln och kedjeregeln

$$u^{(3)}(t) = g^{(1)}(t)h(t) + g(t)h^{(1)}(t) \tag{18}$$

där

$$g(t) = F^{(1)}(u(t)) \tag{19}$$

och

$$h(t) = F(u(t)) \tag{20}$$

vilket med hjälp av kedjeregeln ger förstaderivatorna

$$g^{(1)} = F^{(2)}(u(t))(u^{(1)}(t)) \tag{21}$$

$$h^{(1)} = F^{(1)}(u(t))(u^{(1)}(t)) \tag{22}$$

sätt in (19), (20), (21), (22) i (18) vilket ger

$$u^{(3)}(t) = F^{(1)}(u(t))F^{(1)}(u(t))(u^{(1)}(t)) + F^{(2)}(u(t))(u^{(1)}(t))F(u(t))$$

tillsammans med (15) fås

$$u^{(3)}(t) = F^{(1)}(u(t))^2 F(u(t)) + F^{(2)}(u(t))F(u(t))F(u(t))$$

vilket kan förenklas till

$$u^{(3)}(t) = F^{(1)}(u(t))^2 F(u(t)) + F^{(2)}(u(t))F(u(t))^2 \tag{23}$$

På samma sätt kan alla resterande derivator av funktionen u beräknas. Generellt kan derivatan skrivas som

$$u^{(n)}(t) = p_n\left(F(u(t)), \dots, F^{(n-1)}(u(t))\right)$$

vilket kan bevisas med induktion [3]. Den viktigaste observationen här är att polynomet p_n endast har icke-negativa heltalskoefficienter.

Anmärkning. *Beräkningen av dessa polynom är kopplad till en formel som uppfanns under 1800-talet av L. Arbogast i Frankrike och Faá di Bruno i Italien. Numera är den känd som Faá di Brunos formel;*

$$\frac{d^n}{dt^n}F(u(t)) = \sum_{m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n} \frac{n!}{m_1!1!^{m_1}m_2!2!^{m_2}\dots m_n n!^{m_n}} F^{(m_1+\dots m_n)}(u(t)) \prod_{j=1}^{n} (u^{(j)}(t))^{m_j}$$

[4].

Eftersom att p_n endast har icke-negativa heltalskoefficienter kan det ses att

$$|u^{(n)}(0)| \leq |p_n\left(F^{(0)}(u(0)), \dots, F^{(n-1)}(u(0))\right)| \leq p_n\left(|F^{(0)}(0)|, \dots, |F^{(n-1)}(0)|\right).$$

Antag nu att det finns en funktion G sådan att för alla $n \geq 0$ gäller

$$G^{(n)}(0) \geq |F^{(n)}(0)| \geq 0.$$

En sådan funktion kallas för en majorantfunktion till F. Genom den växande egenskapen av polynomet p_n i var och en av dess variabler gäller

$$|u^{(n)}(0)| \leq p_n\left(|F^{(0)}(0)|, \dots, |F^{(n-1)}(0)|\right) \leq p_n(G^{(0)}(0), \dots, G^{(n-1)}(0))$$

[3].

Proposition 3.8. *Låt $I \subset \mathbb{R}$. En funktion $F : I \to \mathbb{R}$ är analytisk i I om och endast om det för varje kompakt delmängd $K \subset I$ existerar konstanter $c(K)$ och $r > 0$ sådan att för alla $x \in K$ och $n \geq 0$ ger*

$$|F^{(n)}(x)| \leq c(K)\frac{n!}{r^n}$$

[3].

Proposition 3.8 säger att analyticitet kan mätas genom tillväxten av Taylor koefficienterna. Detta innebär att om vi har en majorantfunktion G och en lösning till ODE

$$\frac{d}{dt}v(t) = G(v(t))$$
$$v(0) = 0$$

sådan att v är analytisk, kommer vs Taylor koefficienter majorisera us Taylor koefficienter eftersom

$$|u^{(n)}(0)| \leq p_n(|F(0)|, \ldots, |F^{(n-1)}(0)|) \leq p_n(G(0), G^{(1)}(0), \ldots G^{(n-1)}(0)) =$$
$$= v^{(n)}(0) = |v^{(n)}(0)|.$$

och därmed kommer även u vara analytisk [3].

En analytisk funktion är en funktion som överallt kan representeras av en konvergent potensserie, det innebär att om v är analytisk nära noll har serien

$$S_v(t) := \sum_{n\geq 0} v^{(n)}(0)\frac{t^{(n)}}{n!}$$

en positiv konvergensradie och med jämförelse har då även serien

$$S_u(t) := \sum_{n\geq 0} |u^{(n)}(0)|\frac{t^{(n)}}{n!}$$

en positiv konvergensradie. Detta visar att F är en analytisk funktion nära noll och avslutar beviset [4].

Avslutningsvis måste majorant funktionen G konstrueras och vi begränsar oss till någon kompakt delmängd K. Detta resonemang kan användas vid alla punkter så vi kommer härleda kompakthet i alla kompakta delmängder av domänen, vilket är vad vi önskar. Proposition 3.8 säger att för alla $n \geq 0$ existerar det konstanter $C, r > 0$ sådana att

$$|F^{(n)}(0)| \leq C\frac{n!}{r^n}$$

Undersök

$$G(z) := C\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n = C\frac{1}{1-\frac{z}{r}} = \frac{Cr}{r-z}$$

vilken konvergerar för $|z| < r$ och uppfyller $G^{(n)}(0) = \frac{Cn!}{r^n} \geq |F^{(n)}(0)|$ för alla $n \geq 0$ genom konstruktion [3].

För att avsluta beviset beräknas lösningen v till den karakteristiska ekvationen

$$\frac{d}{dt}v(t) = G(v(t)) = \frac{Cr}{r - v(t)}, \quad v(0) = 0,$$

vilken kan lösas genom reell differentialkalkyl genom separation av variabler:

$$(r-v)dv = Crdt \Rightarrow -d(r-v)^2 = Crdt \Rightarrow v(t) = r \pm r\sqrt{1-\frac{2Ct}{r}}$$

. Genom användningen av begynnelsevillkoret $v(0) = 0$ fås

$$v(t) = r - r\sqrt{1-\frac{2Ct}{r}}$$

vilket är en analytisk funktion för $|t| \leq \frac{r}{2C}$. Detta visar att $S_v(t)$ konvergensradie är positiv och beviset är klart [4]. □

3.4 Cauchy-Kovalevskys sats för PDEs

Nedanstående framställning kommer från Denis G Gaidashevs *Chapter 2: The Cauchy-Kovalevskaya Theorem* [4].

Betrakta en k:e ordningens skalär quasilinjär PDE:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\nabla^{k-1}u, \ldots, u, x)\partial_x^\alpha u + a_0(\nabla^{k-1}u, \ldots, u, x) = 0, x \in \mathcal{U} \in \mathbb{R}^\ell \quad (24)$$

där

$$\nabla^l u := (\partial_{x_{i_1}} \ldots \partial_{x_{i_l}} u)_{1 \leq i_1, \ldots, i_l \leq \ell'}, \quad l \in \mathbb{N},$$

är den l:e upprepade gradienten och

$$\partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_\ell}^{\alpha_\ell}$$

för ett multi-index $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$, och $\mathcal{U}$ är någon öppen region i $\mathbb{R}^\ell$. ($\ell \geq 2$ är antalet variabler), och $u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$
och med randvillkoren:

$$u = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \vec{n}^{k-1}} = g_{k-1}, \quad x \in \Gamma \quad (25)$$

Sats 3.9. *Under analytiska antaganden på alla koefficienter, och det icke-karakteristiska villkoret, finns det en unik lokal analytisk lösning u till ekvationerna (24) och (25).*

Det här resultatet bevisades först av Cauchy år 1842 på första ordningens quasilinjära utvecklingsekvationer. Senare formulerades resultatet i dess mest generella form av Sonja Kovalevsy år 1874. En annan person som nådde liknande resultat var Darboux, men hans arbete var inte lika generellt som Kovalevskys. Både Darboux och Kovalevskys artiklar publicerades 1875 och bevisen förenklades senare av Goursat omkring år 1900. Idag är dessa resultat gemensamt kända som Cauchy-Kovalevskys sats.

3.5 Cauchy-Kovalevskys sats betydelse för matematiken

Nedanstående framställning kommer från Roger Cookes *The Mathematics of Sonya Kovalevskya* [2].

Cauchy-Kovalevskys sats har en basal roll i studierna av differentialekvationer, satsen används än idag för att bevisa nya resultat. Nedan kommer ett flertal exempel ges för att illustrera vikten av satsen:

1. S. Bernstein (1908) bevisade att en funktion z som uppfyller

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0$$

   där F är en analytisk funktion och har kontinuerliga partiella derivator upp till tredje ordningen och $4D_1FD_3F-(D_2F)^2$ är positiv i en region, då är även z analytisk.

2. Ivar Fredholm (1890) använde det faktum att Kovalevskys lösning till värmeledningsekvationen inte är analytisk vid någon punkt i planet $t = 0$ för att konstruera en analytisk funktion som har enhetscirkeln som dess naturliga gräns, närmare bestämt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2},$$

   vilken är en lösning till värmeekvationen när $a = e^x$ och $z = e^t$.

3. Oleinik (1975) poängterar att många satser som visar nödvändigheten av hypotesen som används i beviset av Cauchy-Kovalevskys sats påkallar satsen själv i deras bevis.

4. Det är inte bara själva Cauchy-Kovalevskys sats som har använts, utan även metoden med majoranter som används i beviset har kommit till nytta ett flertal gånger. Metoden med majoranter har bland annat används för att få fram flera viktiga resultat inom teorin för algebraiska funktioner (Bliss, 1933). Vidare behövdes ett visst fall av Cauchy-Kovalevskys sats till teorin om Lie grupper och detta bevisades med hjälp av metoden (P.M Cohn, 1957).

4 Biografi: 1875-1891

4.1 Tillbaka till Ryssland

När Vladimir och Kovalevsky, nu återförenade, återvände till Ryssland välkomnades de tillbaka och Kovalevskys tidigare lärare Malevich skålade ”the health of the first Russian woman scholar” [2, s.85].

Under denna period fanns det en populistisk rörelse i Ryssland. Ungefär 3000 ungdomar från överklassen tog enkla jobb i byarna för att antingen sprida revolutionära idéer eller för att utföra socialtjänst. Dock var det lätt för regeringen att identifiera och sedan eliminera de radikala personerna i rörelsen. Både Kovalevsky och Vladimir var aldrig långt ifrån dessa radikala cirklar, deras hopp om ett tillfredsställande privatliv kombinerades därför med deltagande i projekt om reformer av största vikt för människans framtid [2].

Kovalevsky hade även en plan om att befästa sin något slumpmässiga utbildning, en plan som Weierstrass ansåg var lämplig: " I am in complete agreement with your plan to spend this winter filling in the gaps in your knowledge of the most elementary parts of mathematics, specifically analytic mechanics and mathematical physics. But, along with the British, study also Poisson and Cauchy and the works of the elder Neumann on electrodynamics" [2, s.85].

Trots att både Kovalevsky och Vladimir hade doktorsexamen hade de svårt att få tag på jobb. För att få undervisa på en högre nivå än den grundläggande nivån i Ryssland var man nämligen tvungen att klara en viss examination, även om man hade en doktorsexamen från Tyskland. Vladimir hade tagit denna examination 1873 men misslyckats och Kovalevsky fick inte ens ta examinationen eftersom hon var en kvinna. Till slut lyckade dock Vladimir klara examinationen men fann inget jobb som lockade honom [2].

Under tiden i Ryssland utvecklades Kovalveslys och Vladimirs förhållande till något mer än det fiktiva äktenskapet de tidigare haft. 1878 föddes deras dotter, Sophia Vladimirovna Kovalevsky. Under dotterns första tid genomgick paret Kovalevsky inte bara en ekonomisk kris, utan Kovalevsky miste sin mor och en av Vladimirs bekanta misstänkte att Vladimir skulle vara en spion för tsaren. Vladimir tog krisen hårdare än Kovalevsky och drog sig undan från allmänheten. Kovalevsky i sin tur tog krisen bättre och började istället reflektera över sitt liv. Dotterns födelse måste ha gett Kovalvesky ett behov av att visa all potential en kvinna besitter. Dock upplevde Kovalevsky svårigheter med att finna tid för matematiken med en nyfödd dotter [2]. Emellertid talade Kovalevsky med Chebyshev och hans förslag ledde till att Kovalevsky presenterade en uppsats vid *the Sixth Congress of Mathematicians and Physicians* 1880. Uppsatsen Kovalevsky presenterade var avhandlingen om abelska integraler vilken var en av de tre avhandlingarna hon presenterade för sin doktorsexamen 1874. Denna händelse visade sig vara av stor vikt för Kovalevsky, för i publiken satt den svenska matematikern Gösta Mittag-Leffler [1]

Under 1880 ansökte Kovalevsky om att få genomgå examinationen för att få undervisa på högre nivåer i Ryssland. Dock drog hon tillbaka sin ansökan för att det berättades för henne att hon skulle påverka sin makes chanser att få ett jobb på Moskvas universitet. Emellertid skickade Kovalevsky in sin ansökan igen när det verkade som om Vladimir skulle få en position på universitetet och hon studerade hela sommaren inför examinationen. I slutändan fick hon inte ens tillåtelse att ta examinationen [2].

Under 1880 återupptog även Kovalevsky kontakten med Weierstrass som hon inte hade korresponderat med sedan 1878. Kovalevsky bestämde sig för att resa till Berlin och resultatet av denna resa är relativt okänd, förutom att Kovalevsky och Weierstrass förnyade deras vänskap, en vänskap som höll resten av Kovalevskys liv [2].

4.2 Ett nytt projekt

Omkring den här perioden gav Weierstrass Kovalevsky ett nytt matematiskt problem att jobba med. Ett par år tidigare hade Weierstrass upptäckt en väldigt bra metod för att konstruera generella lösningar till en stor familj av linjära partiella differentialekvationer, mer specifikt det vi idag kallar för Greens funktion för givna begynnelsevärdes problem. Weierstrass hade inte publicerat den här metoden och han tänkte att om Kovalevsky kunde skriva en artikel som använde denna metod för att lösa något signifikant problem inom den matematiska fysiken, kunde hon återigen komma in i den matematiska världen. Problemet han hade i åtanke var mängden av ekvationer som Lamé hade härlett för att beskriva förflyttningen av partiklar i ett elastiskt medium. Följaktligen började Kovalevsky år 1881 arbeta med problemet som Weierstrass tilldelade henne. Snart blev dock Kovalevsky distraherad av en insikt om ett annat problem av matematisk fysik som hade intresserad henne flera år tidigare, Eulers ekvation som beskriver rörelsen av en roterande fast kropp. Weierstrass hade introducerat Koavalevsky för detta problem under hennes tid som student, men då gjorde hon inga framsteg, men nu, flera år senare och arbetande med Weierstrass problem, fick hon några nya idéer. Kovalevsky började nu arbeta med två problem samtidigt och processen tog längre tid än väntat.

Under samma år hade Vladimir sådana stora skulder till ett företag, utan möjligheter att ta sig loss och utan makt att undvika lagvrängning från deras sida. Vladimir stod nu inför ett kaos till privatliv och nästan helt säkert åtal i samband med en undersökning i det företag han var inblandad i. I April 1883 tog Vladimir livet av sig genom inhalation av kloroform. När nyheten nådde Kovalevsky blev hon helt förkrossad och låste in sig på sitt rum och vägrade mat såväl som läkare. Som tur var fick hon hjälp av sina vänner och snart var hon åter på benen. Kovalevsky återupptog då arbetet med Lamé ekvationerna. Senare det året avslutade Kovalevsky sitt arbetet med de två problemen [2].

4.3 Gösta Mittag-Leffler

Det faktum att Kovalevsky slutligen lyckades ha en karriär inom matematiken medan andra kvinnor som exempelvis Sophie Germain, som också hade en stor talang för matematik, var tvungna att studera privat och med korrespondens kan förklaras med fyra faktorer:

1. Kovalevskys ovanliga kombination av envishet och talang.
2. De sociala rörelserna under denna tid, vilka förberedde vägen för acceptansen av professionella kvinnor.
3. Weierstrass påverkan.
4. Mittag-Lefflers extraordinära hjälp [2].

Det verkade som om många universitet i flera olika länder började bli redo för att ge kvinnor tillträde till deras fakulteter. Denna ära föll till Sverige och till stor del på grund av Mittag-Lefflers aktiviteter i ett helt nytt universitet. Under 1881 tog Mittag-Leffler en position som professor på den nystartade högskolan i Stockholm, Stockholm högskola, vilken bildats som reaktion mot den konservativa karaktären som både Uppsala och Lund universitet hade under denna period [2].

Tidigare hade Mittag-Leffler försökt skaffa Kovalevsky en position på Helsingfors universitets och försökte nu skaffa en position åt henne på Stockholms högskola istället. Under sommaren 1881 skrev han till Kovalevsky att han var ”nästan säker” på att han kunde erbjuda henne en tjänst som privatdocent på universitetet. 1883 seglade Kovalevsky till Stockholm för att börja arbeta på Stockholm Högskola [2].

4.4 Stockholm

Sin första tid i Stockholm bodde Kovalevsky hos paret Mittag-Leffler och förberedde sig för att börja undervisa på högskolan. Januari 1884 gav Kovalevsky sin första föreläsning och kursen hon höll i handlade om partiella differentialekvationer. I slutet av våren hyllades hon av sina studenter och fick motta ett inramat foto av sig själv, Kovalevskys provtermin var en succé. Kovalevsky lämnade Stockholm för en semester i Ryssland och Berlin men med råd och arbetsuppgifter från Mittag-Leffler. Mittag-Leffler rådde först och främst Kovalevsky att ta med sin dotter till Stockholm, för närvarande var hon med Julia Lermontova, för att göra henne fullt respektabel i Stockholms societet. Vidare ville han även att Kovalevsky skulle skaffa artiklar till *Acta Mathematica*, både hennes egna, ännu inte publicerade, men även andra artiklar. *Acta Mathematica* är en tidskrift som än idag är en av de ledande matematiska tidskrifterna. När Kovalevsky arbetade för *Acta Mathematica* kom hon i kontakt med matematiker världen över. Dock lyckades Kovalevsky inte att hämta hem sin dotter då det blev en konflikt om barnuppfostran och Sophia blev kvar i Ryssland två år till [2].

1884 blev Kovalevsky tillsatt som professor på Stockholm högskola, men vägen dit var inte lätt. Mittag-Leffler var tvungen att göra några politiska drag för att försäkra sig om att Kovalevsky skulle få tjänsten. Mittag-Leffler gick nämligen med på att ta tillbaka sina anmärkningar om tillsättningen av två unga män för att Kovalevsky skulle få en femårig position [2].

Sommaren 1885 blev en professor i mekanik, Holmgren, plötsligt sjuk och Högskolan var tvungen att hitta någon som tillfälligt kunde ersätta honom. Fakulteten tillsatte tillfälligt Kovalevsky till den positionen. Under samma sommar öppnades en position i Svenska vetenskapsakademin. Mittag-Leffler försökte ändra akademins stadgar, han ville byta ut ordet *män* mot *personer* för att kunna nominera Kovalevsky till positionen. Emellertid insåg Kovalevsky att om hon skulle tillsättas, skulle det som bäst endast vara en pyrrhusseger[3] för hennes supportrar på grund av den illvilja som skulle skapas. Därför övertalade Kovalevsky Mittag-Leffler att överge projektet om att ändra stadgarna [2].

De följande månaderna var några av de mest produktiva månaderna i Kovalevskys karriär inom matematiken. Hon lyckades klargöra situationen hur thetafunktioner kan användas för att lösa Euler ekvationen för den rotationen av en styv kropp runt en bestämd punkt. Thetafunktioner kunde som tidigare känt användas i Euler och Lagranges fall men nu kunde de även användas i ett nytt fall, Kovalevsky fallet. Kovalevskys resultat bestod av två delar

1. Ett nytt speciellt fall där ekvationerna kan integreras fullständigt.

2. Ett bevis där inga andra fall återstod i vilka lösningarna var meromorfa funktioner av tiden.

där båda är viktiga inom matematiken. Kovalvskys nya fall representerade fysiskt en icke-symmetrisk kropp och rotationen av en sådan kropp under påverkan av gravitationen är väldigt komplicerad. De studier som fanns sedan tidigare var studier som endast berört kroppar som inte påverkas av yttre krafter, exempelvis Poisson-Jacobi fallet, och för en kropp där två av dess principiala tröghetsmoment är lika och dess bestämda punkt är på den tredje huvudaxeln. Fallet tillämpas vanligtvis på symmetriska kroppar [2].

4.5 Prix Bordin

Bertrand, Hermite och Camille Jordan anordnade en tävling som passade Kovalevskys monografi. Bordin priser utdelades i många olika områden som exempelvis botanik, fysik, kemi och matematik. Tävlingen tillkännagavs i volym 103, nummer 26 av *Comptes Rendus* (1886) s.1395. Frågan för 1888 var: ”Improve, in some important point, the theory of the movement of a rigid body” [2, s.111]. Akademins vanliga regler följdes, författaren skrev

[3]En Pyrrhusseger är en seger som är så kostsam för vinnare att den kan tolkas som ett förlust

samma identifierande fras på utsidan av de förseglade kuverten som dolde författarnas personliga information som på deras monografi, så att det inte skulle finnas något tvivel om vilket kuvert som hörde till vilken monografi. Det enda kuvertet som öppnades var det som tillhörde vinnaren, det gjordes på detta sätt för att hålla tävlingen anonym och för att ge de som inte vann friheten att skicka in sitt arbete på andra håll [2].

Samtidigt som Kovalevsky arbetade på sin monografi inför Prix Bordin blev hennes syster Aniutas kroniska sjukdom värre och Kovalevsky reste till Petersbrug för att träffa henne. När Aniutas man Victor återvände hem lämnade Kovalevsky Aniuta i hans vård och begav sig vidare till Moskva för att träffa Julia Lermontova och till sist hämta sin dotter. Kovalevsky hade fullt upp i Stockholm med att försöka hitta någon som kunde ta hand om dottern samtidigt som hon undervisade och skrev på sin monografi [2].

Under hösten blev Anuita ännu sämre och Kovalevsky ansökte om tjänsteledighet för att kunna åka till Ryssland och ta hand om sin syster. Kovalevskys nekades dock tjänsteledigheten eftersom det ansågs vara oförskämt att ta tjänsteledigt för att ta hand om en sjuk släkting. Det skulle ju aldrig en man göra! Det kan ses som en aning ironiskt att konflikten mellan karriär och familj, vilken orättvist läggs på kvinnor, även skulle uppkomma i fallet där kvinnan var en änka [2].

Dessutom upplevde Kovalevsky ett problem, vilket även kan drabba karriärkvinnor idag. Hon kände behovet av att alltid behöva bevisa sin hängivenhet till yrket. Som en vanlig fakultetsmedlem, officiellt professor Extraordinarius, var Kovalevsky den första kvinnan i modern tid med den rollen. Därför höll vissa småsinta fakultetsmedlemmar ett extra skarpt öga efter tecken på ett oprofessionellt beteende från Kovalevskys sida [2].

Under vårterminen 1887 borde Kovalevsky lagt ner all sin tid på sin monografi men istället fann hon två nya intressen. Först anlände hennes gamla bekanta Maxim Kovalevsky till Stockholm för att ge en kurs. Sedan fick Kovalevsky en idé om att skriva två pjäser. Mittag-Leffler störde sig på dessa extraaktiviteter då han ansåg att Kovalevsky slösade bort både sin tid och talang men lät henne hållas [2].

1888 dog Aniuta på grund av komplikationer efter en operation. Kort efter sin förlust började Kovaelvsky intressera sig för den Arktiska upptäckaren Fridtjof Nansen och därefter, men mer intensivt, Maxim Kovalevsky. Senare lyckade Mittag-Leffler övertala Maxim att resa till Uppsala så att Kovalevsky kunde avsluta sin monografi [2].

Med Maxim borta kunde Kovalevsky återigen fokusera på sitt arbete. Kovalevskys monografi var inte riktigt klar när inlämningsdagen i juni kom. Kovalevsky skickade därför in en halvfärdig version av sitt arbete och bad om att få skicka in en reviderad version senare. Under sensommaren 1888 skickade Kovalevsky in sin reviderade version. Den reviderad versionen var heller inte helt färdigställd men Kovalevsky kände sig ändå nöjd med dess kvalitet [2].

Kovalevsky reste till Paris tillsammans med Maxim Kovalevsky för att invänta resultatet av tävlingen. Rapporten av evenemanget i *Comptes Rendus* listade juryn och kommitténs motivering. Juryn bestod av Maurice Lèvy, Phillips, Resal och Sarru, den femte medlemmen Gaston Darboux listades som talespersonen för kommittén. Vinnaren var Sonja Kovalevsky. Det som imponerade kommittén såväl som hela den matematiska världen var att Kovalevsky tillämpade den nyutvecklade och högst abstrakta teorin om Abelska funktioner för att lösa ett problem som uppstod inom fysiken. Artikeln och dess resultat var till och med så originellt att prissumman för tävlingen fördubblades. Kommitténs motivering löd som följande:

[...] The author has not contented himself with adding a result of very high interest to those which were bequethed to us by Euler and Lagrange; he has made a profound study of the result due to him, in which all the resources of the modern theory of theta functions of two independent variables allow the complete solution to be given in the most precise and elegant form. One has thereby a new and memorable example of a problem of mechanics in which these transcendental functions figure, whose applications previously had been limitied to pure analysis and geometry [...] [2, s.115].

4.6 Tiden efter Prix Bordin

Tiden efter Prix Bordin var Kovalevsky utmattad och nära en total kollaps. Hon bad Mittag-Leffler om tjänsteledighet på grund av hälsoproblem. Trots att Kovalevskys femåriga kontrakt skulle ta slut i slutet av teminen och Mittag-Leffler arbetade med att få det förnyat gav han Kovalevsky tjänsteledigt. Förutom sina hälsoproblem hade Kovalevsky en annan tanke med att ta ut tjänsteledighet, hon ville få en position i Paris istället. Dock gav Kovalevsky snart upp sin plan om att lämna Stockholm och hösten 1889 återvände hon till Stockholm [2]. Tidigare under året hade Kovalevsky även rekommenderats till en position som professor i Högre Matematisk Analys och Stockholms högskola gav henne den positionen. Sonja var därmed den första kvinnan i Sverige att få en högre akademisk tjänst.[7]. När Kovalevsky återvände till Stockholm hade hon inte någon ny matematik att vissa upp men hennes monografi om rotationsproblemet hade utökats. Kovalevsky skrev och publicerade två variationer av monografin för att klargöra det som tidigare varit otydligt, för att hon skulle hinna lämna in artikeln i tid för tävlingen [2].

Efter höstterminen 1890 reste Kovalevsky till Genoa för att spendera julen med Maxim. Vägen tillbaka till Stockholm, 1891, blev dock inte som planerad, Kovalevsky anlände till Köpenhamn utan några danska kronor för att ge dricks till en bärare. Detta resulterade i att hon var tvungen att bära sina egna väskor hela vägen hem i slagregn. När hon tillslut kom fram till Stockholm var hon sjuk men lyckade ändå ge sin första föreläsning för terminen. Efter helgen verkade Kovalevsky vara på bättringsvägen och beskrev sina planer om att fortsätta jobba med Euler ekvationerna för Mittag-Leffler. Mittag-Leffler trodde att detta arbete skulle vara det bästa som Kovaelvsky hade gjort hittills. Tyvärr lyckades hon inte påbörja arbetet då hon somnade in dagen efter, den tionde februari 1891 [2].

Nyheten om Kovalevskys död berörde människor världen över: matematiker, konstnärer, intellektuella personer samt reformatorer skickade telegram och blommor. Kovalevskys grav i Norra Begravningsplatsen i Stockholm markeras med ett vackert ryskt kors och graven dekoreras ibland fortfarande av de som fortfarande hedrar hennes minne. Men den hyllning som Kovalevsky själv skulle ha uppskattat mest har sedan länge vissnat, det var en bukett med vita liljor som skickats till hennes begravning med meddelandet:

" To Sonya, from Weierstrass" [2, s.118].

Referenser

[1] Burslem. T. (2001) *Sofia Vasilevna Kovalevskaya* University of St Andrews
`http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Miscellaneous/Kovalevskaya/biog.html` (Hämtad 2019-01-12)

[2] Cooke. R (1984) *The Mathematics of Sonya Kovalevskya.* Springer-Verlag.

[3] Feng, T (2013) *Analysis of partial differential equations.* Anteckningar från föreläsningar av Clément Mouhot. Cambridge university.

[4] Gaidashev, D (2013) *Chapter 2: The Cauchy-Kovalevskaya Theorem.* Anteckningar till kursen Partial Differential Equations, 1MA216. Uppsala universitet.

[5] Jonsson.K. (2015) *FRÅGOR OCH SVAR: DIFFTRANS II, HT2015.* Kungliga tekniska högskolan.

[6] Kline.M. (1972) *Mathematical thought from anicient to modern time volume 2.* Oxford university press, New York Oxford.

[7] Ottergren, E. (2004). *Sonja Kovalevsky 1850-1891.* Stockholm universitet: Matematiska institutionen.
`https://www2.math.su.se/gemensamt/sonja/`. (Hämtad 2018-05-01)

[8] Simmons.G.F. (1991) *Differential equations with applications and historical notes* New York.

[9] Smeds, F. (2005). *Integralekvationer.* Karlstads universitet

[10] Stewart. I. (2017) *Significant figures lives and works of trailblazing mathematicians.* London: Profile books ltd.