



UPPSALA
UNIVERSITET

Institutionen för pedagogik,
didaktik och utbildningsstudier

Självständigt arbete 1 för
grundlärare Fk-3 och 4-6, 15 hp

Blir våra elever kompetenta matematiker?

En studie om vilka möjligheter mellanstadieelever har att utveckla matematiska kompetenser när de arbetar med algebra i läroböcker.

Elin Abrahamsson och Isa Vallien

Handledare: Robin Samuelsson

Examinator: [examinator är den som leder ventileringsseminariet, anges *efter* seminariet]

1. Sammanfattning

Denna läroboksanalys har undersökt i vilken utsträckning elever ges möjlighet att utveckla matematiska kompetenser när de arbetar med algebra i läroböcker. Två läroböcker i samma läroboksserie har analyserats, en för årskurs 4 respektive årskurs 6. Detta för att kunna undersöka om det finns en progression, förvärvat kunskap som byggs vidare på, mellan läroböckerna.

Enligt den teoretiska utgångspunkten som analysen baseras på finns sex matematiska kompetenser. Läroböckernas algebrauppgifter analyserades för att se vilken eller vilka av dessa kompetenser som gavs möjlighet att utvecklas i varje uppgift. Kompetenserna delades sedan in i nivåerna *ingen*, *liten*, *medelstor* eller *stor utsträckning*.

Resultatet visade att samma matematiska kompetenser förekom i lika stor utsträckning i båda läroböckerna, med ett undantag. En kompetens förekom i *ingen utsträckning* i årskurs 4 och i *liten utsträckning* för årskurs 6. Två kompetenser förekom i *liten utsträckning* för årskurs 4 och tre kompetenser för årskurs 6. Samma kompetens utvecklas i *medelstor utsträckning* och *stor utsträckning* i båda läroböckerna. Progression identifierades i fyra kompetenser. En kompetens delades upp i två underkategorier för att se om en progression fanns mellan läroböckerna inom denna specifika kompetens. Det fanns en progression.

Den matematiska kompetens som inte ges möjlighet att utvecklas har i tidigare forskning visats viktig. Att den inte ges möjlighet att utvecklas kan ha att göra med att den inte är med i läroplanen för grundskolan (Lgr11, 2018). En annan studie med samma teoretiska utgångspunkt har gjorts på nationella prov. I studierna förekom en kompetens i olika utsträckning på grund av att studierna valt att definiera den på olika sätt. Studierna visar i stort sett samma resultat vad gäller progression mellan årskurser.

Slutsatsen är att kompetenserna hade behövt ges möjlighet att utvecklas i större utsträckning i läroböckerna, samt att Lgr11 skulle behöva ha med alla sex kompetenserna i läroplanen.

Nyckelord: Matematik, Läroboksanalys, Kompetens, Algebra, Utveckla

Innehållsförteckning

1. Sammanfattning	3
2. Inledning	6
2.1. Didaktisk relevans	7
2.2. Studiens struktur och upplägg	7
2.3. Arbetsfördelning	7
3. Bakgrund	8
3.1. Lgr11:s fem förmågor	8
3.2. De fem förmågornas ursprung	8
3.3. Läromedel	9
3.4. Bakgrundens relevans	10
4. Tidigare forskning	11
4.1. Forskning om kompetenser	11
4.1.1. Mathematical Competencies: A Research Framework (MCRF)	11
4.1.2. Nationella prov	12
4.2. Forskning om algebra som undervisningsinnehåll	12
4.3. Studiens bidrag	13
5. Teoretisk utgångspunkt	14
5.1. MCRF och matematiska kompetenser	14
5.1.1. Problemlösningskompetens (PLK)	14
5.1.2. Resonemangskompetens (RK)	15
5.1.3. Procedurkompetens (PK)	15
5.1.4. Representationskompetens (RPK)	15
5.1.5. Sambandskompetens (SK)	15
5.1.6. Kommunikationskompetens (KK)	15
7. Syfte och frågeställningar	16
7.1. Frågeställningar	16
8. Metod	17
8.1. Urval	17

8.2. Avgränsning	18
8.3. Analysmetod	19
8.3.1. Problemlösningskompetens (PLK).....	19
8.3.2. Resonemangskompetens (RK)	20
8.3.3. Procedurkompetens (PK)	20
8.3.4. Representationskompetens (RPK).....	20
8.3.5. Sambandskompetens (SK)	21
8.3.6. Kommunikationskompetens (KK).....	21
8.4. Etiska överväganden.....	22
9. Analysresultat	23
9.1. Mera Favorit Matematik 4a (MFM 4a).....	23
9.2. Mera Favorit Matematik 6a (MFM 6a).....	25
9.3. Progression.....	27
9.3.1. Progression inom en kompetens - Procedurkompetens (PK).....	29
9.4. Sammanfattning av analysresultat.....	30
10. Diskussion	31
10.1. Representationskompetens (RPK) - Pusselbiten som saknas	31
10.2. Studiens analysresultat i förhållande till kompetenser i nationella prov	32
10.3. Fortsatt forskning	33
10.4. Sammanfattning av diskussion.....	34
11. Konklusion	35
12. Referenslista.....	36
13. Bilagor	39
13.1. Bilaga 1. Läroboksanalys av Mera Favorit Matematik 4a.....	39
13.2. Bilaga 2. Läroboksanalys av Mera Favorit Matematik 6a.....	42

2. Inledning

Vi som lärarstudenter har under våra tre år av studier kommit i kontakt med skolvärlden, bland annat genom den verksamhetsförlagda utbildningen. I denna kontakt har vi noterat att läroböcker spelar en stor roll i elevers lärande. Detta gäller inte minst under matematiklektioner där vi noterat att elever, nästan helt utan variation, arbetar i sina matematikläroböcker. Detta, kombinerat med det faktum att vi båda har ett stort intresse för matematik och dess olika uttryckssätt, gjorde att valet av ämne var enkelt. Studien kommer att handla om vilka möjligheter elever har att utveckla kompetenser kopplade till läroplanen när de arbetar med algebra i utvalda läroböcker. Vi gör detta för att få en bättre bild av vad som krävs av oss som framtida lärare när det kommer till matematikundervisningen.

Under den verksamhetsförlagda utbildningen har vi upplevt att matematik är ett ämne som upplevs av många elever som tråkigt. Vår fundering är huruvida det kan finnas ett samband mellan elevers olust inför ämnet matematik och undervisningens stora fokus på att arbeta enskilt i läroböcker. Det är därför positivt att *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet* (Lgr11, 2018, s. 55) belyser och lägger stort fokus på de fem matematiska förmågor som beskrivs senare i denna studie. Kompetens är ett nyckelbegrepp i studien, men förmåga används när det syftas på Lgr11:s fem matematiska förmågor. Begreppen innebär dock samma sak. Förmågornas närvaro i läroplanen bör uppmuntra lärare att variera sin undervisning bortom läroboken och det enskilda arbetet. Däremot är inte läroböcker enbart något negativt i undervisningen. Tvärtom kan de vara en stor hjälp för lärare att följa läroplanens centrala innehåll. Vore det inte bra om de också kunde bidra till att utveckla samtliga matematiska förmågor?

Elin Abrahamsson har genom sina år i grundskolan och gymnasiet haft turen att ha haft några otroligt bra matematiklärare som har gjort avsteg från läroböckerna men fortfarande lyckats få ihop undervisningen. Lärarna skapade problemlösningssuppgifter, som eleverna fick arbeta med både enskilt och i grupp. De visade också engagemang och intresse för sitt eget ämne som ledde till att Abrahamsson visste att matematik kunde vara roligt trots att dåliga lärare kom i vägen ibland. Isa Valliens intresse ökade ju högre upp i skolväsendet hon kom. Det var inte förrän på universitetet som hon verkligen fick upp ögonen för matematik. Det ska enligt Abrahamsson och Vallien inte ta hela skolgången att finna ett intresse för matematik. Det är självklart att ett större intresse finns för vissa ämnen, men att inte tycka om ett ämne som direkt följd av hur undervisningen bedrivs är inte rätt. Elever ska känna att matematik är stimulerande, omväxlande och utvecklande. De behöver känna att det som lärs ut har ett syfte och att de kommer få användning för det i fortsatta studier eller i verkliga livet.

2.1. Didaktisk relevans

I skolan och lärarutbildningen finns ett fokus på *den didaktiska triangeln*, som ger en bild av vad didaktik är. Den didaktiska triangeln har tre komponenter: innehåll, elev och lärare (Kansanen, 2000, ss. 40-42). För att denna studie ska ha en didaktisk relevans har vi genom studiens gång fokuserat på kopplingen mellan elev och innehåll. I studien analyseras läroböcker som kan kopplas till komponenten innehåll i den didaktiska triangeln. Komponentens elev i den didaktiska triangeln berörs då det är elever som genom läroböckerna har möjlighet att utveckla matematiska kompetenser. Även den sista komponenten, lärare, vävs in genom att lärarens roll att undervisa kompetenserna diskuteras i avsnitten Bakgrund och Diskussion.

2.2. Studiens struktur och upplägg

Studien fortsätter efter avsnittet Inledning med avsnittet Bakgrund som beskriver Lgr11:s matematiska förmågor och hur de har kommit till. I avsnittet Bakgrund finns även information om läromedel och läroböcker vilket är viktigt för denna studie. I avsnittet Tidigare Forskning berörs kompetenser och algebra som undervisningsinnehåll. Efterföljande avsnitt Metod behandlar studiens urval, avgränsning och analysmetod. Avsnittet Analys presenterar vad vi med hjälp av metoden kommit fram till när läroböckerna analyserades. Sedan följer avsnittet Diskussion där jämförelser med tidigare forskning samt resultat från analysen diskuteras och problematiseras. Vidare forskning kommer även diskuteras. Studien avslutas med avsnittet Konklusion där slutsatser tas upp. Studiens struktur kan ses mer i detalj i innehållsförteckningen.

2.3. Arbetsfördelning

Under studiens gång har Abrahamsson varit huvudansvarig för avsnitten Tidigare Forskning och Teori medan Vallien ansvarat för avsnitten Bakgrund och Metod. Detta innebär att var och en gjort utkast till dessa avsnitt följt av samarbete som har lett till en slutgiltig version. Analysen har delats upp på så vis att Abrahamsson analyserat en av läroböckerna medan Vallien analyserat den andra. Efter den första analysen byttes läroböckerna och analysen gjordes en gång till för att försäkra att analysmetoden följts på samma sätt båda läroböckerna. Analysen har sedan granskats ännu en gång för att säkerställa att allt är korrekt inlagt i Bilaga 1 och 2. Avsnitten Sammanfattning, Inledning, Diskussion och Konklusion har skrivits tillsammans.

3. Bakgrund

I detta avsnitt beskrivs *Läroplan för Grundskolan, Förskoleklassen och Fritidshemmets* (Lgr11) (2018) fem matematiska förmågor och den forskning som ligger till grund för dem. Vidare beskrivs läroböckers roll i matematikundervisningen i Sverige samt hur läromedel har granskats historiskt och idag. Avsnittet avslutas med en koppling till studiens syfte.

3.1. Lgr11:s fem förmågor

I Lgr11 (2018, s. 55) presenteras fem förmågor som omfattas av undervisningen i matematik på mellanstadiet:

- *Problemlösningsförmåga* innebär att elever ska kunna värdera olika matematiska metoder för att lösa problem, samt att kunna formulera egna problem.
- *Begreppsförmåga* är elevers förmåga att kunna använda och sammankoppla matematiska begrepp.
- *Metodförmåga* handlar om att lösa rutinuppgifter med hjälp av matematiska metoder.
- *Resonemangsförmåga* är elevers förmåga att resonera med matematiska argument samt följa andras matematiska resonemang.
- *Kommunikationsförmåga* handlar om att kunna uttrycka sig matematiskt i samtal, argument och redogörelser.

(Lgr11, 2018, s. 54)

3.2. De fem förmågornas ursprung

I syftesbeskrivningen för matematik i *Läroplan, Examensmål och Gymnasiegemensamma Ämnen för Gymnasieskola* (Lgy11) (2011, ss. 90-91) beskrivs sju matematiska förmågor. De fem förmågorna i Lgr11 (2018, s. 55) är fem av dessa sju förmågor. Juter (2014, s. 1) beskriver att framställningen av förmågorna i Lgr11 och Lgy11 skett genom inspiration från ett danskt projekt vid namn *Kompetencer og Matematiklaering* (KOM-projektet) (Niss and Højgaard Jensen, 2002). KOM-projektet (Niss and Højgaard Jensen, 2002) kartlägger åtta matematiska kompetenser. Kompetenserna är olika, men hör enligt Niss och Højgaard (2011, s. 50) ihop och överlappar ofta varandra. En matematisk kompetens kan inte bemästras enskilt, utan utvecklas i samband andra matematiska kompetenser.

KOM-projektets åtta kompetenser är *matematiskt tänkande-kompetens*, *problemlösnings-kompetens*, *modelleringskompetens*, *resonemangskompetens*, *representationskompetens*, *kommunikationskompetens*, *symbol- och formelkompetens* och *matematisk teknikkompetens* (Niss & Højgaard, 2011, ss. 51-52)¹.

De förmågor, eller kompetenser, som finns med i både Lgr11 (2018, s. 55) och KOM-projektet (Niss & Højgaard, 2011, ss. 51-52) är *problemlösningskompetens* som enligt KOM-projektet innebär att skapa och lösa matematiska uppgifter som kräver att man utforskar hur de ska lösas (Niss & Højgaard, 2011, s. 55), *resonemangskompetens*, som i KOM-projektet definieras som förmågan att kunna följa, formulera och utvärdera matematiska resonemang (Niss och Højgaard, 2011, s. 52), samt *kommunikationskompetens*, som definieras som förmågan att kunna kommunicera och förstå matematik såväl muntligt som skriftligt i kontakt med olika mottagare och avsändare. Det finns vissa skillnader mellan kompetenserna i KOM-projektet och förmågorna i Lgr11. Även de av Lgr11:s förmågor som inte har motsvarigheter i KOM-projektet är inspirerade av KOM-projektet (Juter, 2014, s.1).

3.3. Läromedel

Enligt Statens offentliga utredningars (SOU) utredning *Skola för Bildning* definieras läromedel som "sådant som lärare och elever väljer att använda för att uppnå uppsatta mål" (SOU 1992:94, s. 170). Eftersom definitionen är bred väljer denna studie att använda begreppet *lärobok*. Det är ett mer begränsat begrepp som beskriver de böcker som i denna studie analyseras.

Att granska läroböcker är relevant då de frekvent används i undervisning i grundskolan, inte minst inom matematikundervisningen. Skolverket (Nationella utvärderingen av grundskolan: sammanfattande huvudrapport, 2004, s. 9) genomförde en nationell utvärdering av grundskolan med syftet att visa på måluppfyllelsen i alla ämnen som undervisas i grundskolan, samt se skillnaden mellan grundskolan under 90-talet och början av 2000-talet. Den nationella utvärderingen (Nationella utvärderingen av grundskolan: sammanfattande huvudrapport, 2004, ss. 45-46) visar att tonvikten på vardagligt och praktiskt bruk av matematik, samt kommunikation har ökat i läroplanen för matematik. I praktiken sker däremot majoriteten av matematikundervisningen isolerat från både lärare och klasskamrater, då eleverna arbetar enskilt i sina matematikläroböcker (Nationella utvärderingen av grundskolan: sammanfattande huvudrapport, 2004, ss. 45-46). Den vanligaste kontakten under matematikundervisningen är med en lärare som går runt under det enskilda arbetet och hjälper till (Nationella utvärderingen av grundskolan: sammanfattande huvudrapport, 2004, ss. 45-46).

¹ Fri översättning från engelska.

En annan aspekt som gör granskning av läroböcker relevant och aktuell är att ansvaret att granska läroböcker idag ligger hos förlagen och konsumenterna. Innan 1991 granskades alla läroböcker som gavs ut av Skolöverstyrelsen ,en statlig myndighet (Johansson Harrie, 2009, s. 46).

Granskningen föranleddes för att kunna hålla nere priserna på läroböckerna, eftersom de under en lång period köptes in av elevernas familjer (Johansson Harrie, 2009, s. 57). De granskades också för att garantera att läroböckerna höll en hög kvalitet (Johansson Harrie, 2009, s. 59). De argument mot statlig granskning, som i längden ledde till att den avskaffades, var bland annat att det ansågs svårt att hitta lämpliga personer att granska läroböckerna, samt att förlagen själva började kontrollera och granska sina egna läroböcker i högre utsträckning (Johansson Harrie, 2009, s. 78). Läromedelsgranskningen upphörde 1991 då Skolöverstyrelsen avvecklades (Johansson Harrie, 2009, s. 100).

Efter avvecklingen fick förlag och lärare själva ta ansvar för granskning och kontroll av läroböcker, och så har det varit sedan dess (Johansson Harrie, 2009, s. 223). En rapport från 2014 genomförd av Skolvärlden (Stridsman, 2014) visar att sju av tio lärare anser att det är helt upp till dem att granska och välja läroböcker. Johansson Harrie (2009, s. 223) framför att lärare i sin granskning av läromedel bör analysera deras relevans i förhållande till rådande läroplaner och kursplaner.

3.4. Bakgrundens relevans

Studien undersöker hur väl matematiska kompetenser, kopplade till läroplanens fem matematiska förmågor, ges möjlighet att utvecklas i läroböcker. Studiens fokus är relevant då läroböcker används frekvent inom matematikundervisningen och att det idag i princip är lärarens ansvar att granska de läroböcker som används.

4. Tidigare forskning

I detta avsnitt behandlas tidigare forskning gällande matematiska kompetenser och hur de kan analyseras genom teoretiska ramverk. Ett specifikt ramverk samt en undersökning presenteras, innan forskning om algebra tas upp. Avsnittet avslutas med ett stycke om hur denna studie gör ett vetenskapligt bidrag.

4.1. Forskning om kompetenser

Tidigare studier har gjorts kring matematiska kompetenser. Fokus i dessa studier har i allmänhet legat på specifika kompetenser (Säfström, 2013, s. 37). Flera forskare menar att det kan bero på att det inte finns tydliga riktlinjer eller ramverk när det kommer till kompetenserna som ett kollektiv (Boesen; Lithner, & Palm, 2018; Lithner, Bergqvist, Bergqvist, Boesen, Palm & Palmberg, 2010; Säfström, 2013).

4.1.1. Mathematical Competencies: A Research Framework (MCRF)

Niss och Højgaards (2002) KOM-projekt som nämnts i avsnittet Bakgrund har använts som inspiration för att skapa nya ramverk (Boesen; Lithner & Palm, 2018; Lithner m.fl., 2010). Lithner m.fl. (2010, ss. 157-158) har författat *Mathematical competencies: a research framework* (MCRF) som är ett ramverk med sex kompetenser, som skapades i syftet att analysera provuppgifter, bland annat nationella prov. Lithner m.fl. (2010) komprimerade i MCRF Niss och Højgaard Jensens (2002) åtta kompetenser till sex; *problemlösningskompetens*, *resonemangskompetens*, *procedurkompetens*, *representationskompetens*, *sambandskompetens* och *kommunikationskompetens*. MCRF:s sex kompetenser är helt åtskilda, till skillnad från de åtta kompetenserna i KOM-projektet, som alla överlappar varandra (Lithner m.fl., 2010, s. 159). Kompetenserna går igenom mer grundligt i avsnittet Teoretisk Utgångspunkt.

Både Lithner m.fl. (2010, ss. 159-160) och Niss och Højgaard Jensen (2002) anser att de matematiska kompetenserna har två sidor: analytisk och produktionsaspekt. Den analytiska aspekten av kompetenserna handlar om att förstå och analysera matematiska uppgifter och produktionsaspekten handlar om hur eleven praktiskt löser matematikuppgifter (Lithner m.fl., 2010, s. 160). För att kunna analysera produktionsaspekten av uppgifter har MCRF tagit fram tre kompetensrelaterade aktiviteter; *Interpret*, *Do and Use* och *Judge*. *Interpret* stimuleras genom att tolka information relaterad till de matematiska kompetenserna. *Do and Use* stimuleras när kompetenserna aktiveras för att lösa en faktisk uppgift. *Judge* stimuleras genom att tolka och värdera matematiska val, argument och lösningar (Lithner m.fl., 2010, ss. 159-160).

4.1.2. Nationella prov

MCRF:s sex kompetenser har använts som ramverk för att analysera empirisk data (Boesen; Lithner & Palm, 2018; Säfström, 2013). Boesen, Lithner och Palm (2018, s. 109) skrev artikeln *Assessing mathematical competencies: an analysis of Swedish national mathematics tests* med MCRF som ramverk för sin analys av nationella prov i matematik. De motiverar sin studie genom att belysa att kompetenserna har blivit tydligare i den svenska läroplanen genom åren (Boesen; Lithner & Palm, 2018, s. 110). Boesen, Lithner och Palm (2018, s. 113) använder sig både av kompetenserna och de kompetensrelaterade aktiviteterna och motiverar detta med att de kompetensrelaterade aktiviteterna är viktiga därför att kompetenserna endast kan utvecklas när en elev engagerar sig i en kompetensrelaterad aktivitet.

Resultatet av Boesen, Lithner och Palms (2018, s. 119) studie visar att *procedur-* och *kommunikationskompetens* är de kompetenser som testas mest i de nationella proven. Resultaten visar även att *resonemangskompetens* testas mer i de äldre årskurserna än de yngre, samt att de yngre har färre möjligheter att utveckla *sambands-* och *kommunikationskompetens* (Boesen; Lithner & Palm, 2018, s. 119). Sammanfattningsvis visar studien att alla kompetenser testas i nationella proven och att detta gäller för alla årskurser (Boesen; Lithner & Palm, 2018, s. 120). De kompetensrelaterade aktiviteterna stimuleras inte i lika stor utsträckning, *Interpret* och *Do and Use* stimuleras mer än *Judge* som endast stimuleras på en handfull av uppgifter (Boesen; Lithner & Palm, 2018, ss. 120-121). *Judge* stimulerades på matematikuppgifter där eleven uppmanades att visa sina uträkningar (Boesen; Lithner & Palm, 2018, s. 121). Boesen, Lithner och Palms studie visar även att *Do and Use* stimuleras på 10 av de 45 uppgifterna (22 %) som i de nationella proven för årskurs 5 testar *kommunikationskompetens* (2018, s. 119).

4.2. Forskning om algebra som undervisningsinnehåll

Algebra har i flera forskningsartiklar framställts som viktig i matematikundervisningen och för elevers framtida liv i samhället samt grundläggande för fortsatta studier (Agoestanto, Sukestiyarno, Isnarto, Rochmad & Lestari, 2019; National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000; Olteanu, 2003; Star, Durkin, Gogolen, Lynch, Newton, Rottle-Johnson & Pollack, 2014; Welder, 2012). Studierna fokuserar på hur algebra ska läras ut på ett så effektivt sätt som möjligt, eftersom det är många som understryker att algebra är svårt för elever att förstå (Agoestanto m.fl., 2019; Hulse, Daigle, Manzo, Braith, Harrison & Ottomar, 2019; Olteanu, 2003; Star m.fl., 2014). Vissa tror att man genom jämförelser får en bättre förståelse för algebra (Star m.fl., 2014; Ziegler & Stern, 2015). Andra forskningsartiklar nämner att problematiken med algebra har sitt ursprung i aritmetiken och att eleverna inte bemästrar de fyra räknesätten på ett korrekt sätt (Hulse m.fl., 2019; Olteanu, 2003). Hulse m.fl. (2019, s. 423) menar att problemen

med algebra beror på att det är första gången eleverna får arbeta med matematik genom att konkretisera det abstrakta.

Det finns tidigare forskning som nämner hur elevers problem med algebra kan undvikas eller upptäckas tidigt. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000, s. 35) menar att sannolikheten att elever lär sig komplex matematik ökar längre fram i undervisningen om de introduceras tidigt med korrekta algebraiska termer och tankesätt. VanDerHeyden och Burns (2009, ss. 72-73) beskriver matematisk kompetens som en förmåga som utvecklas över tid om den repeteras regelbundet och om möjlighet ges att automatisera matematiska formler och metoder. Det är enligt VanDerHeyden och Burns (2009, ss. 72-73) viktigt att belysa att förmågan har möjlighet att utvecklas hos alla.

4.3. Studiens bidrag

Denna studie är en läroboksanalys med fokus på i vilken utsträckning elever får utveckla MCRF:s samtliga sex kompetenser när de arbetar med algebra. Säfström (2013) menar att tidigare forskning har genomförts utförligt på enskilda kompetenser medan denna studie inkluderar alla kompetenser inom algebra, ett begränsat matematiskt område. Alla kompetenser inkluderas i analysen för att få ett bredare resultat och en ökad förståelse.

5. Teoretisk utgångspunkt

I detta avsnitt beskrivs den teoretiska utgångspunkt som ligger till grund för läroboksanalysen. Sex matematiska kompetenser beskrivs ingående.

Denna studie använder den tidigare nämnda artikeln *Mathematical competencies: a research framework* (MCRF) (Lithner m.fl., 2010) med dess sex kompetenser som teoretisk utgångspunkt. MCRF:s ramverk är inspirerat av Niss och Højgaard Jensens KOM-projekt (2002), som tas upp i avsnittet Tidigare Forskning, samt National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000) *Principles and standards for school mathematics*. Niss (2003, s. 6) säger att det är genom att besitta matematiska kompetenser som matematik kan bemästras.

5.1. MCRF och matematiska kompetenser

Valet att fokusera specifikt på MCRF:s (Lithner m.fl., 2010) sex kompetenser och inte NCTM (2000) eller KOM-projektets är för att MCRF:s kompetenser skapades för att analysera empirisk data, exempelvis uppgifter från nationella prov i matematik (Lithner m.fl., 2010, s. 157). Denna studie analyserar uppgifter i läroböcker vilka liknar uppgifter från nationella prov. MCRF:s ramverk passar därför denna studie. Dessutom kan MCRF:s sex kompetenser kopplas till Lgr11:s fem förmågor (Lgr11, 2018, s. 55). De sex kompetenserna är också mer tydligt definierade och därmed mer mätbara än KOM-projektets åtta kompetenser, som överlappar varandra. *Matematisk kompetens* definieras i denna studie på samma sätt som i Niss (2003, ss. 6-7): Matematisk kompetens är förmågan att kunna förstå, använda sig av och avväga matematiska metoder. De sex kompetenserna från MCRF (Lithner m.fl., 2010), *problemlösningskompetens*, *resonemangskompetens*, *procedurkompetens*, *representationskompetens*, *sambandskompetens* och *kommunikationskompetens*, förklaras ingående i kommande underavsnitt för att ge förståelse för vad respektive kompetens innebär.

5.1.1. Problemlösningskompetens (PLK)

PLK är förmågan att lösa ett matematiskt problem (Lithner m.fl., 2010, s. 161). Denna studie använder NCTM:s (2000, s. 51) definition av *problemlösning* där ett problem kännetecknas av att strategin för att kunna lösa problemet är okänd i uppgiften.

5.1.2. Resonemangskompetens (RK)

RK är förmågan att kunna motivera slutsatser och val genom matematiska argument (Lithner m.fl., 2010, ss. 161-162). Lithner (2007, s. 261) definierar matematiska argument som argument som rättfärdigar varför slutsatser är sanna eller rimliga genom resonemang som är förankrade i matematiska komponenter eller deras egenskaper.

5.1.3. Procedurkompetens (PK)

PK är förmågan att kunna utföra matematiska procedurer (Lithner m.fl., 2010, s. 162). En matematisk procedur definieras av Lithner m.fl. (2010, s. 162) som en sekvens av accepterade matematiska handlingar som används för att lösa en matematisk uppgift. Att tillämpa en procedur är att genomföra en eller flera matematiska handlingar för att lösa en uppgift (Lithner m.fl., 2010, s. 162).

5.1.4. Representationskompetens (RPK)

RPK är förmågan att konkretisera någonting matematiskt abstrakt (Lithner m.fl., 2010, ss. 162-163). RPK handlar om att kunna omvandla matematiska enheter till något konkret, antingen mentalt eller fysiskt (Lithner m.fl., 2010, ss. 162-163). Begreppet enhet innefattar så väl abstrakta som konkreta aspekter av matematik. Det kan till exempel röra sig om begrepp, diagram, räknesätt eller symboler.

5.1.5. Sambandskompetens (SK)

SK är förmågan att se samband mellan olika matematiska enheter, konkreta och abstrakta (Lithner m.fl., 2010, s. 163). SK behövs för att genomföra processen att koppla ihop och se en länk eller relation mellan enheter (Lithner m.fl., 2010, s. 163).

5.1.6. Kommunikationskompetens (KK)

KK är förmågan att kommunicera om eller med hjälp av matematik (Lithner m.fl., 2010, s. 165). Lithner m.fl. (2010, s. 165) definierar kommunikation som en process att utbyta information med hjälp av till exempel symboler eller språk. För att någonting ska definieras som en kommunikation krävs en avsändare, en mottagare och ett medium där samtliga förstår informationen. Kommunikation behöver inte gå åt två håll, utan kan ske från lärare till elev, eller läroboksförfattare till elev (Lithner m.fl., 2010, s. 165).

7. Syfte och frågeställningar

Syftet med denna studie är att analysera läroböcker i matematik, för att se vilka möjligheter elever har att utveckla matematiska kompetenser när de använder sig av läroböckerna. Fokus är på algebrauppgifter i läroböckerna. Studien jämför dessutom i vilken utsträckning kompetenserna utvecklas i en lärobok för en årskurs 4 i förhållande till en för årskurs 6.

7.1. Frågeställningar

1. Vilka möjligheter har, samt i vilket utsträckning kan elever utveckla matematiska kompetenser när de arbetar med algebra i läroböcker för årskurs 4 och 6?
2. Hur ser progressionen ut i en läroboksserie i matematik beträffande matematiska kompetenser inom området algebra från årskurs 4 till 6?

8. Metod

I detta avsnitt avhandlas och motiveras urval av läroböcker samt studiens avgränsning. Dessutom visas hur de sex kompetenserna operationaliseras, det vill säga omvandlas från teori till praktik, under rubriken analysmetod.

Denna studie är en *kvantitativ, univariant* och *multimodal* läroboksanalys (Chirstoffersen & Johannessen, 2012; Jewitt, 2008, s. 246). En *kvantitativ metod* är enligt Chirstoffersen & Johannessen (2012, s. 163) en metod där data statistiskt analyseras genom siffror eller tal som kan räknas. En *univariant analys* (Christoffersen & Johanssen, 2012, s. 163) kännetecknas av att enskilda variabler analyseras var för sig. *Multimodalitet* är ett begrepp som beskriver att kommunikation sällan handlar om endast språk, utan att bilder, symboler och andra uttryck också är av vikt (Jewitt, 2008, s. 246). I analysen kommer inte endast uppgifters text att analyseras, utan även tillhörande bilder, eftersom de ofta är av relevans. Detta gör analysen multimodal.

Begreppet *progression* är centralt i denna studie och ett nyckelord i den andra frågeställningen. I denna studie definieras progression på samma sätt som från ett urval ur *Uppsala Universitets Pedagogiska Uppslagsbok* där progression innebär att elever och studenter ges möjlighet att bygga vidare på kunskaper och färdigheter som de förvärvat.²

8.1. Urval

För att välja en läroboksserie att analysera gjordes ett slumpmässigt urval (Denscombe, 2016, s. 68). De läroböcker som fanns tillgängliga granskades, listades och lottades sedan. Av de tillgängliga läroböckerna togs de som inte bestod av en serie för hela mellanstadiet bort, eftersom syftet är att analysera en lärobok för årskurs 4 och en lärobok för årskurs 6. Därefter togs läroböcker tryckta före 2011 bort för att säkerställa att läroböckerna som analyseras har en koppling till *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet (Lgr11)* (2018), som är den nuvarande läroplanen. De resterande läroboksserierna lottades slumpmässigt genom att deras namn skrevs upp på lappar och blandades, följt av att en drog.

Läroboksserierna som var med i lottningen var *Koll på matematik*, *Matteborgen direkt*, *Bas Favorit matematik*, *Mera Favorit matematik*, *Eldorado Matte*, *Prima Formula* och *Uppdrag Matte Mattespanarna*.

² Definition från ett utdrag ur Uppsala Universitets Pedagogiska Uppslagsbok som blivit utdelad till författarna av denna studie från Enheten för Pedagogisk Utveckling vid Uppsala Universitet.

Den läroboksserie som blev framlottad var Mera Favorit Matematik där läroböckerna för årskurs 4 och årskurs 6 heter Mera Favorit Matematik 4a och Mera Favorit Matematik 6a.

Mera Favorit Matematik har samma innehåll men fler utvecklande uppgifter än Bas Favorit Matematik, som ges ut av samma förlag (Studentlitteratur, u.å. A). Studentlitteratur AB (Studentlitteratur, u.å. A) uppmanar på sin hemsida att välja Mera Favorit Matematik i stället för Bas Favorit Matematik som klassuppsättning. Båda läroböckerna är baserade på Lgr11 (Studentlitteratur, u.å. B). I analysen tar vi inte hänsyn till att Mera Favorit Matematik anges vara en något svårare lärobok enligt förlaget eftersom det skett ett slumpmässigt urval där både Bas Favorit Matematik och Mera Favorit Matematik varit med. Syftet med studien är inte heller att analysera specifika svårighetsgrader utan att studera i vilken utsträckning matematiska kompetenser ges möjlighet att utvecklas i enskilda uppgifter.

8.2. Avgränsning

För att avgränsa sker analysen på ett specifikt område som baseras på tre punkter från Centrala Innehåll för årskurs 4-6 inom matematik i Lgr11 (2018, s. 57). Samtliga tre finns under kategorin algebra. De tre punkterna är “Obekanta tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol.”, “Enkla algebraiska uttryck och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven.” samt “Metoder för enkel ekvationslösning.” (Lgr11, 2018, s. 57).

Dessa tre centrala innehåll valdes eftersom algebra är en stor del av Centralt Innehåll för årskurs 4-6 samt Kunskapskraven för årskurs 6 (Lgr11, 2018, ss. 57-62). En annan aspekt som påverkar valet av område är att uppgifter som utvecklar dessa centrala innehåll finns med i de slumpmässigt valda läroböckerna.

Analysen berör algebrauppgifter från läroböckerna Mera Favorit Matematik 4a (MFM 4a) och Mera Favorit Matematik 6a (MFM 6a). Enligt Kiselman och Mouwitz (2016, s. 11) definieras *algebra* som en “gren av matematiken där man studerar grupper, ringar, kroppar och liknande strukturer”. Algebra introduceras oftast med att räkna med okända variabler (Kiselman & Mouwitz, 2016, s. 11). Samtliga uppgifter som analyseras handlar om att räkna med, eller skriva uttryck med okända variabler. Uppgifterna innefattar bland annat att lösa ekvationer med obekanta tal men även att skriva uttryck med obekanta tal utan likhetstecken.

I denna studie analyseras de uppgifter som läroboksförfattarna själva anger handlar om algebra. Det är delar av kapitlet *Taluppfattning, statistik och algebra* i MFM 4a (Asikainen; Nyrkinen; Rokka & Vehmas, 2014) och kapitlet *De fyra räknesätten, algebra och funktioner* i MFM 6a (Asikainen; Nyrkinen; Rokka & Vehmas, 2016). Uppgifterna som behandlar algebra omfattar 168 uppgifter i

MFM 4a och 96 uppgifter i MFM 6a. Deluppgifter, såsom exempelvis 1a och 1b analyseras enskilt, då eleven får större chans att utveckla en kompetens om den repeteras i flera deluppgifter. För att lika många uppgifter ska analyseras i båda läroböckerna görs ett slumpmässigt urval av 96 uppgifter från MFM 4a via en slumpvalsgenerator.

De valda uppgifterna i läroböckerna analyseras utifrån *Mathematical competencies: a research frameworks* (MCRF) (Lithner m.fl., 2010) sex kompetenser. MCRF som ramverk för analys innehåller två variabler: kompetenser och kompetensrelaterade aktiviteter (Lithner m.fl., 2010). Denna studie ämnar endast analysera en av dessa variabler, kompetenserna. Detta beslut har tagits på grund av att studien kopplar MCRF:s sex kompetenser till Lgr11:s fem förmågor, som inte tar hänsyn till hur förmågorna stimuleras (genom vilken typ av aktivitet) utan endast om de stimuleras eller inte.

8.3. Analysmetod

Analysen görs på en uppgift i taget. Sammantaget 96 uppgifter per lärobok med tillhörande bilder analyseras och en tabell fylls i. En uppgift kan ge möjlighet att utveckla flera matematiska kompetenser. Se exempel i tabell X, där analysen gjorts på en uppgift som utvecklar tre kompetenser: PLK, RK och SK. De fullständiga tabellerna för läroboksanalysen finns i Bilaga 1 för Mera Favorit Matematik 4a och Bilaga 2 för Mera Favorit Matematik 6a.

Tabell X.

Uppgift	PLK	RK	PK – en handling	PK – flera handlingar	RPK	SK	KK
14	X	X				X	

Problemlösningskompetens (PLK), resonemangskompetens (RK), procedurkompetens (PK), representationskompetens (RPK), sambandskompetens (SK) och kommunikationskompetens (KK).

Nedan följer en beskrivning av hur den teoretiska utgångspunkten operationaliseras, utvecklas i praktiken, samt exempel på uppgifter som ger möjlighet att utveckla varje kompetens var för sig. Exempeluppgifterna är författade av Abrahamsson och Vallien.

8.3.1. Problemlösningskompetens (PLK)

PLK är kompetensen att lösa problem (Lithner, 2010, s. 161). Problemlösning innebär enligt National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000, s. 52) att lösa en uppgift där metoden för hur uppgiften ska lösas inte är känd. I den här studien kategoriseras alla uppgifter där metoden för beräkningen inte är given som uppgifter där PLK utvecklas. Uppgifter som innehåller begrepp som addera eller subtrahera räknas inte till denna kategori eftersom metoden då är känd.

Exempel på uppgift som utvecklar PLK: *Tommy är två år yngre än Annika. Tillsammans är de 16 år. Hur gamla är Tommy och Annika?* Uppgiften utvecklar PLK för att metoden för uträkningen inte är given.

8.3.2. Resonemangskompetens (RK)

Enligt Lithner m.fl. (2010, s. 161) innebär RK att kunna motivera slutsatser och val med matematiska argument. I denna studie kategoriseras uppgifter där eleven uppmanas motivera och förklara sina lösningar eller val som uppgifter som utvecklar RK. Elever har ofta möjlighet att motivera sina val och lösningar matematiskt, men det är inte alltid det uppmanas i uppgiften.

Exempel på uppgift som utvecklar RK: *Tommy är två år yngre än Annika. Tillsammans är de 16 år. Hur gamla är Tommy och Annika? Visa hur du löser uppgiften.* Uppgiften utvecklar RK då den uppmanar eleven att visa sin lösning.

8.3.3. Procedurkompetens (PK)

PK utvecklas när matematiska procedurer görs (Lithner m.fl., 2010, s. 162). I denna läroboksanalys kommer alla uppgifter som kräver att eleven utför en eller flera matematiska handlingar för att lösa uppgiften att kategoriseras som uppgifter som utvecklar PK. Läroboksanalysen skiljer på uppgifter där eleven behöver utföra en matematisk handling, kontra uppgifter där eleven behöver utföra flera matematiska handlingar för att lösa uppgiften. En uppgift där eleven till exempel bildar uttryck utifrån en bild räknas inte som PK-utvecklande, eftersom att omvandla från en representationsform till en annan inte i denna studie räknas som att utföra en matematisk handling. Eleven utvecklar då andra kompetenser.

Exempel på uppgift som utvecklar PK: *Tommy är två år yngre än Annika. Tillsammans är de 16 år. Hur gamla är Tommy och Annika?* Uppgiften utvecklar PK och kategoriseras som att uppmana att utföra en procedur med flera matematiska handlingar eftersom flera handlingar behöver genomföras för att lösa uppgiften.

8.3.4. Representationskompetens (RPK)

RPK är förmågan att skapa konkreta (mentala eller fysiska) representationer för abstrakta matematiska enheter (Lithner m.fl., 2010, ss. 162-163). I denna studie kommer uppgifter som på något sätt uppmanar eleven att göra en omvandling från något abstrakt till något konkret att kategoriseras som uppgifter som utvecklar RPK.

Exempel på uppgift som utvecklar RPK: *Formulera en textfråga som passar till ekvationen $(x-2)+x=16$.* Uppgiften utvecklar RPK då eleven behöver konkretisera en ekvation, som är något abstrakt, för att lösa uppgiften.

8.3.5. Sambandskompetens (SK)

SK innebär att kunna se samband mellan diverse abstrakta och konkreta matematiska enheter (Lithner, 2010, s. 163). Det kan vara samband mellan två konkreta representationer av något abstrakt, två abstrakta enheter eller samband inom dessa enheter och representationer. Denna studie menar att det även krävs sambandskompetens för att se samband mellan en konkret enhet och dess representation. Det kan till exempel handla om samband mellan bilder, symboler och begrepp. I den här läroboksanalysen kommer uppgifter där eleven behöver identifiera och presentera samband för att lösas uppgiften att kategoriseras som SK-utvecklande.

Exempel på uppgift som utvecklar SK: *Tommy är två år yngre än Annika. Tillsammans är de 16 år. Hur gamla är Tommy och Annika? Skriv en ekvation och lös uppgiften.* Uppgiften utvecklar SK eftersom eleven behöver omvandla från text till ekvation för att lösa uppgiften, detta kräver att man kan se samband.

8.3.6. Kommunikationskompetens (KK)

KK är förmågan att kommunicera om eller med hjälp av matematik (Lithner m.fl., 2010, s. 165). Enligt Lithner m.fl. (2010, s. 165) omfattas ensidig kommunikation i begreppet kommunikation vilket innebär att KK utvecklas när eleven läser och tolkar läroboksförfattarens kommunicerade budskap. Som tidigare nämnts kan en analys med MCRF som ramverk genomföras med två variabler, kompetenser och kompetensrelaterade aktiviteter (jmf. Boesen Lithner & Palm, 2018). Lithner m.fl. (2010, s. 165) beskriver att KK stimuleras genom den kompetensrelaterade aktiviteten *Do and Use*, när eleven kommunicerar något till en mottagare. I denna studie används denna definition. Om analysen gjorts helt enligt Lithner m.fl. (2010, s. 165) definition hade KK inte behövts analyseras, eftersom alla uppgifter självskrivet ger möjlighet att utveckla kompetensen. Valet av denna snävare definition har även gjorts för att lättare kunna relatera kompetensen till förmågorna i Lgr11 (2018). *Kommunikationsförmåga* beskrivs i Lgr11 som att kunna “använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser” (Lgr11, 2018, s. 55). I Lgr11 innefattas alltså inte ensidig tolkning av text som kommunikation. Med bakgrund i detta kategoriseras alla uppgifter som uppmanar eleven att kommunicera något till en mottagare som KK-utvecklande. Att skriva sina svar i läroboken räknas inte som att kommunicera något till en mottagare i denna studie.

Exempel på uppgift som utvecklar KK: *Tommy är två år yngre än Annika. Tillsammans är de 16 år. Hur gamla är Tommy och Annika? Lös uppgiften och förklara för en kompis hur du gjort.* Uppgiften utvecklar KK då den uppmanar eleven att kommunicera något till en mottagare.

8.4. Etiska överväganden

För att försäkra god forskningsetik följer denna studie Vetenskapsrådets *God forskningsseds generella levnadsregler* (Vetenskapsrådet, 2017) som ger etiska riktlinjer när det kommer till forskning. En av dessa riktlinjer är att inte göra någon annan person skada. I denna läroboksanalys är det tydligt vilka läroböcker som analyseras och författarnas namn, samt förlaget nämns. Resultatet i denna studie skulle kunna skada författarna och förlagets rykte. Av detta skäl har ett mail skickats till förlaget Studentlitteratur AB där frågan ställts om tillåtelse att använda deras läroböcker för analys. Studentlitteratur AB har svarat och godkänt att deras läroböcker analyseras. Detta gjordes efter urvalsprocessen och påverkade inte valet av läroböcker.

God forskningsseds generella levnadsregler (Vetenskapsrådet, 2017) tar även upp vikten av att tala sanning om det analysresultat som framförs i studien samt öppet redovisa vilka metoder som används. Varken Abrahamsson eller Vallien har någon koppling till förlagen som var med i urvalsprocessen vilket resulterar i att det inte finns några bakomliggande intressen som kan påverka urvalsprocessen eller analysresultaten. Studien plagierar heller inte andras resultat eller tankar.

9. Analysresultat

I detta avsnitt presenteras och tydliggörs resultaten av läroboksanalyserna av Mera Favorit Matematik 4a och 6a. Därefter presenteras progressionen från Mera Favorit Matematik 4a till Mera Favorit Matematik 6a. Avsnittet avslutas med en sammanfattning.

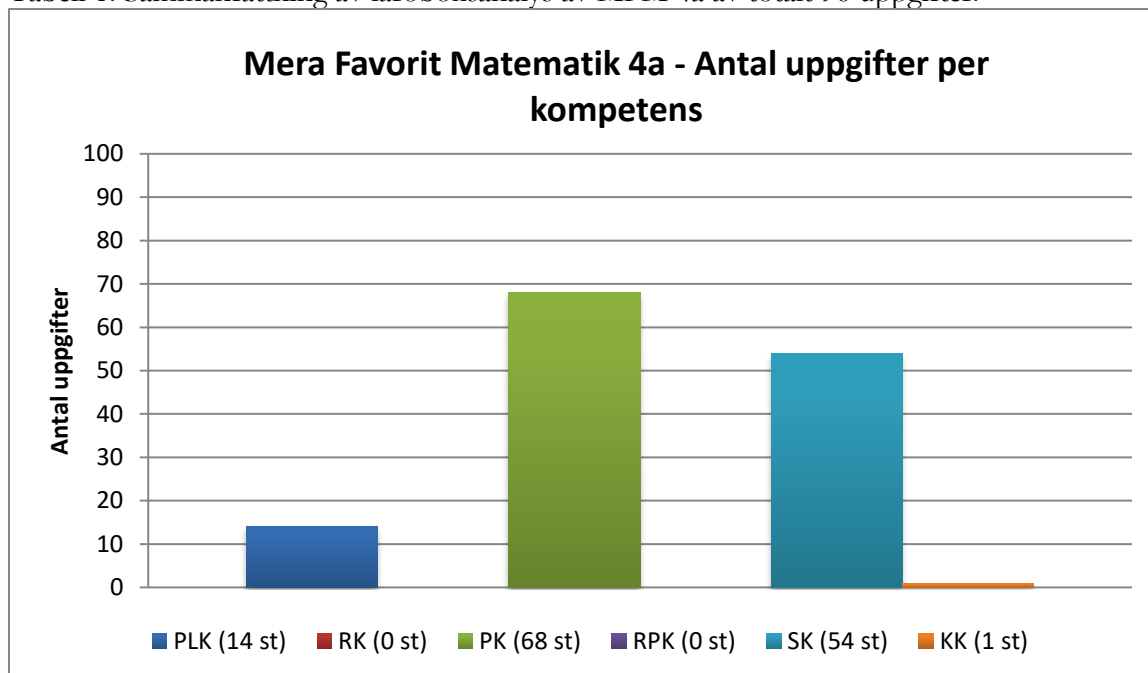
Den första frågeställningen lyder: Vilka möjligheter har, samt i vilken utsträckning kan elever utveckla matematiska kompetenser när de arbetar med algebra i läroböcker för årskurs 4 och 6? I detta avsnitt kommer utsträckning att definieras i fyra nivåer: *ingen* (0 %), *liten* (1 – 32 %), *medelstor* (33 – 65 %) och *stor utsträckning* (66 – 100 %). Den andra frågeställningen lyder: Hur ser progressionen ut i en läroboksserie i matematik beträffande matematiska kompetenser inom området algebra för årskurs 4-6? Progression definieras som att bygga på redan förvärvad kunskap.

Procenttal är inkluderade i presentationen av analysresultaten och är då avrundade till närmsta tiondel. En uppgift kan utveckla en *eller* flera av de sex kompetenserna. För att få en mer detaljerad redogörelse av läroboksanalyserna se Bilaga 1 och 2.

9.1. Mera Favorit Matematik 4a (MFM 4a)

Tabell 1 visar antalet uppgifter som ger möjlighet att utveckla varje kompetens i MFM 4a. I tabell 1 finns kompetenserna på tabellens vågräta axel medan antal uppgifter kompetenserna ges möjlighet att utvecklas i ses på den lodräta axeln. För en mer detaljerad redogörelse av läroboksanalysen av MFM 4a se Bilaga 1.

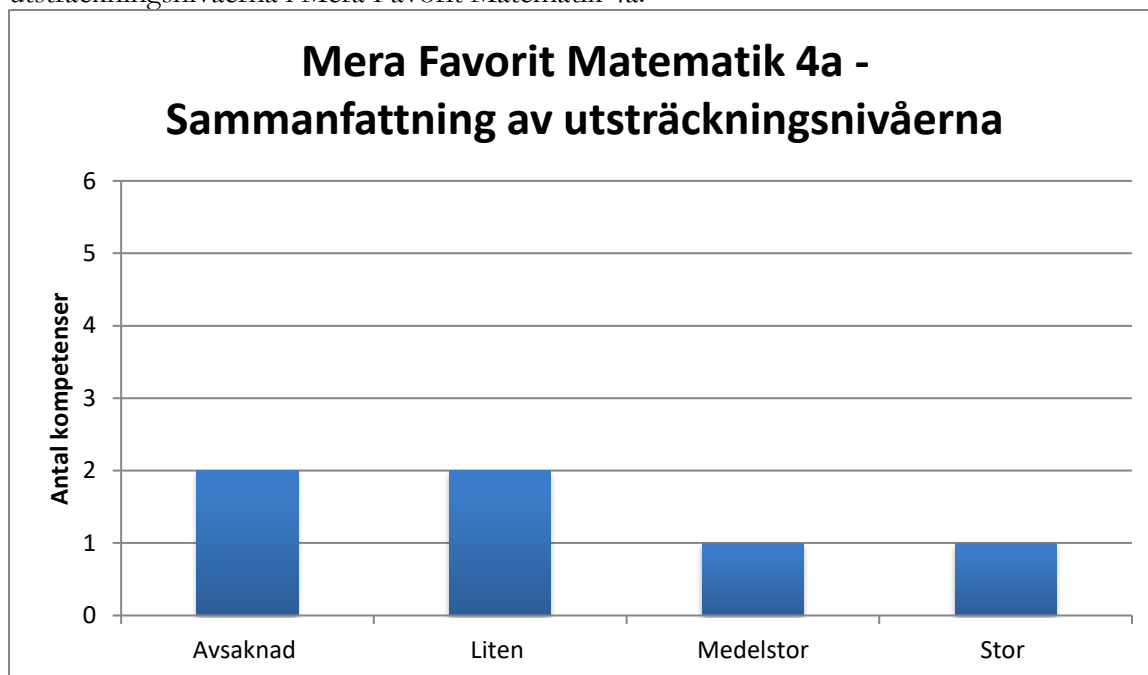
Tabell 1. Sammanfattning av läroboksanalys av MFM 4a av totalt 96 uppgifter.



Problemlösningskompetens (PLK), resonemangskompetens (RK), procedurkompetens (PK), representationskompetens (RPK), sambandskompetens (SK) och kommunikationskompetens (KK).

Tabell 1 visar att de kompetenser som eleven inte ges möjlighet att utveckla är RK och RPK. De utvecklas alltså i nivån *ingen utsträckning*. KK är den kompetens som eleven i minst utsträckning får möjlighet att utveckla, endast en (1 %) av de analyserade uppgifterna är KK-utvecklande. PLK utvecklas i 14 uppgifter (14,6 %). PLK och KK ges därmed i enlighet med studiens definition möjlighet att utvecklas i *liten utsträckning*. SK är den kompetens som ges möjlighet att utvecklas i näst störst utsträckning, då eleven ges möjlighet att utveckla den i 54 uppgifter (56,3 %). SK ges enligt studiens definition möjlighet att utvecklas i *medelstor utsträckning*. PK är den kompetens som ges möjlighet att utvecklas i störst utsträckning, och är den enda som förekommer i *stor utsträckning*. Eleven har möjlighet att utveckla PK i 68 uppgifter (70 %).

Tabell 2. Översikt över hur många kompetenser som ges möjlighet att utvecklas i de olika utsträckningsnivåerna i Mera Favorit Matematik 4a.

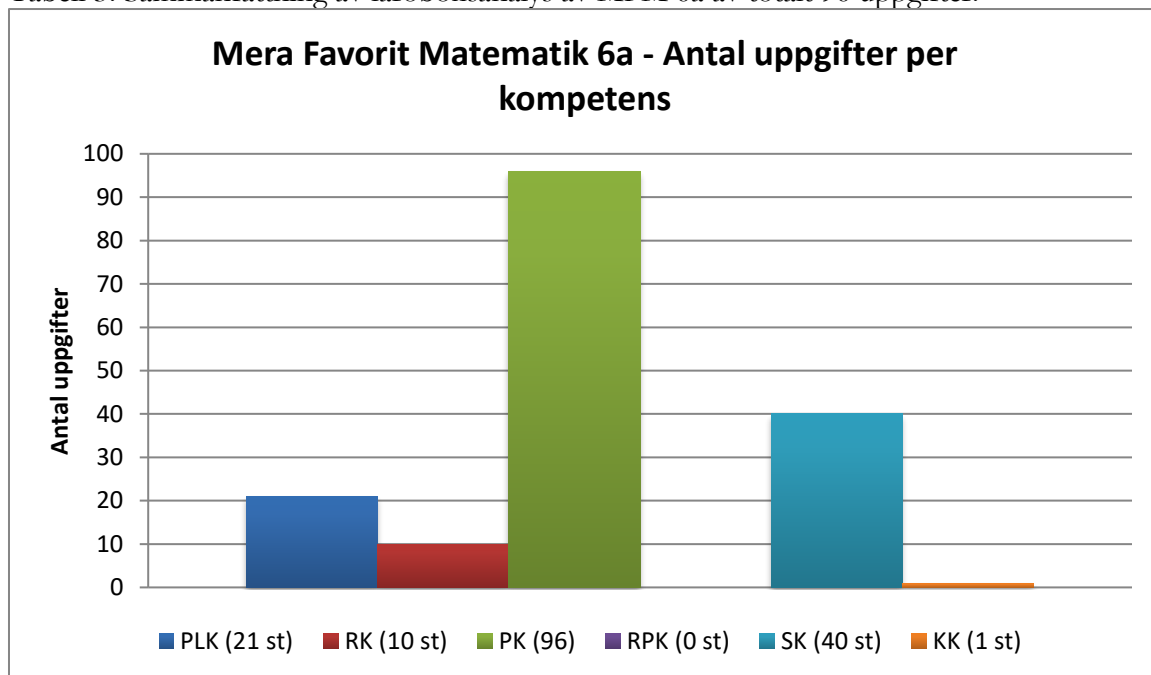


I vilket utsträckning de olika kompetenserna utvecklas definieras i fyra nivåer; *ingen* (0 %), *liten*- (1 – 32 %), *medelstor*- (33 – 65 %) och *stor utsträckning* (66 – 100 %).

9.2. Mera Favorit Matematik 6a (MFM 6a)

Tabell 3 visar antalet uppgifter som ger möjlighet att utveckla varje kompetens i MFM 6a. I tabell 3 finns kompetenserna på tabellens vågräta axel medan antal uppgifter kompetenserna ges möjlighet att utvecklas i ses på den lodräta axeln. För en mer detaljerad redogörelse av läroboksanalysen av MFM 6a se Bilaga 2.

Tabell 3. Sammanfattning av läroboksanalys av MFM 6a av totalt 96 uppgifter.

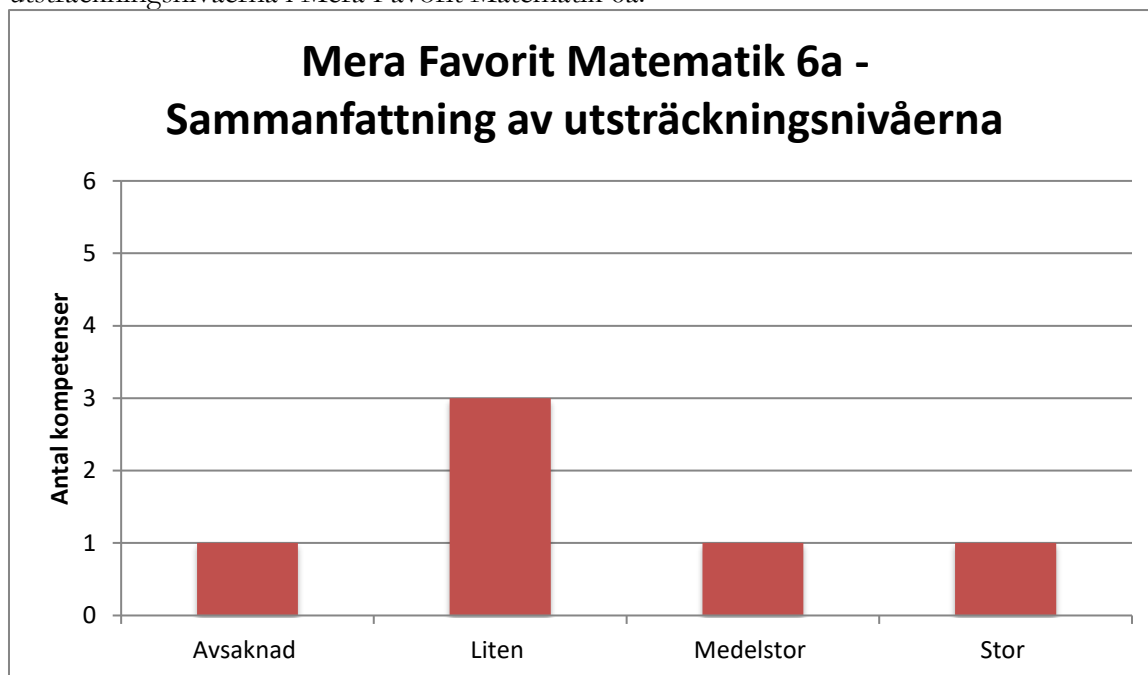


Problemlösningskompetens (PLK), resonemangskompetens (RK), procedurkompetens (PK), representationskompetens (RPK), sambandskompetens (SK) och kommunikationskompetens (KK).

RPK berörs inte i någon av de 96 uppgifterna. RPK motsvarar 0 % och är den kompetens som eleven har minst möjlighet att utveckla, den utvecklas i nivån *ingen utsträckning*. KK är också begränsad då den utvecklas i en uppgift (1 %) av totalt 96 uppgifter. RK har möjlighet att utvecklas i tio uppgifter (10,4 %) och PLK i totalt 21 uppgifter (21,9 %). KK, RK och PLK ges enligt studiens definition möjlighet att utvecklas i *liten utsträckning*.

SK utvecklas i totalt 40 uppgifter vilket motsvarar 41,7 %. Kompetensen som berör flest uppgifter är PK. PK berör samtliga 96 uppgifter vilket motsvarar 100 %. Dessa procentsatser betyder enligt studiens definition att SK ges möjlighet att utvecklas i *medelstor utsträckning* medan PK ges möjlighet att utvecklas i *stor utsträckning*. PK är kompetensen som eleven har störst möjlighet att utveckla.

Tabell 4. Översikt över hur många kompetenser som ges möjlighet att utvecklas i de olika utsträckningsnivåerna i Mera Favorit Matematik 6a.

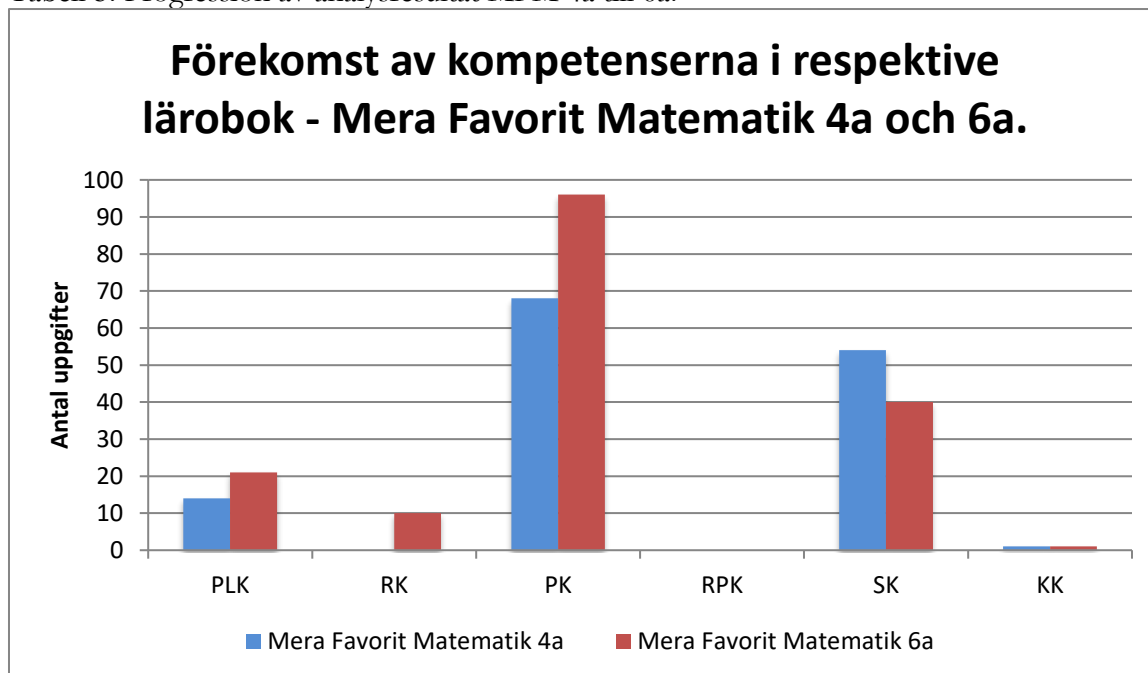


I vilket utsträckning de olika kompetenserna utvecklas definieras i fyra nivåer; *ingen* (0 %), *liten* (1 – 32 %), *medelstor* (33 – 65 %) och *stor utsträckning* (66 – 100 %).

9.3. Progression

En av forskningsfrågorna handlar om hur progressionen mellan de två analyserade läroböckerna, Mera Favorit Matematik (MFM) 4a och 6a, ser ut beträffande i vilken utsträckning elever får möjlighet att utveckla kompetenserna. I tabell 5 finns kompetenserna på tabellens vågräta axel medan i hur många uppgifter kompetenserna ges möjlighet att utvecklas ses på den lodräta axeln. Tabell 5 är även indelad i blåa och röda staplar, blå hänvisar till MFM 4a och röd till MFM 6a.

Tabell 5. Progression av analysresultat MFM 4a till 6a.



Problemlösningskompetens (PLK), resonemangskompetens (RK), procedurkompetens (PK), representationskompetens (RPK), sambandskompetens (SK) och kommunikationskompetens (KK).

Analysresultatet visar att kompetenserna förekommer i samma utsträckning enligt studiens definitioner *ingen, liten, medelstor* och *stor utsträckning*, förutom RK som i MFM 4a utvecklas i nivån *ingen utsträckning*, medan den utvecklas i *liten utsträckning* i MFM 6a. Förekomsten av uppgifter som utvecklar de olika kompetenserna skiljer sig dock åt inom dessa övergripande nivåer. Det finns fler PLK- och PK-utvecklande uppgifter i MFM 6a än i MFM 4a. Eleven får i MFM 4a möjlighet att utveckla dessa kompetenser för att senare, i sitt arbete i MFM 6a, fortsätta utvecklingen i större utsträckning, en progression sker. Möjligheten att utveckla KK skiljer sig inte mellan MFM 4a och MFM 6a, men eftersom den ges möjlighet att utvecklas i båda läroböckerna sker en progression. När det kommer till RPK sker inte en progression då kunskap inom denna kompetens inte utvecklas i någon av läroböckerna.

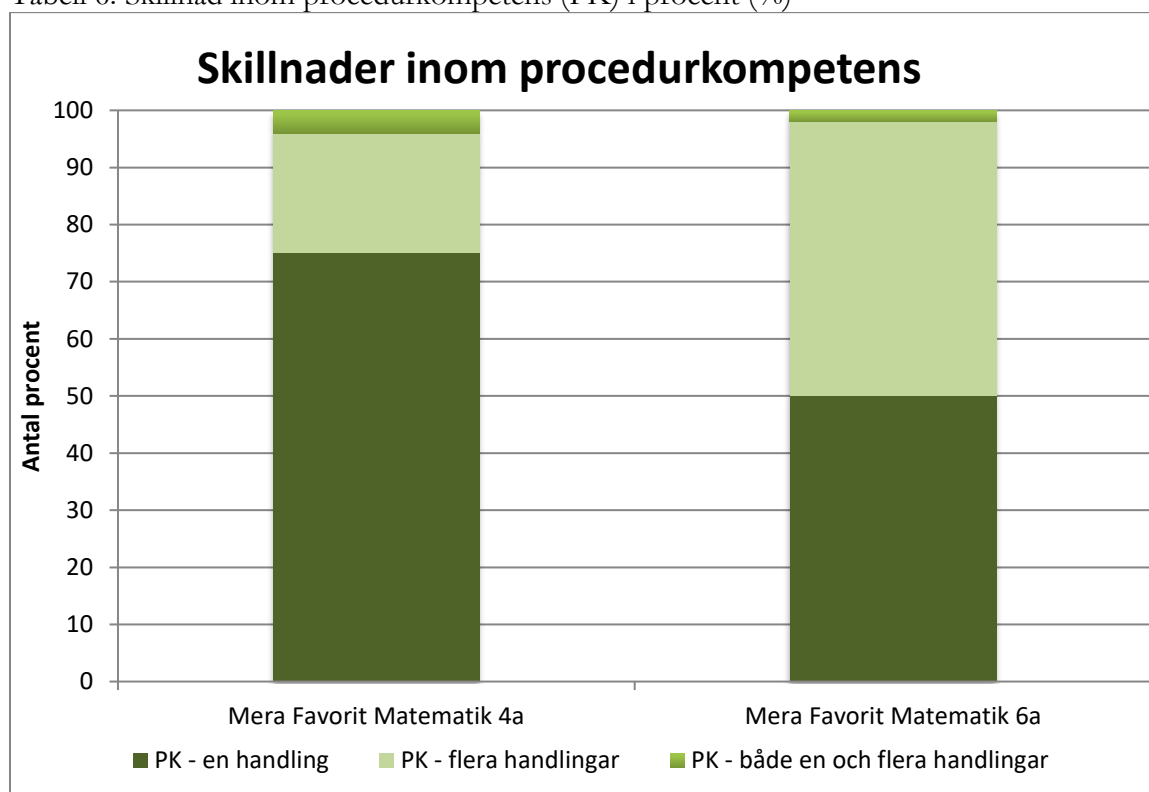
RK ges inte möjlighet att utvecklas i MFM 4a, men däremot i MFM 6a. Då denna kompetens inte utvecklas i MFM 4a finns det ingen kunskap att bygga vidare på i MFM 6a, vilket strider mot att det skulle ske en progression enligt studiens definition.

SK är den kompetens som utvecklas mer i MFM 4a än MFM 6a. En progression sker för att eleven får möjlighet att utveckla den kunskap som förvärvats i MFM 6a, om än i mindre utsträckning.

9.3.1. Progression inom en kompetens - Procedurkompetens (PK)

Som nämnt i avsnittet Metod skiljs PK-utvecklande uppgifter där eleven får utföra en matematisk handling i proceduren mot PK-utvecklande uppgifter där flera matematiska handlingar behöver utföras. Analysresultat visar som tydligt en progression. Resultatet av denna delning redogörs i tabell 6 och mer detaljerat i Bilaga 1 och 2. Tabell 6:s vågräta axel visar MFM 4a och 6a medan tabellens lodräta axel visar procent på samtliga PK-utvecklande uppgifter. Staplarna är indelade i tre sektioner; PK – en handling, PK – flera handlingar och PK – både en och flera handlingar.

Tabell 6. Skillnad inom procedurkompetens (PK) i procent (%)



I MFM 4a behöver eleven utföra en matematisk handling i 51 av de totalt 68 PK-utvecklande uppgifterna vilket motsvarar 75 %. 14 uppgifter (21 %) som utvecklar PK kräver att eleven behöver utföra flera matematiska handlingar för att lösa uppgiften. Tre uppgifter (4 %) i MFM 4a har kategoriserats som PK-utvecklande med både en och flera matematiska handlingar. Dessa uppgifter har haft flera procedurer i sig, varav en del krävt att en matematisk handling utförs och en del krävt att flera utförs.

I MFM 6a utvecklar 48 uppgifter PK med en matematisk handling, vilket motsvarar 50 % av de 96 PK-utvecklande uppgifterna. 46 av uppgifterna (48 %) utvecklar PK med flera matematiska handlingar. Två uppgifter (2 %) i MFM 6a har flera procedurer, som kräver både en och flera matematiska handlingar.

9.4. Sammanfattning av analysresultat

Den första frågeställningen i denna studie behandlar i vilken utsträckning elever får möjlighet att utveckla MCRF:s sex kompetenser när de arbetar med algebra i två utvalda läroböcker, Mera Favorit Matematik (MFM) 4a och 6a. MFM 4a och 6a har båda matematiska kompetenser som inte ges möjlighet att utvecklas. I MFM 4a är det *resonemangskompetens* (RK) och *representationskompetens* (RPK) medan det i MFM 6a endast är RPK. RK utvecklas i *liten utsträckning* i MFM 6a. *Problemlösningskompetens* (PLK) och *kommunikationskompetens* (KK) har eleven endast möjlighet att utveckla i *liten utsträckning* i båda läroböckerna. Den kompetens som ges möjlighet att utvecklas i *medelstor utsträckning* i båda läroböckerna är *sambandskompetens* (SK). Lika för läroböckerna är även att *procedurkompetens* (PK) förekommer i *stor utsträckning* i MFM 4a och 6a.

Den andra frågeställningen behandlar progression mellan MFM 4a och MFM 6a. Progression sker i kompetenserna PLK, RK, PK, SK och KK. De kompetenser som inte har en progression mellan läroböckerna är RK och RPK. RPK eftersom den inte ges möjlighet att utvecklas i någon av läroböckerna, och RK eftersom den inte ges möjlighet att utvecklas i MFM 4a.

Progression kan även synas efter en närmare analys av en av kompetenserna: PK. Uppgifterna som utvecklar PK skiljer sig, då vissa innehåller procedurer med en matematisk handling och vissa innehåller procedurer med flera matematiska handlingar. Analysen visar att det skiljer 54 % mellan andelen PK-utvecklande uppgifter som har en, kontra flera handlingar i MFM 4a. I MFM 6a är skillnaden inte lika stor, då skillnaden mellan andel PK-utvecklande uppgifter med en kontra flera matematiska handlingar endast är 2 %.

10. Diskussion

I detta avsnitt diskuteras den matematiska kompetens som inte ges möjlighet att utvecklas. Därefter jämförs studiens avsnitt Analysresultat i förhållande till avsnitten Bakgrund och Tidigare Forskning. Avsnittet avslutas med förslag på fortsatt forskning samt en sammanfattning av diskussionen.

10.1. Representationskompetens (RPK) - Pusselbiten som saknas

Representationskompetens (RPK), som handlar om att kunna representera något matematiskt abstrakt med något konkret, är den enda av de sex matematiska kompetenserna som inte ges möjlighet att utvecklas i varken Mera Favorit Matematik (MFM) 4a eller 6a. I avsnittet Tidigare Forskning presenteras en studie av Hulse m.fl. (2019) som menar att algebra är svårt eftersom det ofta är genom algebra eleven för första gången stöter på abstrakt matematik. Hulse m.fl. (2019) talar också om att eleven inte får tillräckligt med tillfällen att utveckla förmågan att representera konkreta enheter med abstrakta representationer (utveckla sin RPK). Boesen, Lithner och Palm (2018, s. 120) presenterar att samtliga av *Mathematical competencies: a research framework* (MCRF) sex kompetenser testas i nationella prov oavsett årskurs. RPK är en kompetens som finns med i både KOM-projektets åtta kompetenser (Niss and Højgaard Jensen, 2002) och MCRF:s sex (Lithner m.fl., 2010). Forskningen som nämnts tyder på att RPK, och andra former av abstrakt matematiskt tänkande är viktig för matematikinläring, inte minst när det kommer till algebra. Det gör studiens resultat intressant då RPK i läroböckernas algebrauppgifter ges möjlighet att utvecklas i nivån *ingen utsträckning*.

Denna studie definierar, baserat på Lithner m.fl. (2010, ss. 162-163), uppgifter som RPK-utvecklande om de uppmanar eleven att bilda en konkret representation av någonting matematiskt abstrakt. Definitionen av RPK är mer specifik än andra kompetenser, till exempel PK, som ges möjlighet att utvecklas i alla uppgifter där eleven behöver utföra en matematisk handling för att lösa uppgiften. En faktor som också kan förklara att RPK inte ges möjlighet att utvecklas enligt läroboksanalysen är att många algebrauppgifter i MFM 4a inte analyseras på grund av att samma antal uppgifter skulle analyseras i båda läroböckerna. Möjligheten finns att elever får möjlighet att utveckla RPK i de uppgifter som valdes bort genom slumpalsgeneratorn.

I denna studie har endast läroböcker analyserats, det betyder att det fortfarande finns möjlighet för eleven att utveckla RPK och andra matematiska kompetenser genom annan undervisning. Lärarhandledningen kan till exempel innehålla övningar som får eleven att engagera andra kompetenser, men det betyder också att läraren aktivt måste välja att använda sig av dessa

verktyg, vilket inte alla lärare gör. Som skolverkets nationella utvärdering (Nationella utvärderingen av grundskolan: sammanfattande huvudrapport, 2004) visar i avsnittet Bakgrund, sker majoriteten av all matematikundervisning med läroböcker. Då denna läroboksanalys resultat visar att RPK inte ges möjlighet att utvecklas i de analyserade läroböckerna är risken att eleven inte får möjlighet att utveckla RPK. Målet för läroboksförfattare borde vara att nå alla elever oavsett vilken lärare eleven råkar få, och borde därför sträva efter att ge elever möjlighet att utveckla alla MCRF:s matematiska kompetenser. Läroböckerna är dock inte baserade på MCRF:s sex kompetenser, utan Lgr11:s fem förmågor (Studentlitteratur, u.å. B) där RPK saknas (Lgr11, 2018, s. 55). Detta trots att RPK är viktig enligt tidigare forskning samt omfattas och testas i nationella prov (Boesen; Lithner & Palm, 2018, ss. 119-121).

Läroplanens fem matematiska förmågor kan vara positiva på så sätt att de kan driva lärare att variera sin undervisning, men de kan också ses som bristfälliga på vissa plan. Att lägga till eller göra de befintliga fem förmågorna tydligare eller mer omfattande i Lgr11 skulle eventuellt leda till att förlagen får en bättre grund när de utvecklar läroböcker. Kanske skulle då även kompetenser som RPK inkluderas och därmed få möjlighet att utvecklas.

10.2. Studiens analysresultat i förhållande till kompetenser i nationella prov

Boesen, Lithner och Palm (2018) genomförde en analys med MCRF (Lithner m.fl., 2010) som teoretisk utgångspunkt på nationella prov i matematik, som i vissa avseenden visar på ett snarlikt resultat som denna läroboksanalys. En fundamental skillnad är dock att alla kompetenser testas i de nationella proven för alla årskurser (Boesen; Lithner & Palm, 2018, s. 120), medan vissa kompetenser inte ges möjlighet att utvecklas i de delar som analyserats av läroböckerna i denna studie. En likhet är att *procedurkompetens* (PK) var den kompetens som förekom i störst utsträckning. Däremot var PK inte ensam om att testas mest i Boesen, Lithner och Palms studie, då *kommunikationskompetens* (KK) testades i liknande stor utsträckning. KK förekom endast i 1 % av uppgifterna i denna studies analyserade läroböcker: *Mera Favorit Matematik* (MFM) 4a och 6a. Detta beror på att denna studie använt en annan definition än Boesen, Lithner och Palm gällande KK, trots att MCRF använts som teoretisk utgångspunkt för båda studierna. I avsnittet Metod ifrågasätter denna studie MCRF:s hela definition av KK (Lithner m.fl., 2010, s. 165), vilken Boesen, Lithner och Palm (2018, s. 112) använder sig av. Begreppet kommunikation inkluderar där att läsa och tolka uppgifter (Lithner m.fl., 2010, s. 165), vilket innebär att alla uppgifter i läroböckerna skulle vara KK-utvecklande. Detta gör också att kompetensen inte lika lätt kan kopplas till Lgr11, som inte definierar med tolkning av text som kommunikation. Denna studie valde därför att använda sig av definitionen av KK när den stimuleras inom den kompetensrelaterade aktiviteten *Do and Use* (Lithner m.fl., 2010, s. 165) vilket innebär att en uppgift måste uppmana eleven att kommunicera något till en mottagare, för att räknas som KK-utvecklande i denna läroboksanalys. Detta är grunden till de stora skillnaderna i resultat.

Det är intressant att *Do and Use* som kompetensrelaterad aktivitet för KK ges möjlighet att utvecklas i *liten utsträckning* när eleven arbetar med algebra i läroböckerna, då Boesen, Lithner och Palms (2018, s. 119) resultat visar att den kompetensrelaterade aktiviteten *Do and Use* stimuleras i 10 av de 45 uppgifter (19 %) som testar KK i de nationella proven för årskurs 5.

I både denna läroboksanalys och Boesen, Lithner och Palms (2018) studie går det att identifiera skillnader gällande i vilken utsträckning kompetenserna får möjlighet att utvecklas och testas mellan olika årskurser. Vissa av dessa skillnader är lika i båda studierna. *Resonemangskompetens* (RK) utvecklas, och testas till exempel mer i de högre årskurserna enligt båda studiernas resultat. En skillnad mellan studierna är dock att *sambandskompetens* (SK) testas mer i de nationella proven för de äldre årskurserna enligt Boesen, Lithner och Palms resultat, medan SK utvecklas i större utsträckning i MFM 4a än i MFM 6a. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000, ss. 206-207) visar att det är viktigt att elever lär sig se samband mellan abstrakt och konkret tidigt för att algebra inte senare ska upplevas som svårt. Att eleven får chans att utveckla sambandskompetens i större utsträckning i MFM 4a än i MFM 6a kan bero på att det i MFM 4a förväntas vara första gången eleven stöter på algebra. Att det sedan minskar i MFM 6a, skulle kunna vara negativt, eftersom det enligt forskning är viktigt att alla delar av matematiken repeteras regelbundet för att den övergripande matematiska förmågan ska ha möjlighet att utvecklas (VanDerHeyden & Burns, 2009, ss. 72-73).

10.3. Fortsatt forskning

Denna studie har gjort ett kunskapsbidrag genom att visa hur matematiska kompetenser ges möjlighet att utvecklas i läroböcker samt hur progressionen kan se ut inom en läroboksserie. För att fortsätta forskningen som påbörjats i denna studie kan exempelvis liknande läroboksanalyser göras utifrån MCRF:s sex kompetenser, då mer omfattande. En läroboksanalys kan vara mer omfattande om fler årskurser, fler läroboksserier eller inkluderas andra undervisningsinnehåll. Sådana analyser kan ge en större förståelse varför elever har eller inte har svårt med vissa aspekter inom algebra i och med koppling till kompetenserna. En stor studie kan dessutom göras där elever regelbundet får algebrauppgifter i vilka alla kompetenserna berörs, och sedan utvärdera om det finns en ökad förståelse eller kunskap efter en viss period. En sådan studie kan visa om elever får ökad förståelse för algebra om de får möjlighet att utveckla samtliga matematiska kompetenser eller om det inte har någon påverkan. Oavsett resultat skulle det vara värdefull information för framtida elevers matematiska kompetensutveckling, matematikläroböcker och matematikundervisning.

Vidare forskning skulle även kunna göras på kompetensen *procedurkompetens*. Denna studie har gjort skillnad på procedurer som kräver en kontra flera matematiska procedurer. Studien visar en skillnad i frekvens mellan årskurserna 4 och 6. Det skulle vara intressant att följa upp detta i större utsträckning, och analysera fler läroböcker, samt studera vad skillnaden kan bero på och ha för konsekvenser.

10.4. Sammanfattning av diskussion

Diskussionen behandlar sammanfattningsvis det faktum att elevers *representationskompetens* (RPK) inte ges möjlighet att utvecklas i de analyserade läroböckerna och en jämförelse görs med en liknande studie som gjorts på nationella prov.

Att RPK inte ges möjlighet att utvecklas i läroböckerna problematiseras i relation till forskning som visar på dess betydelse, speciellt när det kommer till algebraundervisning. Att kompetensen inte ges möjlighet att utvecklas i läroböckerna förklaras med att det inte är en förmåga i Lgr11, vilket även det problematiseras.

Jämförelsen med Boesen, Lithner och Palms studie (2018) om vilka kompetenser som testas i nationella prov visar både likheter och skillnader. En likhet är att de båda visar att *resonemangskompetens* utvecklas, och testas mer i högre än lägre årskurser. En stor skillnad mellan studierna gäller i vilken utsträckning *kommunikationskompetens* utvecklas och testas, detta förklaras och diskuteras. En annan skillnad är att *sambandskompetensen* i denna läroboksanalys utvecklas mer i läroboken för yngre elever än i den för äldre, medan *sambandskompetens* ges möjlighet att utvecklas mer i de nationella proven för äldre elever än för yngre.

11. Konklusion

Studien har kommit fram till att de matematiska kompetenserna ges möjlighet att utvecklas i olika utsträckning i läroböckerna. Analysresultatet visar också att det finns stora likheter mellan årskurserna 4 och 6 gällande i vilken utsträckning kompetenserna ges möjlighet att utvecklas.

Vi anser att elever behöver ges möjlighet att utveckla kompetenserna i större utsträckning i sina läroböcker. *Procedurkompetens* är den enda kompetensen som ges möjlighet att utvecklas i *stor utsträckning*. I och med att majoriteten av matematikundervisningen sker genom läroböcker borde kompetenserna ges möjlighet att utvecklas i större utsträckning. Denna studie har dock bara analyserat algebrauppgifter, men eftersom det är ett av de mer komplexa matematiska områdena borde elevers matematiska kompetenser ges desto större möjlighet att utvecklas just där.

En tidigare studentuppsats skriven av Lundström (2010), som inte har diskuterats tidigare i studien, fick liknande resultat gällande *kommunikationskompetens* (KK) och *resonemangskompetens* (RK), då de ges liten möjlighet att utvecklas i läroböckerna som Lundström analyserade, såväl som i denna studie. Lundströms analyserade hela läroböcker vilket gör likheterna mer intressanta. Detta tyder på att denna studies resultat även kan gälla andra delar av läroboken. Om vissa matematiska kompetenser blir bortglömda i läroböckerna eller underrepresenterade kommer inte eleven att utveckla de kompetenserna och därmed få det svårare i den fortsatta matematikundervisningen.

Resonemangskompetens (RK) genomgick inte en progression från Mera Favorit Matematik 4a till 6a då eleven inte ges möjlighet att utveckla kompetensen i Mera Favorit Matematik 4a, vilket innebär att det inte finns någon kunskap att bygga vidare på i den senare läroboken. Detta tycker vi är konstigt eftersom att kunna argumentera för sina matematiska val och tillvägagångssätt är en kompetens som eleven kan ha stor användning för i vidare studier och andra aspekter i livet.

Det faktum att *representationskompetens* (RPK) inte ges möjlighet att utvecklas kan som sagt förklaras med att den inte finns med i läroplanen, vilket enligt oss borde ändras. Flera studier visar hur viktig RPK är för elevers matematiska förståelse och att den fungerar som en bro till att förstå algebra. Vi undrar varför den inte anses viktig nog att bli inkluderad i läroplanen.

12. Referenslista

Agoestanto, A., Sukestiyarno, Y. L., Isnarto, Rochmad & Lestari M. D. (2019). The position and causes of students errors in algebraic thinking based on cognitive style. *International Journal of Intruction*, 12(1), ss. 1431–1444.

Asikainen, K., Nyrkinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. (2014). *Mera Favorit Matematik 4a*. Lund: Studentlitteratur AB.

Asikainen, K., Nyrkinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. (2016). *Mera Favorit Matematik 6a*. Lund: Studentlitteratur AB.

Boesen, J., Lithner, J. & Palm, T. (2018). Assessing mathematical competencies: an analysis of Swedish national mathematics tests. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 62(1), ss. 109–124. doi: 10.1080/00313831.2016.1212256.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetoder för Lärarstudenter*. Lund: Studentlitteratur.

Denscombe, M. (2016). *Forskningshandboken - För Småskaliga Forskningsprojekt inom Samhällsvetenskaperna*. Lund: Studentlitteratur AB.

Hulse, T., Daigle, M., Manzo, D., Braith, L., Harrison, A. & Ottomar, E. (2019). From here to there! Elementary: a game - based approach to developing number sense and early algebraic understanding. *Educational Technology Research and Development*, 67(2), ss. 423–441. doi: 10.1007/s11423-019-09653-8.

Jewitt, C. (2008). Multimodality and literacy in school classrooms. *Review of Research in Education*, 32(1), ss. 241–267. doi: 10.3102/0091732X07310586.

Johnsson Harrie, A. (2009). *Staten och Läromedlen: En studie av den svenska statliga förhandsgranskningen av läromedel 1938-1991*. Diss. Linköping: Linköpings Universitet. <http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:217963/FULLTEXT02.pdf%5Cnhttp://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:liu:diva-18312>.

Juter, K. (2014). De matematiska förmågorna. *Lärportalen*. Undervisa matematik utifrån förmågorna, Del 1. Stockholm: Skolverket. <https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/apiv2/document/name/P03WCPLAR045335>

Kansanen, P. (2000). Kampen mellan vetenskap och lära. I Alerby, E., Kansanen, P. & Kroksmark, T. (red.) *Lära om Lärande*. Lund: Studentlitteratur, ss. 29-44.

Kieselmann, C. & Mouwitz, L (2016). *Matematiktermer för Skolan*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM).

Lgr11 (2018). *Läroplan för Grundskolan, Förskoleklassen och Fritidshemmet*. Stockholm: Skolverket.

Lgy11 (2011). *Läroplan, Examensmål och Gymnasiegemensamma Ämnen för Gymnasieskola*. Stockholm: Skolverket

Lithner, J. (2007). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), ss. 255–276. doi: 10.1007/s10649-007-9104-2.

Lithner, J., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Palm, T. & Palmberg B. (2010). Mathematical competencies: a research framework. I Bergsten, C, Jablonka, E. & Wedege, T. (red.) *Mathematics and Mathematics Education: Cultural and Social Dimensions*. Linköping: svensk förening för matematikdidaktisk forskning (SMDF), ss. 157–167. URN: urn:nbn:se:umu:diva-37367

Lundström, P. (2010). *Läromedel som Stöd eller Hinder? Analys av två läromedel i matematik utifrån kompetensmålen*. C-uppsats, Institution för pedagogik och didaktik. Göteborg: Göteborgs Universitet. http://ncm.gu.se/media/namnaren/npn/2011_4/lundstrom_uppsats.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Nationella utvärderingen av grundskolan 2003: Sammanfattande huvudrapport. (2004). Stockholm: Statens skolverk.

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project, *3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education*, ss. 116–124.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (red.) (2002). *Kompetencer og ideer og inspiration til udvikling kompetencer og matematiklæring ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Roskilde: Undervisningsministeriet. <http://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf>

Niss, M. & Højgaard, T. (red.) (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark* (IMFUFA tekst nr. 485/2011). Roskilde: Roskilde University.

Olteanu, C. (2003). Algebra – viktigt men svårt. *Nämnamnaren*, (3), ss. 35–39. http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/3539_03_3.pdf

SOU 1992:94. *Skola för bildning. Huvudbetänkande av läroplanskommittén*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Star, J. R., Durkin, K., Gogolen, C., Lynch, K., Newton, K., Rottle-Johnson, B. & Pollack, C. (2014). Learning from comparison in algebra. *Contemporary Educational Psychology*, 40, ss. 41–54. doi: 10.1016/j.cedpsych.2014.05.005.

Stridsman, S. (2014). *Åtta av tio lärare hinner inte granska läromedel*. Skolvärlden. <https://skolvärlden.se/artiklar/atta-av-tio-larare-hinner-inte-granska-laromedel> [2019-04-16].

Studentlitteratur (u.å. A). *Favorit Två Nivåer*. https://www.studentlitteratur.se/drupal/sites/default/files/kampanj/favorit_tva_nivaer_4-6.pdf [2019-05-08].

Studentlitteratur (u.å. B). *Om Favorit Matematik för åk 4-6 och Lgr 11*. https://www.studentlitteratur.se/drupal/sites/default/files/produkt/FavoritMatematik/38229_matis.pdf [2019-05-08].

Säfström, A. I. (2013). *Exercising Mathematical Competence: Practising Representation Theory and Representing Mathematical Practice*. Diss. Göteborg: Göteborgs universitet. <http://hdl.handle.net/2077/32484>

VanDerHeyden, A. M. & Burns, M. K. (2009). Performance indicators in math : implications for brief experimental analysis of academic performance. *Journal of Behavioral Education*, 18(1), ss. 71-91. doi: 10.1007/s10864-009-9081-x.

Vetenskapsrådet (2017). *God forskningssed*. Stockholm: Vetenskapsrådet. doi: 10.1063/1.4944399.

Welder, R. M. (2012). Improving algebra preparation: implications from research on student misconceptions and difficulties. *School Science and Mathematics*, 112(4), ss. 255–264. doi: 10.1111/j.1949-8594.2012.00136.x.

Ziegler, E. & Stern, E. (2015). Consistent advantages of contrasted comparisons: Algebra learning under direct instruction. *Learning and Instruction*, 41, ss. 41–51. doi: 10.1016/j.learninstruc.2015.09.006.

13. Bilagor

13.1. Bilaga 1. Läroboksanalys av Mera Favorit Matematik 4a

Sida	Uppgift	PLK	RK	PK-en	PK-flera	RPK	SK	KK
182	1a						X	
	1b						X	
	1d						X	
	1e						X	
	1f						X	
	2b						X	
	2c						X	
	2d						X	
183	3a						X	
	3b						X	
	3e						X	
	3g						X	
	3h						X	
	3f						X	
184	2						X	
	4						X	
185	6a	X		X			X	
	6b	X		X			X	
	6d	X		X			X	
	6e	X		X			X	
	7a	X			X		X	
186	1a			X				
	1b			X				
	1d			X				
	1f			X				
187	2a			X				
	2d				X			
	2f				X			
	3d			X				
	3e			X				

Sida	Uppgift	PLK	RK	PK-en	PK-flera	RPK	SK	KK
188	1			X			X	
	2			X			X	
	5			X	X			
189	6a			X				
	6b				X			
	7b			X			X	
	7c			X			X	
	8a	X			X			
	8b	X			X			
190	1b			X				
	1e			X				
	1f			X				
	1g				X			
191	2a			X			X	
	2f			X			X	
	2h				X		X	
	3c			X				
	3e			X				
	3f			X				
	3g			X				
192	1			X				
	2			X	X		X	
	4			X	X			
193	5						X	
	6a			X				
	6b			X				
	6c			X				
	6d	X			X			
	6f	X			X			
194	1a						X	
	1b						X	
	1c						X	
	1d						X	
	1e						X	
	1f						X	
	2a			X				

Sida	Uppgift	PLK	RK	PK-en	PK-flera	RPK	SK	KK
	2c			X				
	3a			X				
	3d			X				
195	4b			X			X	
	4d			X			X	
	4e			X			X	
	5a	X		X			X	
	5b	X		X			X	
	5c	X		X			X	
	5d	X		X			X	
196	1			X				
	2			X				
	6			X				
197	8				X		X	
	9	X			X		X	
199	2			X	X		X	X
203	4a						X	
	4b						X	
	4c						X	
	4d						X	
	4e						X	
	4f						X	
	5a			X			X	
	5b			X			X	
205	3a			X				
	3b			X				
	3c			X				
	3d			X				
	3e				X			
	3f			X				
Totalt	96	14	0	54	17	0	54	1

Problemlösningskompetens (PLK), resonemangskompetens (RK), procedurkompetens (PK), representationskompetens (RPK), sambandskompetens (SK) och kommunikationskompetens (KK).

13.2. Bilaga 2. Läroboksanalys av Mera Favorit Matematik 6a

Sida	Uppgift	PLK	RK	PK-en	PK-flera	RPK	SK	KK	
34	1a			X			X		
	1b			X			X		
	1c			X			X		
	1d				X		X		
	1e				X		X		
	1f				X		X		
35	2a			X					
	2b			X					
	2c			X					
	2d				X				
	2e				X				
	2f			X					
	2g			X					
	2h			X					
	2i			X					
	2j			X					
	3a			X			X		
	3b			X			X		
	3c			X			X		
	3d			X			X		
	3e				X		X		
	3f			X			X		
	36	1a			X			X	
		1b			X			X	
1c				X			X		
2a				X			X		
2b				X			X		
2c				X			X		
2d				X			X		
4				X	X				
37	7a				X				
	7b				X				
	7c				X				
	7d				X				
	8a	X			X		X		

Sida	Uppgift	PLK	RK	PK-en	PK-flera	RPK	SK	KK
	8b	X			X		X	
	8c	X			X		X	
39	1a	X	X	X			X	
	1b	X	X		X		X	
	1c	X	X		X		X	
	1d	X	X		X		X	
40	1a	X	X		X		X	
	1b	X	X		X		X	
	2a	X			X		X	
	2b	X			X		X	
	3				X		X	
41	4				X		X	
	5a	X	X		X		X	
	5b	X	X		X		X	
	6a				X			
	6b				X			
	6c				X			
	6d				X			
	7a	X	X		X		X	
	7b	X	X		X		X	
46	1			X	X		X	X
48	1a			X				
	1b				X			
	1c			X				
	1d			X				
	1e			X				
	1f			X				
	1g			X				
	1h				X			
49	6a				X			
	6b				X			
	8	X			X		X	
58	3a			X				
	3b			X				
	3c			X				
	3d			X				

Sida	Uppgift	PLK	RK	PK-en	PK-flera	RPK	SK	KK
	3e			X				
	3f				X			
62	5a			X				
	5b			X				
	5c			X				
	5d				X			
	5e			X				
	5f				X			
	8a	X			X			
	8b	X		X				
64	Röd 6a			X				
	Röd 6b			X				
	Röd 6c			X				
	Röd 6d			X				
	Gul 4a			X				
	Gul 4b			X				
	Gul 4c			X				
	Gul 4d			X				
	Gul 7a	X			X			
	Gul 7b	X			X			
	Grön 6a				X			
	Grön 6b				X			
	Grön 7a				X		X	
	Grön 7b				X		X	
	Grön 8	X			X			
Totalt:	96	21	10	50	48	0	40	1

Problemlösningskompetens (PLK), resonemangskompetens (RK), procedurkompetens (PK), representationskompetens (RPK), sambandskompetens (SK) och kommunikationskompetens (KK).