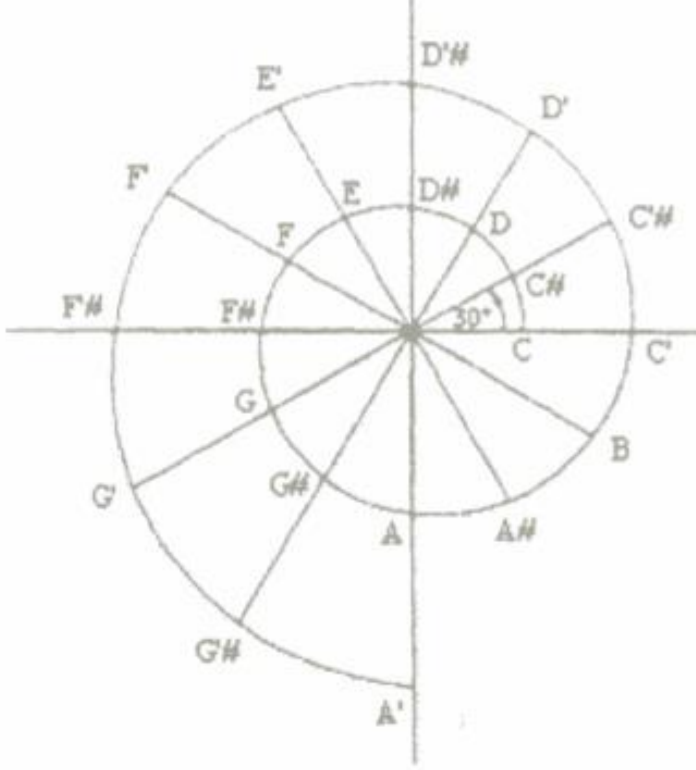


UPPSALA UNIVERSITET

MATEMATISKA ELEMENT INOM MUSIKALISKA FENOMEN

Redogörelse för oktavens uppdelning

SAMMANFATTNING

Trodde du att matematik och musik var separata ämnen utan förbindelse med varandra? Då har du inte mött Pythagoras, Descartes, Mersenne, Napier, Newton eller mig - samtliga intresserade av förbindelsen mellan musik och matematik. Detta är historien om hur de tillsammans skapade det system av toner som vi dagligen omges utav.

Marta Lindén

1MA079

Innehållsförteckning

1.0 Inledning

En vanlig uppfattning är att matematik är en hårt reglerad vetenskap som inte lämnar utrymme för kreativitet. Det är visserligen sant att matematik har som högsta sträva att vara logisk och på så sätt otvivelaktig i sina slutsatser. Dock rymmer matematik mer kreativitet än det ger sken av. Matematiker har genom flera tillfällen i historien använt ett kreativt arbetssätt för att nå flera upptäckter och logiska bevis. Parallellt med dessa upptäckter kan det diskuteras vad matematik är i relation till människan: är det något vi skapar eller något vi upptäcker? I det senare fallet kan matematik uppfattas som ett religiöst synsätt på världen där till synes otroliga sammanträffanden visar på hur komplex -och samtidigt logisk- vår värld är, uppbyggd från atomnivå till kontinenter. Å andra sidan kan vi se det som att matematiken konstruerar bryggor mellan olika fenomen som vi observerar i världen, och sammanbinder dem genom att formulera det observerade med siffrornas och de matematiska symbolernas språk.

Exempel på sådana observationer är de matematiska fenomenen som uppträder vid komponering av musik. Att det vi uppfattar som kreativt bottnar i matematiska mönster är både fascinerande och ett argument för att matematik i högsta grad är en kreativ vetenskap. Faktumet att ämnena har olika arbetssätt gör dem visserligen oförenliga i flera avseenden: musiker kan förlita sig på sitt gehör i sitt skapande medan matematiker har ett relativt oförlåtligt regelverk att ta hänsyn till i form av axiom. Schneiderman formulerade skillnaden som:

> *"Mathematics is like music that only musicians can hear"* (Schneiderman, 2011)

Med detta menar Schneiderman att matematik, till skillnad från musik, oftast uppskattas av dem som har kännedom om matematikens natur och dess karaktäristiska arbetssätt. Från detta följer i så fall ett behov av att skaffa oss tillräckliga matematiska kunskaper för att kunna uppskatta den matematik som återfinns inom musiken.

Sett till ämnenas likheter däremot, kan det tänkas att matematiker och musiker båda arbetar med ett återkommande mönster: att utifrån ett visst ramverk (till exempel en tonart respektive ett problem) använda sitt personliga tankesätt för att nå en produkt (en melodi eller en formel). Detta arbete är författat utifrån detta perspektiv i förhoppningen att såväl musiker som matematiker ska finna studien både intressant och greppbar. Områdenas gemensamma plattform kommer att utforskas mer specifikt med utgångspunkt i en av de mest grundläggande delarna inom musikteori: oktavens toner. Vi ska följa den kromatiska skalan från namngivningen av våra toner till beräknandet av de frekvenser som formulerades under 1600-talet och som vi i västvärlden använt för att stämma instrument sedan dess.

1.1 Syfte

Oktaven med dess 12 toner utgör en grundpelare i musikteori och påverkar naturligtvis hela processen inom komponering av, samt all undervisning inom musik. Därtill besitter oktaven i egenskap av dess matematiska härkomst många anknytningar till matematiska upptäckter. I detta arbete kommer denna koppling mellan matematik och musik att undersökas ur ett historiskt, matematiskt samt musikaliskt perspektiv för att belysa deras sammanvävda historia.

Dessa kopplingar mellan ämnena är föga förvånande sett till att studier av matematik och musik tidigare tillhörde samma vetenskapsområde. De föddes ur samma filosofi och tillhörde *quadrivium,* vilket var det mellersta av tre utbildningsnivåer under antikens Grekland. *Quadrivium* föregicks av *trivium* och eventuella studier därefter ledde till ren filosofi (Adeyemo, 2015). Detta sammanvävda perspektiv har dock försvunnit med tiden och dagens ämnesundervisning lär ut matematik och musik som skilda ämnen utan inbördes beblandning. Det torde vara relevant för de intresserade av ett av dessa läroämnen att ha kännedom om deras gemensamma historia och ge en större förståelse för hur de samverkat och påverkat varandra. Utöver förståelse för ämnets historia bidrar det med en bredare syn inom respektive ämnes tillämpningsområden. Arbetet är alltså skrivet i just detta syfte: att ge ökad kännedom om ämnenas gemensamma historia och relation, oberoende av läsarens tidigare kunskap och intresse för de olika ämnena.

2.0 Bakgrund

För att förstå hur matematiken och musiken påbörjade sin gemensamma utveckling behöver vi få insikt i paradigmen som rådde inom dessa ämnen under tidig matematisk filosofi, ca 300-talet före Kristus. Då fanns en stark tilltro till matematikens förmåga att numerärt beskriva hela vår värld. De bevingade orden: ”*Allt är Matematik*” sägs enligt folksägen ha yttrats av Pythagoras efter att han passerat smedjan och hört hur olika hammare genererade olika klang där vissa lät mer *harmoniska* än andra. Det sägs att Pythagoras undersökte detta fenomen vidare med sina studenter och att de utförde experiment med hypotesen att heltalsfraktioner gav upphov till ren klang (Earlham College Music, 2018). Den skola som Pythagoras upprättade gav bland annat matematiken dess namn. Studenter vid skolan kallades *mathematikoi* från grekiskans ord för kunskap (Lundberg, 2008). Trots att det finns mycket dokumenterat från Pythagoréernas många upptäckter har tyvärr inte några musikaliska beräkningar bevarats, även om det med största sannolikhet förekommit sådana (Wardhaugh, 2008, s. 17). Berättelsen om Pythagoras och smedjan förblir således en legend.

Pythagoras var dock inte ensam om sin världsbild. Grekerna var av den bestämda åsikten att vår omvärld kunde förklaras med heltalsförhållanden. De ansåg att himlakropparnas banor, liksom musiken, följde enkla förhållanden. Det talades om himlakropparnas harmoni. De stötte dock med tiden på problemet med *inkommensurabilitet*. Till exempel: en triangel vars båda sidor har längden 1 får enligt Pythagoras sats hypotenusan $\sqrt{2}$ längdenheter. Tal som likt $\sqrt{2}$ inte kan uttryckas som en kvot av två heltal kallas för irrationella tal. Denna problematik med inkommensurabilitet var central inom den grekiska matematiken. Det debatterades friskt huruvida de irrationella talen var verkliga tal eller inte. De accepterades inte av den pythagoreiska skolan (Kline, 1972, s 33) som argumenterade för att dessa irrationella tal endast var ett symptom på jordens orenhet (Matvievskaya, 1987).

I Indien brukades dock irrationella tal under 300–1200-talet trots att de inte hade formulerat någon definition gällande dessa. Under 800-talet undersöktes irrationella tal av såväl persiska som egyptiska matematiker innan de slutligen definierades under 900-talet av den iranske matematikern Al-Khazin:

"If, [however], a magnitude cannot be represented as a multiple, a part (l/n), or parts (m/n) of a given magnitude, it is irrational, i.e. it cannot be expressed other than by means of roots." (ibid, 1987).

Irrationella tal tillskrevs med tiden en egen talmängd inom aritmetik och öppnade upp för helt nya beräkningar. Det vidgade matematikens territorium under 1500-talet till arbete med kubikrötter (Kline, 1972, s 251) vilket bidrog till definitionen av det stämningssystem inom musik som vi använder idag vilket vi kommer se senare i detta arbete. Dessa beräkningar var dock tvungna att vänta in utvecklingen av *logaritmer* innan en fullständig lösning var möjlig. Logaritmer introducerades först på slutet av 1500-talet av John Napier och Joost Bürgi helt oberoende av varandra (Clark & Montelle, 2018), vars tillämpning inom musiken också kommer att presenteras utförligare längre fram. Dessa händelser inom matematikens historia blev nyckelpunkter för den slutliga definitionen av oktavens toner.

2.1 Frågeställning

Under eran av Quadrivium hölls som nämnts idealet av rationella tal högt. Det ledde till en eftersträvan att hitta heltalskvoter som representerade de musikaliska observationerna som gjordes av samtiden. Denna ideologi mötte dock svårigheter att producera en användbar uppdelning av oktavens, då heltalsförhållanden upprepade gånger visade sig vara obrukbara i praktiken. Detta arbete kommer beskriva hur omvärlden åtog sig detta problem samt beskriva beräkningarna bakom lösningen till följande frågeställning:

Hur kan vi formulera en sekvens av intervall som:

- *Sammanfaller med de existerande tonernas förhållanden, samt*
- *Producerar en sekvens med ett fixt antal toner som avslutas med oktaven, vilken definieras av en fördubbling i frekvens?*

Uppdraget som ålagts 1600-talets matematiker var alltså att hitta tonhöjder som både klingade rent och var lättarbetade för kompositörer. Dessutom skulle de helst inkludera de redan definierade tonerna från Pythagoras tid. Matematiken var alltså tvungen att ge såväl fysikaliska som musikaliska observationer utrymme i problemlösningen. Matematiska beräkningar av musikaliska intervall blev flera gånger utdömda då de resulterade i disharmoniskt ljud även om det på pappret såg korrekt ut. Lösningen kan dock tillåta viss disharmoni eftersom människans öra endast kan uppfatta dissonans om toner skiljer sig mer än 14 *cent*. Cent är en enhet för tonhöjder, baserat på frekvensen hos toner som sedan skalas om till en mer praktisk enhet. Denna enhet kommer förklaras mer utförligt i kapitel 5.3 Förhoppningen var att skapa en gemensam modell där matematiken kunde användas som språk även inom musikaliska sammanhang. Musiker skulle dock få vänta närmare ett millennium innan matematiken genomgått den teoretiska utveckling som behövdes för att kunna formulera ett svar. Värt att nämna är att historiens matematiker och musiker såg olika syfte i att lösa gåtan. Matematiker ville definiera och formulera de musikaliska observationerna med matematiskt språk. Musiker ville å andra sidan hitta den optimala konstruktionen av ett system som inkluderade samtliga toner (Wardhaugh, 2008). Systemet skulle vid sin fullbordan dock gynna såväl den musikaliska samordningen av orkestrar, skapa en enhetlig notskrift samt ge matematiker en tillfredsställande definition av intervallens storlekar och inte minst lösningen på ett långlivat problem.

3.0 Musikteori

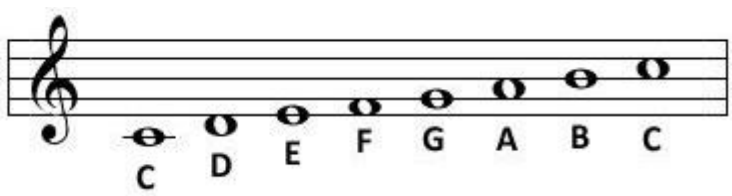
För att förstå den matematik som ligger inbäddad i musikteorins struktur krävs först en presentation av utvalda delar inom musikteori och den moderna notskrift som används idag. Arbetet var en process från disharmoni till harmoni. Termen *harmoni* används för att beskriva behagligt ljud. Med harmoniska förhållanden menas alltså det ljud som vi upplever som vackert då flera toner spelas samtidigt. Dock är uppfattningen av vad som är vackert kulturberoende och därmed inte allmängiltigt för all världens musikteori (Seebass, 2010). Denna text utgår främst ifrån den antika grekiska och därmed även den västerländska kulturens ideal inom musik. Harmoni kommer därför i fortsättningen att användas för att beskriva behagligt ljud enligt den västerländska definitionen.

3.1 Oktavens hel- och halvtoner

Det har sedan Pythagoras dagar funnits en förståelse för att den frekvens som en viss ton besitter sammanfaller med andra toner med högre frekvens utefter en viss periodicitet. Den biologiska förklaringen till detta ligger i den resonans (vibration) som frekvenser skapar i det mänskliga örats hörselsnäcka. Två frekvenser som får samma hörselhår att vibrera genererar nervimpulser till vårt hörselcentrum vilka uppfattas som harmoniska. Det får tonerna att uppfattas som lika: tonerna ringer med så kallad *konsonans*. Dissonans hörs däremot som olika toner och uppfattas därför oftare som falska (Allt om Vetenskap, 2018).

3.1.1 Tonernas intervall

Likadana toner återkommer alltså upprepade gånger i takt med att frekvensen multipliceras. Intervallet *oktav* innebär en fördubbling av frekvens, med kvoten 2:1. I oktaven förekommer 7 toner, varav flera också baseras på kvoter av heltal likt fallet med oktaven. De 7 tonerna bildar en diatonisk skala, se figur 3.1. I figuren visas skalan i C dur, det vill säga i ordningen: C, D, E, F, G, A och B (även kallad H), (Grubbe b), 2020).



Figur 3.1

Namngivningen med bokstäver indikerar vilken tonart vi befinner oss i. Intervallen mellan tonerna benämns däremot efter deras avstånd från grundtonen, vilket gäller oberoende av vilken skala vi befinner oss i. Skalans första ton kallas för *prim*. Prim är även kallad tonika ifall den utgör grundton i ett ackord. Avståndet till andra tonen kallas sekund, avståndet till tredje kallas ters som följs av kvart, kvint, sext och septim innan grundtonen återkommer och oktaven är komplett.

Utöver de 7 tonerna i den diatoniska skalan finns ytterligare 5 halvtoner. Dessa toner kan observeras som de svarta tangenterna på ett piano. En skala med samtliga 12 hel- och halvtoner kallas för den kromatiska skalan I figur 3.2 visas en kromatisk skala. De dubbla raderna visar hur toner kan benämnas med olika notationer beroende på om det är en stigande (mot ljusare toner) eller fallande (går mot mörkare toner). Konstruktionen av dessa skalor förklaras i 3.2.2.

Figur 3.2

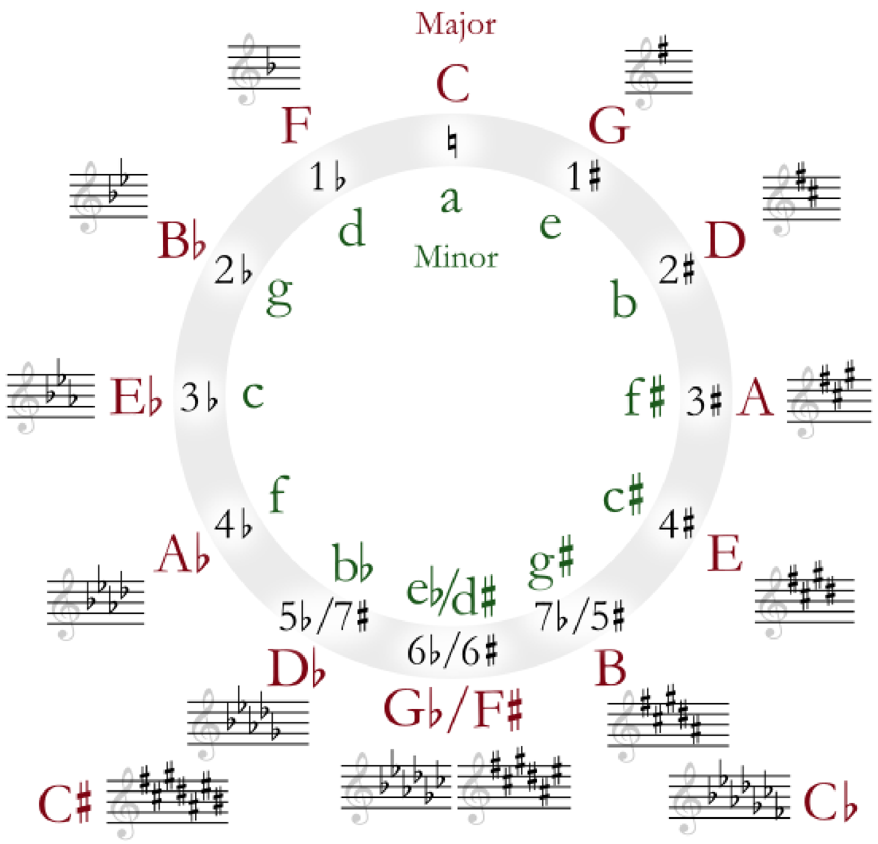
3.2 Tonarter

Av de sex intervallen i 3.1.1 förekommer kvart, ters och kvint naturligt som övertoner till en grundton. De tre övertoner kan förenklat ses som sekundära svängningar hos en sträng (Grubbe a), 2018). De naturliga svängningarna hos övertonerna ringer alla med konsonans till grundtonen vilket innebär att de uppfattas som likartade av vårt öra. Efter att Pythagoras kartlagt detta blev det snart uppenbart att övertonerna i sin tur hade egna övertoner, som i sin tur också har övertoner. Nyckeln till musikens system låg i upptäckten av att övertoner återkommer som fördubblad frekvens till en tidigare definierad ton i form av ett oktav-intervall. Denna upprepning av toner synliggjorde ett mönster hos frekvenser som Pythagoréerna kunde översätta till matematiska intervall. Beroende på vald grundton blev de naturliga övertonerna såklart olika, och sekvenserna som växte fram organiserades som harmoniska skalor, även kallade *tonarter*.

Det finns totalt 24 tonarter: varje ton i den kromatiska skalan (se figur 3.2) kan spelas i 2 olika utföranden: dur- eller mollskala. Därutöver finns det flera olika skalor som skiljer sig åt sett till deras följd av avstånden mellan tonerna (hel- eller halvtonssteg), (Grubbe, b), 2018).

3.2.1 Transponering

För att röra sig mellan dessa tonarter kan en förflyttning av toner göras. Detta kallas för transponering och betyder att vi finner den önskade tonens motsvarighet hos en annan skala. Rent praktiskt är det väldigt enkelt: vi betraktar hur många tonsteg ovan eller under den önskade skalan vår melodi ligger och förflyttar samtliga noter i stycket lika många steg. Det viktiga är att även förtecken som ses i figur 3.2 justeras: # som höjer tonen eller *b* som sänker ett halvt steg. Tonarternas system illustreras ofta med en modell kallad kvintcirkeln. Varje steg i medurs riktning har intervallet kvint. I figur 3.3 visas även tonartens karaktäristiska toner med hjälp av förtecken (Grubbe c), 2020).



Figur 3.3

3.2.2 Stämning

När två olika instrument ska kunna spela tillsammans behöver de justeras så att deras individuella toner sammanfaller i frekvens. Att justera respektive frekvens innebär att hitta sammanfallande *tonhöjder* och kallas för att stämma ett instrument. Ett ostämt instrument låter falskt på grund av att frekvensen hos instrumentet inte stämmer överens med det definierade värdet. Detta sker till exempel när en gitarrsträng är för hårt eller löst spänd. Det finns således en stor nytta i att ha kvantifierat dessa frekvenser för instrument att stämmas efter, inte minst i större skala på global nivå.

3.2.3 Historiens olika stämningar

Den stämning som accepterats som standard idag är en produkt av den matematiska forskningens parallella utveckling och har föregåtts av flera olika förslag på stämningar dessförinnan. Det äldsta sägs vara den pythagoreiska stämningen, se 4.1. Det finns dokumentation på dess användning från Euklides tid på 300-talet före Kristus fram till 1500-talet (Grubbe a), 2018). Ett stort problem som uppdagades inom den pythagoreiska stämningen var den falska *vargtonen* som ledde till nya förslag på stämningssystem. Vargtonen, även kallad *det pythagoreiska kommat* innebar en dissonans hos toner, oftast kvinten, i skalan. Detta fenomen förklaras utförligare i kapitel 4.2.

Under slutet av 1400-talet presenterade Ramos de Pareja sin variant av oktaven som han kallade *renstämning*, vilket fokuserade på att ge varje enskild tonart så exakta tonhöjder som möjligt. Pareja renstämde även terserna som var aningen falska i Pythagoras stämning. Det minskade dock antalet övriga rena toner inom skalan (ibid, 2018). Följaktligen blev transponering och arrangemang mycket svårarbetat. Flera stycken från denna tid tvingades inkludera många falska toner utefter denna stämningen. Parejas stämning användes främst under 1500-talet och avlöstes vid följande sekelskifte av *Medeltonsstämning* som presenterats av Pietro Aron år 1523. Den kvantifierades sedan matematisk av Fransisco de Salinas och Gioseffo Zarlino (ibid, 2018). Detta förslag på stämning prioriterade en helt rent stämd oktav och *stor* ters. En ters kan antingen ha dur- eller mollkaraktär vilket benämns som stor respektive liten ters. Den stora tersens rena stämning har förhållandet 5:4. Den pythagoreiska stämningen hade prioriterat ren kvint och kvart och tillåtit terserna att inte vara exakt enligt 5:4 förhållandet. Differensen mellan den pythagoreiska stämningens ters och den rena, stora tersen kallas för det *syntoniska kommat* (närmare bestämt 21,51 cent). Det gick att kompensera den perfekta tersens något lägre frekvens genom att sänka 4 kvinter med en ¼ av kommats tonhöjd. Majoriteten av tonarterna fick då helt rena terser. Dock medförde justeringen att flera tonarter blev så dissonanta att de helt uteslöts. De tonarter som återstod (ungefär hälften) fick å andra sidan en lättarbetad struktur där transponering för första gången blev så pass korrekt att stråk-, trä-, och bleckblåsinstrument med lätthet kunde spela gemensamma stycken vilket var en klar förbättring (Grubbe a), 2018).

Nästa försök introducerades i början av 1700-talet: *vältempererad* stämning. Förslaget kom samtidigt från flera olika musikteoretiker. Vältempereringen innebar en kompromiss: en kompensatorisk justering mellan konsonanta och dissonanta toner. Den mest framgångsrika (sett till användarfrekvens) av dessa konstruerades av Andreas Werckmeister (ibid, s. 2018). Han dela upp det pythagoreiska kommat på fyra olika kvinter istället för att låta dem hamna på endast en vargkvint. Stämningen fick namnet Werckmeister I. Samma princip användes senare i en annan stämning (Werckmeister III) där Werckmeister istället fördelade differensen på fem kvinter. Vinsten här låg i en mindre differens för de avvikande kvinterna, på bekostnad av färre helt rena kvinter jämfört med pythagoreisk stämning. Dock var övriga åtta kvinter helt rena och de falska kunde fortfarande användas utan märkbar dissonans.

3.2.3.1 Liksvävande stämning

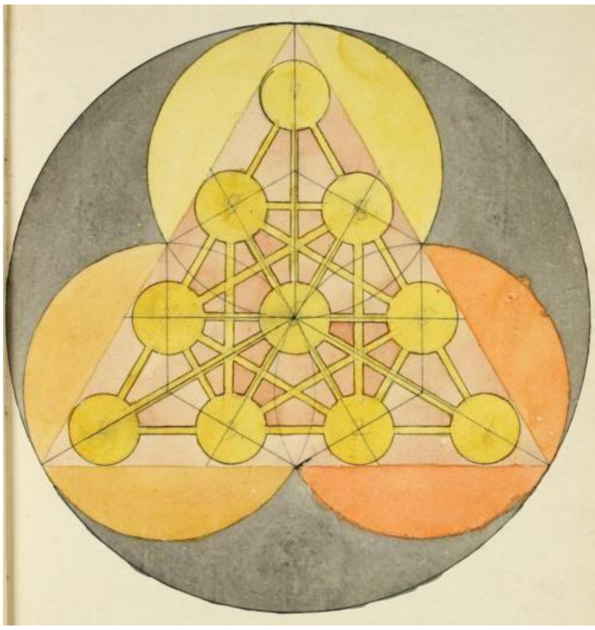
Till skillnad från ren- och vältempererad stämning utgick den liksvävande stämningen inte ifrån prioriterade nyckel-intervall utan behandlade alla halvtonsteg i skalan som lika viktiga. Detta nya perspektiv ledde till och blev namngivande åt den stämningen vi använder idag. Lösningen fördelade de falska differenserna som beskrivits ovan över samtliga toner, vars procedur kommer presenteras närmare i kapitel 6.2. Denna idé var inte revolutionär i sig, däremot var det matematiska tillvägagångssättet en ny upptäckt. Den första matematiska formeln för tanken formulerades av Simon Stevin i sekelskiftet till 1600-talet. Formeln var alltså samtida med flera av förslagen i kapitel 3.2.3 (Wardhaugh, 2008). Värt att nämna är även att storleken på orkestrar under 1600- och 1700-talet växte parallellt med den matematiska utvecklingen. Liksvävande stämning etablerades alltså först när det fanns ett faktiskt behov av likstämda instrument inom den praktiserande musikscenen. Effekten av denna stämning kan även ses i den våg av klassiska verk som producerades under 1700-talet. Det har även upptäckts matematiska mönster i somliga av dessa klassiska verk i efterhand, vilket diskuteras i kapitel 4.3.

4.0 Matematik inom musiken

I det famlande och sökande som ackompanjerar forskning har matematik och musik vid flertalet tillfällen vidrört varandras teorier även om det inte uppmärksammats förrän långt senare. Redan under 1600-talet arbetade astronomen Kepler med utvecklingen av logaritmer inom astronomiska beräkningar. Kepler hade ett erkänt intresse för musik och ska även ha applicerat sina tidigare matematiska studier inom musik. Trots det gjorde han inga direkta anknytningar till musik vid sin upptäckt av logaritmen (Wardhaugh, 2008). Däremot kom hans arbete väl till användning senare i logaritmens applicering på oktavens kromatiska skala och tonernas intervall vilket förklaras i kapitel 5 och 6. Detta kapitel presenterar den tidigare nämnda pythagoreiska stämningen och dess matematiska problematik närmare.

4.1 Matematiken inom Pythagoras stämning

Pythagoras och hans studenter var fascinerade över hur heltal kunde beskriva intervall av toner längs en sträng. Vid deras definition av oktaven, kvint och kvart fann de att intervallen kunde illustreras som den matematiska figuren av en fyrvåningspyramid, även kallad tetraktys. Illustrationen i figur 4.1 är gjord av Manly Palmer Hall och liknelsen till tonerna återfinns i förhållandet mellan triangelns nivåer: 1:2 för oktaven, 2:3 för kvinten respektive 3:4 för kvarten. Upptäckten sågs som ännu ett tecken på att det musikaliska systemet hade en matematisk förklaring (Lundberg, 2008, s. 31).



Figur 4.1

Med hjälp av de kända intervallen hos oktav och kvint kunde de matematiskt identifiera flera toner inom oktaven. Genom att ta ett kvint-steg uppåt (enligt samma procedur som kvintcirkeln) genererades nya toner från frekvensen som sedan transponeras ned till rådande oktav. Samma matematiska procedur kunde användas i en nedåtgående riktning till lägre oktaver. Transponeringen genomfördes genom att multiplicera alternativt dividera frekvensen med 2 för att nå samma ton i en högre respektive lägre oktav. Dessa beräkningar resulterade i 5 toner med så kallade hela tonsteg: i skalan C-dur utgörs de av tonerna C, D, E, G, B som alla hade samma intervall till föregående ton. De fann även två toner med ett kortare intervall mellan tonerna E till F och B till C. Dessa två toner med avvikande frekvenser är anledningen till att det saknas en svart halvtonstangent mellan dessa toner på ett piano. Tillsammans gav de den diatoniska skalan med 7 huvudtoner. De beräknade frekvenserna samt förhållandet till föregående ton ses i figur 4.2.

Skal-ton	Frekv.	Frekv.förh. rel. föreg. ton	Frekv.förh. rel. grundton
C	ν		1
D	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$
E	$\frac{81}{64}\nu$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$
F	$\frac{4}{3}\nu$	$\frac{256}{243}$	$\frac{4}{3}$
G	$\frac{3}{2}\nu$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{2}$
A	$\frac{27}{16}\nu$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$
B(H)	$\frac{243}{128}\nu$	$\frac{9}{8}$	$\frac{243}{128}$
C	2ν	$\frac{256}{243}$	2

Figur 4.2

Observera att det diatoniska halvtonsteget inte är lika stort som det kromatiska halvtonsteget. Det är alltså större intervall mellan E och F än det är mellan F och F#. De fem kromatiska halvtonsstegen kallades för överstigande toner, inte att förväxla med tidigare nämnda övertoner. Ur den utopiska föreställningen att heltal kunde förklara oktavens toner verkade det som om skalan var komplett.

4.2 Det Pythagoreiska kommat

Det uppdagades dock problem med dessa beräkningarna. Enligt Pythagoréerna borde sju oktaver (vilket är standarden på ett piano) innehålla 12 kvinter och cirkeln hade därmed varit sluten. Detta gäller tyvärr inte sett till de matematiska egenskaperna. Sju oktaver multiplicerat med förhållandet 1:2 skulle i så fall vara lika mycket som 12 multiplicerat med kvintens förhållande: 3:2 (Lundberg, 2008, s. 32). Dock stämmer inte denna likhet:

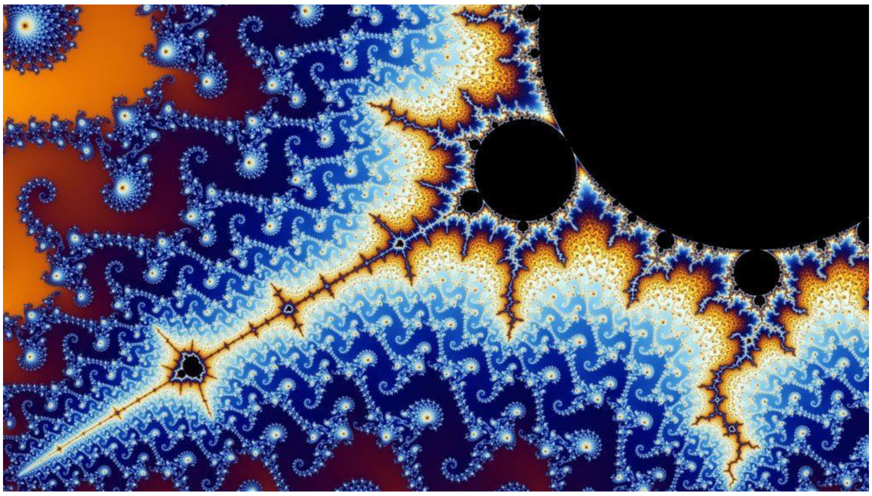
$$7 * 2 = 14 \neq 12 * \frac{3}{2} = 18 \qquad (4.1)$$

I praktiken skapade denna olikhet en falsk klang och fick den pythagoreiska stämningen att brista i sitt praktiska utförande. Det gick visserligen fortfarande att använda den men kompositörer och musiker var tvungna att undvika den dissonanta vargkvinten i varje stycke. Dissonansen återfanns i den sista kvinten mellan $F^{\#}$ och D^{b} innan cykeln återupprepas vilken utgör den sista oktaven hos pianots tangentföljd (Grubbe a), 2018).

Differensen motsvarar 23,46 cent har flera namn. vanligtvis det pythagoreiska kommat. Denna stämning bidrog å andra sidan till att olika tonarter fick en mycket särpräglad känsla. Det blev därför rentav olämpligt att transponera stycken till prefererade tonarter då det helt och hållet ändrade både känsla och dynamik hos ljudbilden. För musikens utövande innebar detta vissa begränsningar inom orkestrars möjliga omfång samt högre krav på sångare, då det inte gick att anpassa tonarten efter sångarens röstläge.

4.3 Komposition och matematik

Vi har tidigare sett hur beräkningar använts för att konstruera musikteori. I omvänd ordning kan vi observera vissa matematiska mönster som oavsiktligt bäddats in hos musikaliska kompositioner. Ett exempel på detta är *fraktaler.* Fraktaler innebär att ett observerat mönster återfinns i en annan skala. Sådana mönster kan observeras visuellt hos naturfenomen, till exempel hos Romanesco-broccoli (Scientific American, 2020). Fraktaler kan även illustreras bildligt som ett oändligt återupprepande mönster. Ett av de mest kända exemplen på detta *Mandelbrotmängden* som visas i bilden nedan (American Mathematical Society, 2018), se figur 4.3, där den svarta kroppens siluett återfinns i mindre format djupare in i bilden.



Figur 4.3

Att komponera musik med fraktaler innebär att det övergripande temat i stycket återkommer på flera nivåer. Mönstret kan uppträda i olika oktaver, tempo samt som spegelvänd version, det vill säga melodin som uppochnervänt skriven på notrader. *American Mathematical Society* har samlat en mängd material rörande matematikens närvaro i musiken på sin hemsida. Där finns till exempel en video med Santa Fe Institute som i samarbete med Santa Fe Symphony framför ett stycke innehållande fraktaler där det inneboende mönstret och fraktalerna som spelas illustreras i videon som olika färger där varje färg innebär ett unikt utförande av temat. Besök gärna videon via länken i källhänvisningar.

Det har även funnits musiker som använt matematiska mönster som en utgångspunkt i sitt komponerande. Arnold Schönberg har tonsatt stycken utefter regeln att varje ton i skalan endast får förekomma en gång i varje sekvens. Med andra ord måste samtliga övriga toner ha spelats innan en viss ton får spelas igen. Lyssna gärna på resultatet via länken i källhänvisningar (Audiam Publishing, UMPG Publishing).

5.0 Matematiska element inom oktavens konstruktion

Av de matematiker som dokumenterat sitt arbete inom musikteori för oktavens definition återfinner vi bland annat Descartes, Jacob Bernoulli, Mersenne och Stevin. Descartes och Bernoulli arbetade vidare med oktaven som påbyggnad efter Kepler och sedermera matematikern Napiers studier om astronomi och logaritmer (Wardhaugh, 2008). Descartes gjorde detta genom att skapa cykliska intervall, inte helt olikt Pythagoras idé om kvintcirkeln, som illustreras längre fram i kapitel 6.0. Deras arbete hade dock inte varit möjligt utan Napiers, Briggs och Bürgis förarbete i klargörandet av logaritmerna, vilket behandlas i kapitel 5.2. Innan dess kommer kedjebråk att introduceras som förled till logaritmerna och avslutningsvis redogörs beräkningarna av frekvenser till enhet för tonhöjder: cent.

5.1 Kedjebråk

Vi erinrar oss definitionen av irrationella tal i kapitel 2.0 som den mängd av tal som inte kan skrivas som en kvot av två heltal och kännetecknas av en oregelbunden decimalföljd. En ytterligare gemensam egenskap för de irrationella talen är att de alla kan beskrivas med en kedjeliknande följd av bråk. Det är inte ovanligt att dessa bråk bildar kedjor som sträcker sig i oändlighet. Det finns dock kedjebråk som konvergerar, det vill säga antar ett närmevärde, vilket vi kommer illustrera längre fram i detta kapitel.

Kedjebråkets historia dateras tillbaka till Rhindpapyrusarna i egyptisk matematik där de kallades enhetsfraktioner eftersom bråken hade talet 1 som täljare. De hade även delvis ursprung från Euklides definition av bråk med minsta gemensamma nämnare samt användes av Hinduerna (Ãryabhata) för att lösa linjära ekvationer med icke-rationella lösningar. Den första användningen av kedjebråk dateras till 1572 i Bologna för att uppskatta värdet på kvadratrötter (Kline, 1972, s. 254) i en publikation av Rafael Bombelli som baserade sina studier på Fibbonaccis, Al-Khowarizimis och Cataldis arbete (Brzezinski, 2012).

5.1.1 Konstruktion av kedjebråk

Ett kedjebråk konstrueras utefter resterna hos ett bråk. Efter att ha subtraherat ett antal hela nämnare från täljaren placeras resten som det nya värdet hos täljaren. Vi kallar detta rest-bråk för x_1. Observera att x_1 är en kvot mindre än 1. Därefter genomförs en invertering av bråket till formen $\frac{1}{x_1}$. Det nykonstruerade bråket har täljare 1 och ett bråk i nämnaren. Genom att upprepa den första operationen och subtrahera det med antalet gånger bråket x_1 går i talet 1 får vi en ny rest: x_2, som i sin tur inverteras till $\frac{1}{x_2}$. Genom att upprepa denna algoritm får vi ett irrationellt tal illustrerat som en kedja av bråk, se figur 5.1. Kedjebråk kan även användas för att illustrera Fibbonaccis serie där varje tal är lika med summan av de två föregående talen:

$$a_i + a_{i+1} = a_{i+2} \tag{5.1}$$

Kvoten mellan de föregående talen

$$\frac{a_{i+1}+1}{a_i} \approx 1{,}618 \tag{5.2}$$

konvergerar mot ett annat välbekant fenomen inom matematiken: det gyllene snittet. Det gyllene snittet definierades av Fibbonacci som kvoten mellan talen i sin serie. Serien definierar nästa cell i serien som summan av de två föregående talen (Kline, 1972, s 210 & Hartfeldt, Eid & Henning, 2002, s 23). Kvoten mellan detta avrundas till 1,618 och kan presenteras med följande kedjebråk:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

Figur 5.1

Symbolen φ (*phi)* ovan används som beteckning för ett närmevärde, vars exakta värde vi får genom att lösa ekvation (5.3) nedan för x. För att beräkna det exakta värdet substitueras det valda sista bråket med variabeln x när vi *trunkerar* (avslutar) kedjan. Denna substitution blir möjlig då bråken i den fortsatta följden är identiska.

Då kan bråket skrivas som:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \tag{5.3}$$

Vi använder x för det sökta värden på φ. Vi löser ekvationen genom att multiplicera båda led i ekvation (5.1) med x vilket ger oss ekvation (5.2) nedan. Ekvationen löses med pq-formeln för att hitta värdet på x, se ekvation (5.3):

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{5.4}$$

$$x = \frac{1 \pm\sqrt{(-1)^2 - 4*(-1)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \tag{5.5}$$

Lösningen på andragradsekvationen har två rötter varav den positiva lösningen är det sökta värdet för det gyllene snittet. Lösningarna blir således:

$$x_1 = = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618$$

Denna uppskattning av värdet kan även användas i omvänd riktning där vi med en känd decimalföljd kan separera kvoter för att skapa kedjebråk. Vi kommer att använda denna metod i kapitel 6.3.

5.2 Logaritmer

Logaritmiska skalor finns tillämpade inom flera samhällsområden: pH för att mäta surhet, decibel för ljudvolym och Richterskalan för jordbävningars intensitet med flera. Vi ska nu presentera upptäckten av logaritmer och hur den möjliggjorde en geometrisk uppbyggnad av oktaven. Det har sin början i de irrationella talens utveckling (se 2.0) vars impopularitet fortsatte fram till 1500-talets Europa. Deras närvaro rättfärdigades endast på grund av sin förekomst i geometriska beräkningar, tillsammans med negativa och komplexa tal. De klassades snarare som symboler än numeriska värden. Det hindrade emellertid inte matematiker under 1500-talet som använde sig av komplexa och imaginära tal i problem som innefattade rötter av högre grad (Kline, 1972, s. 252). Främst inom astronomins sfäriska koordinater hos trigonometriska funktioner. Dessa beräkningar var dock tidskrävande och komplexa, då de ofta resulterade i någon form av kvadrat- eller kubikrot. Att kunna förenkla dessa ekvationer var således en stor drivkraft i sökandet efter ett matematiskt verktyg som kunde omvandla *geometriska* formler till aritmetiska värden. Ett exempel på detta är hur ekvationen (5.2.1) kan omvandlas till ekvation (5.2.2) vilket ger det nya sambandet (5.2.3):

$$x^3 = 8 \tag{5.2.1}$$

$$\ln x^3 = \ln 8 \tag{5.2.2}$$

$$3 * \ln x = \ln 8 \tag{5.2.3}$$

enligt logaritmräknelagarna. Den geometriska potensen har därmed omvandlats till ett aritmetiskt uttryck som vi lättare kan beräkna med hjälp av det numera kända sambandet hos naturliga logaritmer och deras aritmetiska värde.

Michael Stifel var en av de första som påbörjade beräkningar av logaritmer. År 1544 presenterade han en relation mellan geometrisk och aritmetisk progression (Kline, 1972, s. 256). Geometrisk progression innebär att en serie ökar med en upprepad multiplikation, medan en aritmetisk istället ökar med en upprepad addition. Tidigare studier av trigonometriska funktioner i början av 1500-talet hade nämligen hittat samband som möjliggjorde addition istället för multiplikation av sinus och cosinus. Stifel försökte att tillsammans med Nicolas Chuquet överföra detta samband till relationen mellan geometriska och aritmetiska ökningar hos sekvenser (Clark & Montelle, 2018).

Under slutet av 1500-talet skedde två parallella arbeten som båda två tids nog erkänts som de första matematiska presentationerna av logaritmiska skalor: av John Napier från Skottland och Schweizaren Joost Bürgi (Bürgis verk krediterades först långt senare än Napiers (Clark & Montelle, 2018)). Napiers upptäckt skedde då han jämförde en accelererande hastighet med en konstant ökande hastighet. Det gav en relation mellan vad vi idag kallar tiopotenser som sammankopplas med vår heltalsserie (Kline, 1972, s. 256). Napier började strax samarbeta med matematikern Henry Briggs under 1600-talets början för att tillämpa logaritmer som ett verktyg för sfäriska koordinater som innehåller de trigonometriska funktionerna (Clark & Montelle, 2018). Briggs bidrog genom att välja basen 10 (det var alltså inte givet att 10 var utgångsläget för logaritmer vilket idag är den vanligaste formen). Då detta skedde knappt 30 år sedan Stevins formulering av decimaler i bråkräkning (Kline, 1972, s. 258) kan det tänkas att det påverkade Napiers och Briggs val av bas, vilket gett oss den tiogradiga skala vi har idag. Under det kommande århundradet identifierades flera alternativ till baser. År 1728 kom Eulers publikation av de naturliga logaritmerna med det irrationella talet *e* som bas, vilket på många sätt förenklade logaritm-beräkningar ännu mer (Kline, 1972, s. 258). Logaritmer gav oss med andra ord möjligheten att manipulera potenser så att ekvationer vars lösningar inkluderade en högre grad av rotekvation kunde ersättas med division. Vi har rört oss från exponenter till faktorer. Precis som namnet antyder möjliggjorde det ett förhållande mellan förhållanden (logaritm översätts från grekiska som talet av ratiot där ratio syftar till elementens inbördes förhållanden i talserien (ibid, s. 257)).

För musiker var det nu möjligt att skala om avstånden mellan tonernas frekvenser från uppmätta värden till en aritmetisk skala, precis som pH och andra nämnda exempel. Den minsta beståndsdelen (grundtonens frekvens) i serien multipliceras upprepade gånger med sig själv. Varje ny faktor medför en ökad potens som följer en aritmetisk uppräkning (0,1,2,3,4…). Geometriska serier som ökar successivt med en viss potens kallas för enheter med exponentiella relationer, likt den accelerationen som studerades av Napier.

5.3 Cent

En naturlig del i utvecklingen av musiklära var att skapa ett gemensamt mått inom musiken för att kunna kvantifiera tempererad stämning. Syftet var att skapa ett universellt språk så att olika musikkulturer kunde samarbeta mellan stämningar och intonationer (Christensen, 2008, s. 210). Att använda en logaritmisk skalan har flera fördelar i detta avseendet som beskrevs i 5.2. En ytterligare fördel är logaritmräknelagarna som kan användas för att subtrahera och addera kvantifierade värden för att beräkna avstånd mellan olika toner i enheten cent vilket annars hade krävt mer avancerade beräkningar (Grubbe a), 2018).

Beräkningen av oktavens beståndsdelar med hjälp av logaritmer ger nästintill optimala förutsättningar sett till användarvänlighet. Enheten cent beräknas med hänsyn till att vi har 12 toner i vår skala genom att värdera oktaven till 1200 cent, vilket motsvarar en fördubbling i frekvens. Den logaritmiska skalan cent ökar med ett hundratal för varje halvtonsteg, därav namnet på enheten. På samma sätt ökar den med 200 cent för ett helt tonsteg.

Omvandlingen mellan frekvens och cent formulerades av Alexander John Ellis och utförs med en formel där vi går från vår aritmetiska värden till logaritmer med potenser till basen 2. Basen 2 kommer av fördubblingen i frekvens. Formeln syns nedan som funktion (5.3.1), vilken innehåller konstanterna α, β, variabeln r (frekvensförhållandet) och variabeln c(centvärdet). Genom att definiera oktavens första ton som 100 cent och följande oktav som 1200 kan vi bestämma värdet av konstanten β. Förändringsfaktorn α löses sedan ut som frekvensförhållandet till det valda intervallet (Lundberg, 2008, s. 56).

$$r = r(c) = \alpha \cdot 10^{\beta \cdot c} \qquad (5.3.1)$$

För att lösa en ekvation med två obekanta konstanter används ett ekvationssystem. Vi använder den kända relationen mellan oktavens intervall och cent:

$$2 = \alpha * 10^{\beta * 1200} \qquad (5.3.2)$$

$$\sqrt[12]{2} = \alpha * 10^{\beta * 100} \qquad (5.3.3)$$

Vi löser ekvationen genom att dividera ekvation (5.3.2) med ekvation (5.3.3). Då förkortar vi bort konstanten α och kan omvandla ekvationen till $\beta = \frac{\log 2}{1200}$. Genom att applicera detta på ekvation (5.3.1) ges:

$$2 = \alpha * 10^{\log 2} \rightarrow 2 = 10^{\log 2} \rightarrow \alpha = 1 \qquad (5.3.4)$$

Ellis formel blir då $c(r) = 10^{\frac{\log 2}{1200}}$ från vilken vi nu isolerar c:

$$\log(r) = c * \frac{\log 2}{1200} \Leftrightarrow c = \frac{1200 \log(r)}{\log 2} \qquad (5.3.5)$$

Ekvation (5.3.5) är skriven i bas 10. Vi kan skriva om till bas 2 då faktorerna c och $\frac{1}{1200}$ enligt potensräknelagarna kan separeras som potenser. Det leder till att vi kan skriva om ekvation (5.3.5) till (5.3.6).

$$c = (10^{\log 2})^{\frac{r}{1200}} \qquad (5.3.6)$$

Eftersom $2 = 10^{\log 2}$ av ekvation (5.3.4) kan denna substitueras som bas:

$$r = 2^{\frac{c}{1200}} = \left(\sqrt[1200]{2}\right)^{c} \qquad (5.3.7)$$

För att lösa ut c i denna ekvation logaritmeras leden genomförs ett byte av bas till den naturliga logaritmen (basen e). Det ger ekvation (5.3.8), vilken är densamma som ekvation (5.3.7) med skillnaden att vi utgår från basen *e* istället för 10 (Wright, 2009).

$$c = 1200 * \frac{ln\,(r)}{ln\,2} \tag{5.3.8}$$

Resultatet (5.3.8) är en omvandling från frekvenser till cent: förhållandet mellan det observerade intervallets frekvenser (r) översatts alltså till ett avstånd (c) i en aritmetisk enhetsskala. Den naturliga logaritmen som användes i ekvation (5.3.8) infördes dock först på 1700-talet. Dessförinnan användes 10-logaritmen för att formulera omvandlingen till cent samt för att kvantifiera tonhöjder för instrument. Den publikation som fastställer de tonhöjder vi använder idag dröjde så långt som till 1885 för att nå allmän kännedom, i vilken tonen A kvantifierades till 440 Hz. Ellis mottog London Society of Art’s silvermedalj i och med denna publikation. Han var då 71 år gammal (Stock, 2007).

6.0 Resultat

6.1 Oktavens problematik

I detta kapitel beskrivs matematikens roll i problemet med oktavens uppdelning samt vad det haft för inverkan på den västerländska kulturens musikutövning. Arbetet med oktaven drevs av såväl musikers som matematikers strävan efter ett system som sträckte sig bortom enbart namngivning och kvantifiering av tonhöjder hos enstaka tonarter. I takt med att behovet för stämning mellan *olika* instrument växte blev den pythagoreiska stämningen mindre och mindre brukbar. Med hjälp av de matematiska framsteg som presenterats i kapitel 5.2 och 5.3 kommer vi nu följa beräkningen av dagens musikaliska system och redogöra för kedjebråkets relation med oktavens toner.

6.2 Lösning av problemet

Vetenskapare närmade sig det perfekta förhållandet mellan oktavens intervall först efter en tidsperiod över 1700 år från det att Pythagoras formulerat den första stämningsteorin. När Napiers och Bürgis arbete med potensberäkningar och rötter av högre grad publicerades var det flera matematiker som såg logaritmernas tillämpning i musik, framförallt Marin Mersenne. I *Harmonie universelle* presenterade han år 1637 en skala där de 12 tonerna i den kromatiska skalan behandlades som enheter i en geometrisk serie (Christensen, 2008, s. 207), (Lundberg, 2008, s. 55). Med förutsättningen att oktaven har förhållandet 2:1 gav det logaritmiska värdet av $\sqrt[12]{2}$ en uppdelning till 12 geometriskt ökande enheter som vid varje multiplikation med sig själv nådde nästa intervall i oktaven. Det återstod att undersöka ifall denna idé höll i praktiken. Den minsta beståndsdelen av oktaven, det vill säga tonartens prim, beräknas till:

$$\sqrt[12]{2} = 1{,}059\ldots \tag{6.1}$$

Den 7e tonen i kromatiska skalan (den perfekta kvinten) får då frekvensen:

$$(1{,}0594603)^7 = 1{,}49830703 \tag{6.2}$$

Den pythagoreiska stämningen hävdade att 3/2 var kvoten för kvintens perfekta förhållande:

$$3/2 = 1{,}5 \tag{6.3}$$

Om vi jämför tonhöjderna (6.2) och (6.3) ser vi att vi får en avvikelse på 0,00112% för kvinten vilket motsvarar en differens, Δ <1 cent (Bragg, 2011). Detsamma gäller även för kvarten. Däremot ger det en större avvikelse för tersen: 0,8%. Om vi utför Ellis beräkning för cent på frekvenserna finner vi att avvikelsen hos tersen resulterar i en differens på 13,69 cent. Vi får trots allt en felstämd ters även med den liksvävande stämningen (Bragg, 2011). Som tidigare nämnt har det pythagoreiska kommat en differens på 23,46 cent som gjorde att denna stämning var direkt obrukbart. Människan kan uppfatta intervall som dissonanta om Δ>14 cent (Lundberg, 2008). Den beräknade differensen hos den liksvävande stämningen på 13,69 cent accepteras därför av vårt öra.

Denna kompromiss där tidigare stämningars avvikelse fördelats över samtliga 12 toner i skalan kunde dock inte göras samtidigt som de tog hänsyn till tonhöjdernas inneboende karaktär och känslor som de gav upphov till. Tonarterna har därmed mist mycket av det dramatiska och estetiska variation som går att återfinna hos äldre kompositioner. Vinsten det däremot medför är att kompositioner går att spela i alla tonarter samt transponeras till vilken tonart som helst.

Det hade tidigare funnits idéer om en lösning på oktavens problematik i denna riktning: den liksvävande stämning som Simon Stevin försökte uppnå, se 3.2.3.1. Det har på senare tid uppmärksammats att Simon Stevin trots allt hade beräknat en formel för att få fram tonhöjder likt Mersenne redan 1585. Men denna hade inte fått samma svar vid genomförda beräkningar och Stevins formel publicerades inte i sådan omfattningen att den gav honom erkännande för sin upptäckt (Wardhaugh, 2008).

6.3 Kedjebråket och tolvtonsskalan

Den västerländska uppdelningen av 12 toner är en relativt lättarbetad uppdelning om än inte helt perfekt. I andra kulturer har det presenterats andra uppdelningar, till exempel kinesernas förslag på 53 tonsteg. Det intressanta här är att de båda kan relateras till kedjebråk (se figur 5.1). Dessutom är de båda lösningar på frågan:

Vid vilka exponenter närmar sig förhållandet hos den perfekta kvinten (3:2) oktavens förhållande 2:1? (Rubinstein, 2018)

Pythagoras konstruktion av kvintcirkeln (se kapitel 3.2.2) var baserat på tanken att 12 kvinter skulle motsvara 7 oktaver. Genom att likställa de två sökta intervallen med okända exponenter får vi ekvationen:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{a} = 2^{b} \tag{6.3.1}$$

Lösningen på denna ekvation får vi genom att isolera variablerna a och b till en gemensam faktor, som vi benämner *x.* Det gör vi genom att applicera potensräknelagarna och förflytta variabeln till vänster led.

$$\left(\frac{3}{2}\right) = 2^{\frac{b}{a}} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right) = 2^{x} \tag{6.3.2}$$

$$x = \frac{log\left(\frac{3}{2}\right)}{log\ 2} = 0{,}58496\ \ldots \tag{6.3.3}$$

Det önskade förhållandet x och dess decimalföljd kan som nämnt i 5.2 skrivas som ett kedjebråk. Det ger oss en fraktionsutveckling där vi hittar flera kvoter med ett närmevärde till x. Av dessa kan vi välja en lämplig kvot som beskriver när kvint och oktav sammanfaller. Vid beräkning ger decimalföljden följande nämnare (Hartfeldt, Eid, & Henning, 2002, s. 20):

x = *[1,1,2,2,3,1,5,2,23,2,2…]*

I figur 6.1 visas kedjebråkets olika värden beroende på var det trunkeras. Vi finner att kedjebråket ger oss det önskade värdet på (x) i flera led.

$$x(1) = 1$$

$$x(2) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$x(3) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{3}{5}$$

$$x(4) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{7}{12}$$

$$x(5) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}} = \frac{24}{41}$$

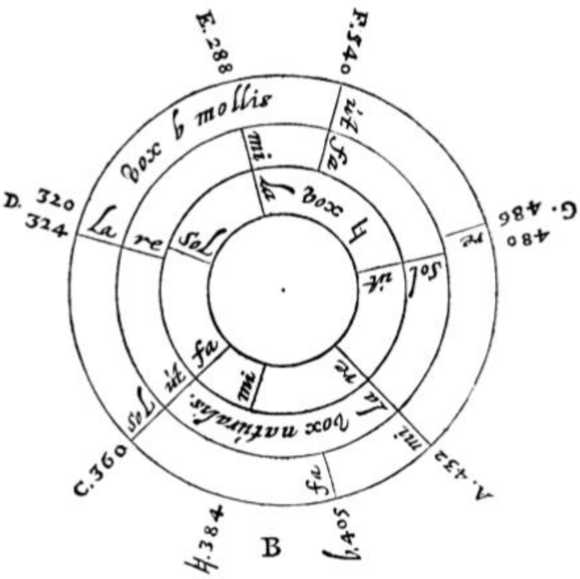
$$x(6) = \cdots = \frac{31}{53}$$

Figur 6.1

Kvoten 7/12 förekommer som visat i figur 6.1 vid den 4e trunkeringen av kedjan, x (4). Längre ner hittar vi nämnaren 41 vid den 5e trunkeringen. Förlängningen av bråket följer här decimalföljden hos x. Samma följd kan observeras hos diagonalen i figurens vänstra del som i sin tur består av tidigare nämnare hos föregående bråk. Även x (5) beskriver alltså det önskade förhållandet med en ännu mer exakt uppdelning. Om differensen delas upp på 21 oktaver istället för 7 kommer differenserna vi tidigare observerat också minska tills de är knappt hörbara för det mänskliga örat. Nackdelen blir ett större antal toner i uppdelningen vilket vore opraktiskt att arbeta med som musiker.

6.4 Illustration av oktaven

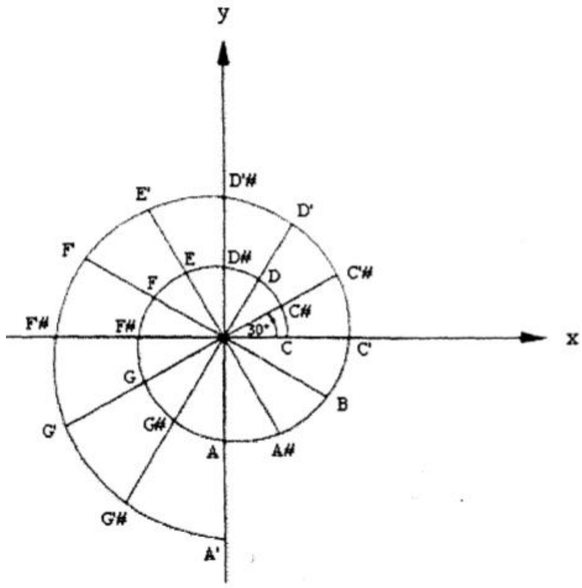
Figur 6.2 visar Descartes illustration av tonernas relationer i oktaven i en cyklisk form från 1650, vilket enligt Wardhaugh är den första korrekta illustrationen av tonhöjdernas intervallförhållande (Wardhaugh, 2008, s. 25). Descartes valde att använda sig av grader för att illustrera hur toners ökade frekvens relaterade till en ton i högre oktaver (Wardhaugh, 2008, s. 21). Observera att benämningen är annorlunda än de som presenterades i 3.0. Här används de romanska språkens benämning på skalan: do, re, mi, fa, sol, la, ti, do. Modellen till höger har ingen känd författare. Vad som är intressant är däremot att cirkeln istället används som om den vore strängen hos ett instrument och visar vid vilka avstånd som tonerna uppkommer längs strängen. Skillnaden i graderat kontra praktiskt förhållningssätt är ett exempel på skillnader i intentioner hos matematiker kontra musiker. (Wardhaugh, 2008, s. 25)



Figur 6.2

Figur 6.3

Illustrationerna fortsatte att utvecklas från Descartes till Torricelli och Jacob Bernoulli vilka formulerade en utvecklad modell av de olika intervallens förhållande, *spira mirabili:* den logaritmiska spiralen. I figur 6.4 ser vi hur oktavens toner placerats i en geometriskt växande spiral, det vill säga en logaritmisk spiral. Den påminner om ett annat matematiskt fenomen: Arkimedes spiral, som beskriver aritmetiskt växande värden till skillnad från geometriska. Skillnaden mellan den aritmetiska och logaritmiska spiralen är att den aritmetiska rotationen följer en konstant hastighet, medan den logaritmiska har en hastighetsförändring, som är proportionerlig mot det ökande avståndet till origo. Det ger ett konstant vinkelförhållande mellan spiralens radie och tangent i de polära koordinaterna (Ferréol, 2018). Figur 6.4 kan även ses som en tvådimensionell projektion av en spiral som växer längs manteln hos en kon, från ett ovanstående perspektiv. Ett komplett varv om 360° runt konen motsvarar intervallet hos en oktav (Tennenbaum, 2018).



Figur 6.4

6.5 Sammanfattning

Den antika lärans hopp om att systemets definition skulle inkludera enbart rationella kvoter levde dock kvar trots de nya fynden inom matematikens värld. Anhängare till denna tro förde en opposition band matematiker som i enlighet med grekernas tankar motsatte sig logaritmerna som giltiga beräkningsmetoder och på så sätt illegitima som svar på problemet. Men i takt med att den liksvävande stämningen godtogs mer och mer av samtiden dog oppositionen ut. Den grupp som passionerat sökte sammanförandet mellan heltalsration och oktavens intervall kan ses som besegrad i och med de irrationella talens intåg (Schneiderman, 2011). Praktik vinner över perfektion.

Lösning förhöll sig förvisso till den ursprungliga pytagoreiska idén att 12 toner var det eftertraktade antalet toner i skolan. Förklaringen till detta var att systemet aldrig övergav tanken om att primtoner och kvinter skulle sammanfalla. Kvintens roll var central genom hela studien av oktaven. Till en början på grund av dess roll som första naturliga övertonen till en grundton, men även på grund av dess rena heltalsförhållande.

Sammanfattningsvis kan vi konstatera att det var matematiker med intresse för musik, som gav oss den skala samt den fördelning av hela och halva toner som vi använder idag som tangenter på ett piano. Hela matematikens arbete i detta var ett försök att eliminera den vargkvint som satte 12-tonssystemet i obalans. Det kan tänkas att andra stämningar med annan uppdelning av oktaven hade kunnat ge minst lika välstämd musik om vi bortser från kravet att använda 12 toner eller andra kvoter med ett närmevärde till den önskade relationen mellan oktav och kvint. Ett exempel på hur en sådan skala bestående av 19 toner skulle kunna låta i praktiken återfinns nedan i källhänvisningarna (Evans, 2020).

Att matematiker och musiker såg olika syfte med problemet innebar även olika tillämpningar av resultatet. De olika viljorna i frågan om matematisk allmängiltighet kontra musikalisk praxis kan mycket väl vara en av anledningarna till att länken mellan matematik och musik successivt försvagats.

7.0 Diskussion

Sett till den matematiska utvecklingen var det alltså inte matematikers eget intresse i musik som ledde till notationen av toner som vi har idag. Drivkraften till lösningen låg istället till stor del hos problemet med kvadrat- och kubikrötter som var svåra att beräkna (Christensen, 2008, s. 210). Trots det kan samverkan mellan matematik och oktavens toner ge oss ingångar till en mer filosofisk betraktelse på ämnenas relation.

7.1 Matematikens inverkan på musicerandet

Som beskrivet i kapitel 6.5 gav de tidigare förslagen på stämning mer nyanserade och karakteristiska tonarter där känslor och färgning hördes tydligare. Denna egenskap offrades till förmån för den allmängiltiga stämning som samtliga instrument kunde använda sig av. Dock finns flera exempel i historien på kompositörer som använt sig av de avrådda tonarterna för att skapa mer säregna och alternativa stycket (Grubbe a), 2018). Det kan tänkas att resan bort från de karaktäristiska tonarterna i och med den liksvävande stämningen har gett västerländsk musik ett mer opersonligt utgångsläge där musiken enligt andra stämningar hade genererat olika känslor men med nuvarande stämning låter mer lika i våra öron. Som att gå från ett färgspektrum till en gråskala.

Dock är de gränser som musikteorin definierat med hjälp av matematiken inte omöjliga att korsa. Under de senaste decennierna har vi sett en explosion av genrer samt nytänkande sätt att utöva musik som inte nödvändigtvis följer en matematisk eller musikteoretiskt korrekt komposition. Istället ser musiker främst till sitt gehör och utforskar nya ljudbilder och verktyg inom musikens konstform. Sedan 1900-talet har populärkulturen upplevt ett ökande antal genrer som trots anknytning till västerländsk musikteori tar sig friheter att frångå de rena förhållandena och experimentera med okonventionella stämningar och dissonanta tonpar (Tenney, 1988, s. 97).

7.2 Kombinatoriska möjligheter inom musik

Definitionen av oktavens toner innebär alltså ett ramverk som musiker kan välja att falla innanför eller att bryta. Om vi endast tillåter oss att arbeta med de definierade tonhöjderna i oktaven, innebär det då att vi homogeniserar musiken som produceras? Det följer logiskt att med ett fixt antal element finns ett beräknat högsta antal kombinationer som dessa element kan placeras i turordning. Som följd av detta borde det alltså finnas en ändlig mängd melodier att komponera innan vi återanvänder samma melodi. Genom att vända oss till kombinatoriken, det matematiska fält som beskriver just sådana fenomen kan vi betrakta antalet möjliga melodier som kan skapas från en tolvtonsskala.

Matematikern Mersenne skapade tabellen i figur 7.1 som visar på de kombinatoriska möjliga melodier som kan skapas från en harmonisk skala. Vid varje ytterligare ton som inkluderas blir de möjliga sammansättningarna fler och fler. Om vi exempelvis har 4 toner kan vi enligt Mersenne skapa 24 melodier, medan vi kan skapa 120 om vi endast lägger till en ton till.

Music theory and mathematics 285

1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121645100408832000
20	2432902008176640000
21	51090942171709440000
22	1124000727777607680000

Figure 10.5 Mersenne's table of the number of possible melodies (permutations) from 1 to 22 notes (range of the three-octave diatonic gamut), *Harmonie universelle*, Book II, "Livre second de chants," p. 108

Figur 7.1

Som tabellen visar når vi ett antal närmare 480 miljarder *permutationer* när vi använder alla 12 toner. Blickar vi utanför vår västerländska musikteori finns det som sagt exempel på andra system i världen som nyttjar andra sorters stämningar med andra antal av intervall, till exempel den kinesiska uppdelningen till 53 toner, som förklarar hur de övriga stegen i tabellen kan tillämpas. Dock är det inte givet att alla dessa kombinationer är brukbara som melodier. Till exempel så är en av de möjliga kombinationerna att endast spela samma ton genom hela stycket. Ett tämligen sällsynt recept på en hitlåt. Uppfattningen om vad som är en melodi beror på vår och andra kulturers uppfattning av vad som är en melodi, vad som är harmonisk musik och om denna nödvändigtvis måste använda endast harmoniska tonpar i ett ackord.

Andra kulturers klassiska såväl som populärkulturella verk har i och med globaliseringens tid nått den västerländska kulturens musikscen trots att de inte följer dennes traditionella definition av harmoni. Denna integration av konstformer berikar vårt musikaliska och kulturella spektrum som tidigare begränsats av oktaven och den renodlade ideologi som den västerländska musikteorin ärvt från sin avlägsna släkting: matematiken. Detta vidgande av vad som anses som musik och de nya uttrycksformerna som följer därav ger framtida kulturer ett närapå oändligt antal kombinationer av uttryck att upptäcka, komponera och uppleva.

7.3 Skapande eller utforskande?

Avslutningsvis återvänder vi till den ursprungliga definitionen av harmoni som det vårt mänskliga öra uppfattar som sammanfallande frekvenser. Vad som är behagligt ljud är som sagt en subjektiv uppfattning, icke desto mindre finns det onekligen frekvenser som är mer konsonanta med varandra. Det leder oss till frågan om denna harmoni inom musiken är något som existerar oberoende av oss människor eller om vi med vår subjektiva bedömning konstruerat musik och samtidigt bedömt den som ren eller falsk beroende på hur den utövas? Som vi såg i kapitel 6.3 är kvoten 7/12 en av flera möjliga uppdelningar av en fördubblad frekvens. Att detta accepterats inom västerländsk kultur som antal toner inom musikteori visar att oktavens toner är en mänsklig konstruktion: ett val av flera logiska resultat. Att förhållandet hos oktaven existerar är däremot en indikation på att harmoni är ett fenomen som existerar oberoende av människans beslut att definiera och kvantifiera den.

Harmoni är enligt det resonemanget både en mänsklig observation men inte ett fenomen som uppfunnits av människan. Om vi applicerar samma argument för matematiken som vetenskap når vi en ännu större filosofisk fråga: Är matematik en mänsklig konstruktion eller ett självständigt fenomen? Det kan tänkas att människan konstruerat matematiken baserat på våra civilisationers behov av organisation och struktur. Det kan även tänkas att matematiken alltjämt funnits omkring oss och endast väntat på att bli upptäckt. Det senare scenariot leder oss in på en både filosofisk och religiös fråga: vem eller vad har i så fall skapat dessa system och samband för oss att upptäcka? Hur kan natur, växter, djur, väder och musik alla visa upp mönster på ett spontant sätt? Vilka ytterligare mönster finns i så fall kvar för oss att upptäcka? Det kan tänkas att vi måste vänta in ytterligare utveckling inom matematiskt språk för att kunna formulera svar på dessa frågor.

8.0 Referenser

American Mathematical Society. (den 21 05 2018). *Mathematics & Music*. Hämtat från American Mathematical Society: http://www.ams.org/publicoutreach/math-and-music

Adeyemo, T. (2015). *How do Mathematics and Music Relate To Each Other?* Leicester School of Architecture.

Audiam (Publishing), UMPG Publishing. (den 09 01 20). *Arnold Schönberg - Piano Concerto, Op. 42.* Hämtad från https://www.youtube.com/watch?v=JEY9lmCZbIc

Brzezinski, C. (2012). *History of Continued Fractions and Padé Approximants.* Springer Science & Business Media.

Bragg, M. (2011). *In Our Time: The companion to the Radio 4 series.* Hachette UK.

Christensen, T. (2008). *Theory, The Cambridge History of Western Music.* Cambridge: Cambridge University Press.

Clark, K. M., & Montelle, C. (den 22 05 2018). *Logarithms: The Early History of a Familiar Function*. Hämtat från Mathematical Association of America: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/logarithms-the-early-history-of-a-familiar-function-introduction

Earlham College Music. (den 22 05 2018). *A Feeling for Harmony*. Hämtat från legacy.earlham.edu: http://legacy.earlham.edu/~tobeyfo/musictheory/Book1/FFH1_CH1/1L_TheLegendofPythagoras.html

Etéra, S. (den 21 05 2018). *Nature by Numbers.* Hämtat från youtube.com: https://www.youtube.com/watch?v=kkGeOWYOFoA

Evans, G. (den 10 02 2020). *19-TET and 12-TET Comparison.* Hämtat från youtube.com: https://www.youtube.com/watch?v=_w7GXX5cJDY

Fauvel, J., Flood, R., & Wilson, R. (2010). *Music and Mathematics, From Pythagoras to Fractals.* New York: Oxford University Press.

Ferréol, R. (den 30 05 2018). *Logarithmic Spiral*. Hämtat från Mathcurve.com: http://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/logarithmic/logarithmic.shtml

Grubbe, L.

a) (den 17 05 2018). *Stämningssystem*. Hämtat från Musikipedia.se http://www.musikipedia.se/stamningssystem

b) (den 06 02 2020). *Skalor.* Hämtat från Musikipedia.se https://www.musikipedia.se/skalor

c) (den 06 02 2020). *Kvintcirkeln.* Hämtat från Musikipedia.se

https://www.musikipedia.se/kvintcirkeln

Hartfeldt, C., Eid, W., & Henning, H. (2002). *Mathematik in der Welt der Tone.* Magdeburg.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought - From Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press.

Lundberg, S. (2008). *Kompendium i Matematik och Musik.* Luleå: Luleå Tekniska universitet Inst. för matematik.

Matvievskaya, G. (1987). *The Theory of Quadratic Irrationals in Medieval Oriental Mathematics.* Annals of the New York Academy of Sciences, 500: 253-277.

Regebro, L. (den 21 05 2018). *Why Are There Twelve Notes in an Octave?* Hämtat från Music Practice & Theory: https://music.stackexchange.com/questions/24/why-are-there-twelve-notes-in-an-octave

Rubinstein, M. (den 25 05 2018). *Why 12 notes to the Octave?* Hämtat från Math at Univeristy of Waterloo: http://www.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/tuning/12.html

Schneiderman, R. (2011). *Can You Hear the Sound of a Theorem?* Notices of The AMS 58(7), 929-338.

Scientific American. (den 09 01 2020). *Fractals in broccoli.* Hämtad från https://www.scientificamerican.com/gallery/fractals-in-broccoli/

Seebass, T. (2010). Seebass, T. (2010). *The Idea of Harmony and Its Musical Expression (with Musical Examples*). Procedia-Social and Behavioral Sciences, 2(5), 6706-6710.

Stock, J. (2007). *Alexander J. Ellis and His Place in the History of Ethnomusicology. Ethnomusicology*, 51(2), 306-325. Retrieved February 12, 2020, from www.jstor.org/stable/20174527

Tennembaum, J. (den 30 05 2018). *The Foundations of Scientific Musical Tuning*. Hämtat från The Schiller Institute: http://www.schillerinstitute.org/fid_91-96/fid_911_jbt_tune.html

Tenney, J. (1988). *A History of 'Consonance' and 'Dissonance*'. Excelsior Music Publishing Company, New York

Wardhaugh, B. (2008*). Musical Logarithms in the seventeenth century: Descartes, Mercator, Newton.* Historica Mathematica 35(1), 19-36.

Wright, D. (2009). *Mathematics and Music.* United States: by Author.

8.1 Figurförteckning