Separation av två klasser av åtta-dimensionella reella divisionsalgebror

av

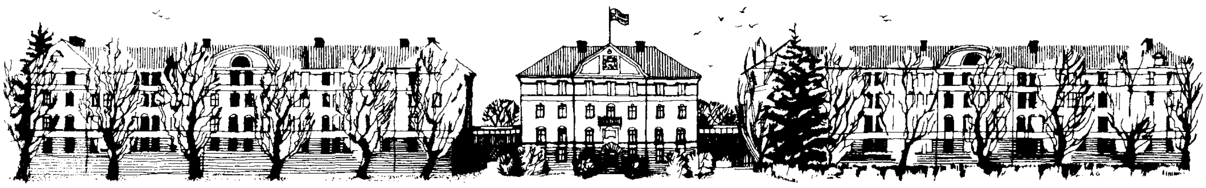
Lars Lindberg

U.U.D.M. Report 2001:P4

Examensarbete i matematik, 20 poäng

Handledare och examinator: Ernst Dietrich

Maj 2001



Department of Mathematics

Uppsala University

Separation av två konstruktioner av 8-dimensionella reella divisionsalgebror

Lars Lindberg

Abstract

There is more than one way of constructing 8-dimensional real division algebras. The present thesis will show that two of these methods, construction by doubling a four-dimensional algebra and construction by dissident triples, give rise to two almost disjoint sets of isoclasses.

The doubling of an algebra works as follows: Given a four-dimensional quadratic algebra $\mathcal{A}$ we define $\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ as a vector space, with multiplication given by $(u,v)(x,y) = (ux - \bar{y}v, v\bar{x} + yu)$, $\forall (u,v),(x,y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, where $\bar{x}$ denotes the conjugate of x. Furthermore if $\mathcal{A}$ is a real division algebra then $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ is.

A dissident triple (V,ξ,η) is formed by a real vector space V and two linear maps, $\xi : V \wedge V \to \mathbb{R}$ and $\eta : V \wedge V \to V$, where η is required to be dissident, i.e. $v, w, \eta(v \wedge w)$ are lineary independent whenever $v, w \in V$ are. Each dissident triple (V,ξ,η) defines a division algebra $\mathbb{R} \times V$ whose multiplication is given by $(\alpha,v),(\beta,w) \mapsto (\alpha\beta - \langle v,w\rangle + \xi(v \wedge w),\ \beta v + \alpha w + \eta(v \wedge w))$.

These two constructions give rise to two sets of isoclasses. The objective of the present thesis is to show that the intersection of these two sets consist of a single element; the isoclass of the octonion algebra.

1 Inledning

För att kunna komma till det väsentliga i detta arbete behöver jag först en grund att stå på. Till en början får en *algebra* beteckna en ändligt-dimensionell algebra.

Definition 1.1 *En algebra över en kropp k är ett vektorrum $\mathcal{A}$ utrustat med en k-bilinjär avbildning* $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ (a,b) \mapsto ab$

Definition 1.2 *En divisionsalgebra över k uppfyller dessutom att algebran inte har några nolldelare, dvs* $xy = 0 \ \Rightarrow\ x = 0 \ \vee\ y = 0$

Definition 1.3 (i) *En algebra är alternativ om varje underalgebra, genererad av två element, är associativ.*
(ii) *En algebra är potensassociativ om varje underalgebra, genererad av ett element, är associativ.*

Definition 1.4 *En algebra $\mathcal{A}$ över ett k-linjärt vektorrum kallas kvadratisk algebra om den har ett enhetselement,* $1 \in \mathcal{A}$ *och varje* $x \in \mathcal{A}$ *uppfyller en kvadratisk ekvation* $x^2 = \alpha x + \beta 1$ *med* $\alpha,\ \beta \in k$

Sats 1.5 *Att en algebra är kvadratisk är ekvivalent med att den är potensassociativ.*

Jag börjar med några exempel på reella divisionsalgebror: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ och $\mathbb{O}$. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ och $\mathbb{H}$ klassificerar alla associativa divisionsalgebror (Frobenius 1877 [8]) och tillsammans med $\mathbb{O}$ klassificeras alla alternativa (Zorn 1931 [10]). Genom den berömda (1,2,4,8)-satsen (Hopf 1940, Kervaire och Milnor, Atiyah och Hirzebruch 1961, Adams 1962 [9]) vet vi även att divisionsalgebror enbart förekommer i dimensionerna 1,2,4 och 8. Vi har nu sett ett exempel på en divisionsalgebra ur varje dimension. Finns det fler? Javisst, se sidan 3 för oändligt många isomorfiklasser av 4-dimensionella reella divisionsalgebror. Nästa steg är då att klassificera alla potensassociativa divisionsalgebror. $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ klassificerar dessa i en resp. två dimensioner. Klassifikationen i fyra dimensioner slutfördes av Dieterich 1998, se [2]. Det som återstår när det gäller de potensassociativa divisionsalgebrorna är alltså att klassificera de 8-dimensionella divisionsalgebrorna. Detta arbete kommer inte att gå in på en fullständig klassifikation, men kommer att visa att två mängder av isomorfiklasser är nästintill disjunkta och därmed kan studeras separat.

2 Konstruktion av 8-dimensionella reella divisionsalgebror

Jag kommer att studera två olika sätt att konstruera 8-dimensionella reella divisionsalgebror. Konstruktion mha dissidenta tripplar samt genom fördubbling av fyrdimensionella reella divisionsalgebror.

2.1 Dissidenta tripplar

För att beskriva dissidenta tripplar behövs först ett par definitioner.

Definition 2.1 *Låt V vara ett reellt vektorrum. η kallas dissident omm $v, w, \eta(v \wedge w)$ är linjärt oberoende när $v, w \in V$ är linjärt oberoende.*

Definition 2.2 *En dissident algebra V identifieras med par (V, η) där V är ett euklidiskt vektorrum, $V = (V, <>)$ och en dissident avbildning η.*

Tanken med dissidenta tripplar är att en reell divisionsalgebra $\mathcal{A}$ kan faktoriseras till $\mathcal{A} = \mathbb{R} \oplus V$ där $V = Im(\mathcal{A})$(enl. Frobenius lemma, se [8]). Vektorrummet V är då en *dissident algebra*. Detta vektorrum är uttrustat med en dissident avbildning η. Det sista elementet i trippeln är avbildningen $\xi : V \wedge V \to \mathbb{R}$. Genom en sådan trippel (V, ξ, η) kan då en reell divisionsalgebra beskrivas. Divisionsalgebran är då $\mathbb{R} \times V$ med multiplikation $(\alpha, v), (\beta, w) \mapsto (\alpha\beta - \langle v, w \rangle + \xi(v \wedge w), \beta v + \alpha w + \eta(v \wedge w))$ (se [4] för detaljer).

Tanken är då att konstruera en dissident algebra och komplettera den med ξ för att erhålla en divisionsalgebra. Det som då behövs är ett sätt att konstruera η.

Lemma 2.3 *Låt $\pi : V \wedge V \to V$ vara en vektorprodukt. Om $\varepsilon : V \to V$ är en definit endomorfism så är $\varepsilon\pi : V \wedge V \to V$ en dissident avbildning.*

Bevis Låt $v, w \in V$ vara ortonormala vektorer. Eftersom π är en vektorprodukt så gäller att $\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w \subset \pi(v \wedge w)^{\perp}$ och $|\pi(v \wedge w)| = 1$. Att ε är definit ger $\varepsilon\pi(v \wedge w) \notin \pi(v \wedge w)^{\perp}$. Detta ger då att $\varepsilon\pi(v \wedge w) \notin \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w$. $\square$

Anmärkning 2.4 *Genom att ta en godtycklig definit endomorfism ε kan alltså en dissident algebra konstrueras och med den en divisionsalgebra. Det är denna metod som jag kallar för konstruktion av divisionsalgebror mha dissidenta tripplar.*

Jag går nu vidare genom att beskriva den fullständiga klassifikationen av fyrdimensionella potensassociativa reella divisionsalgebror (Dieterich 1998 [2]).

Låt $\mathcal{T} = \{\delta \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \lambda \leq \mu \leq \nu\}$ och $\mathcal{K} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{T}$. Element $\kappa = (b,\ c,\ \delta) \in \mathcal{K}$ kan ses som konfigurationer i $\mathbb{R}^3$, där δ identifieras med ellipsoiden $E_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^T \Delta_\delta x = 1\}$, där $\Delta_\delta$betecknar diagonalmatrisen som ges av δ. Symmetrigruppen till ellipsoiden $E_\delta$är $G_\delta = \{S \in SO_3\left(\mathbb{R}^3\right) \mid S^T \Delta_\delta S = \Delta_\delta\}$. Två konfigurationer $(b,\ c,\ \delta)$ och $(b',\ c',\ \delta')$ är ekvivalenta omm $\delta = \delta'$ och $(Sb,\ Sc) = (b',\ c')$ för något $S \in G_\delta$. Då fås multiplikationen genom $\xi = (b_3,\ -b_2,\ b_1)$ samt

$$\eta = \begin{pmatrix} c_2 & -c_3 & \lambda \\ -c_1 & \mu & c_3 \\ \nu & c_1 & -c_2 \end{pmatrix}$$

Jag ska nu lista klassifikationen av de fyradimensionella reella divisionsalgebrorna. Beskrivningen förenklas genom notationerna $p = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ och $\bar{p} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, t.ex.

$$\begin{pmatrix} p & \mathbb{R} \\ 0 & \bar{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ (b,c) \;\middle|\; \begin{array}{ccccccc} b_1 & \in & p & , & c_1 & \in & \mathbb{R} \\ b_2 & = & 0 & , & c_2 & \in & \bar{p} \\ b_3 & = & 0 & , & c_3 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Klassifikationen består då av:

$$\lambda = \mu = \nu$$

$$\mathcal{C}_{11}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{p} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{12}(k) = \begin{pmatrix} p & \mathbb{R} \\ 0 & \bar{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\lambda = \mu < \nu$$

$$\mathcal{C}_{21}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{p} \\ 0 & \bar{p} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{22}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{p} \\ p & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{23}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & \mathbb{R} \\ 0 & \bar{p} \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{C}_{24}(k) = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{25}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ p & \mathbb{R} \\ p & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\lambda < \mu = \nu$$

$$\mathcal{C}_{31}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{p} \\ 0 & \overline{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{32}(k) = \begin{pmatrix} p & \mathbb{R} \\ 0 & \overline{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{33}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{p} \\ p & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{C}_{34}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ p & \mathbb{R} \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{35}(k) = \begin{pmatrix} p & \mathbb{R} \\ p & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\lambda < \mu < \nu$$

$$\mathcal{C}_{41}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \overline{p} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{42}(k) = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \\ 0 & \overline{p} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{43}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \\ 0 & \overline{p} \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{C}_{44}(k) = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & p \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{45}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ p & \mathbb{R} \\ p & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{46}(k) = \begin{pmatrix} p & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \\ 0 & \overline{p} \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{C}_{47}(k) = \begin{pmatrix} p & \mathbb{R} \\ 0 & p \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{48}(k) = \begin{pmatrix} p & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \\ p & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{49}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & \mathbb{R} \\ 0 & \overline{p} \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{C}_{4,10}(k) = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{4,11}(k) = \begin{pmatrix} p & \mathbb{R} \\ p & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{C}_{4,12}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{p} \\ p & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{C}_{4,13}(k) = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & \mathbb{R} \\ \overline{p} & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad .$$

Att denna klassifikation verkligen ger en representant för varje isomorfiklass bevisas i [6].

2.2 Fördubblingen

Fördubblingen gör precis vad namnet utlovar, den fördubblar dimensionsantalet i en kvadratisk algebra. Detta stycke behandlar några egenskaper hos denna process.

Sats 2.5 *Det finns exakt en linjärform*

$$\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \textit{ med } \lambda(e) = 1 \textit{ och } Kern\lambda = Im\mathcal{A}$$

Notera att $\lambda(x)$ påminner om Re(x) i fallet $\mathcal{A} = \mathbb{C}$. Det förefaller sig naturligt att då definera konjugatet som

$$^{-} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, x \mapsto \overline{x} := 2\lambda(x)e - x$$

Konjugatet är $\mathbb{R}$-linjärt och det gäller att

$$\begin{aligned} \bar{x} = \lambda(x)e - u \text{ för } x = \lambda(x)e + u, u \in \mathcal{A} \\ \bar{\bar{x}} = x \text{ (Involution)}, \lambda(\bar{x}) = \lambda(x) \end{aligned}$$

Låt $\mathcal{A}$ vara en kvadratisk algebra. Då är

$$<>: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R} \text{ , } (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle := 2\lambda(x)\lambda(y) - \frac{1}{2}\lambda(xy+yx)$$

en symmetyrisk bilinjär form. $\forall x,y \in \mathcal{A}$ gäller

$$\langle x,x \rangle = 2\lambda(x)^2 - \frac{1}{2}\lambda(x^2) \tag{1}$$

$$\langle x,e \rangle = \lambda(x), \langle e,e \rangle = 1 \tag{2}$$

$$x^2 = 2\lambda(x)x - \langle x,x \rangle e \tag{3}$$

$$xy + yx = 2\lambda(x)y + 2\lambda(y)x - 2\langle x,y \rangle e \tag{4}$$

Om $\mathcal{A}$ dessutom är nolldelarfri så gäller $\langle x,x \rangle > 0$, $x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$

Anmärkning 2.6 *Eftersom en divisionsalgebra innebär att algebran är nolldelarfri så är den bilinjära formen i detta fall en skalärprodukt.*

2.2.1 Fördubblingen

Givet en kvadratisk algebra $\mathcal{A}$ definerar vi $\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ som ett vektorrum, med multiplikation som ges av $(u,v)(x,y) = (ux - \bar{y}v, v\bar{x} + yu)$, $\forall (u,v),(x,y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$.
Att detta verkligen ger en upphov till en ny algebra med $dim(\mathcal{V}(\mathcal{A})) = 2 * dim(\mathcal{A})$ bevisas bl.a. i [7] (s. 177-178). Dessutom behålls divisionsegenskapen om den fördubblade algebran högst har dimension 8 (se [4]).

2.2.2 Egenskaper hos fördubblingen

Låt $\mathcal{A}$ vara en 4-dim algebra med bas $e_1 = 1, e_2, e_3, e_4$. Studera $\mathcal{A}$ som en direkt summa $\mathcal{A} = \mathbb{R}1 \oplus U$
Multiplikationen $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ges av $e_1 e_i = e_i = e_i e_1$ samt en matris A som beskriver multiplikationen av basvektorerna i $U = Im(\mathcal{A})$

	e_2	e_3	e_4
e_2			
e_3		A	
e_4			

där matrisen A ges genom

$$A = \begin{pmatrix} -e_1 & b_3e_1 + c_2e_2 - c_1e_3 + \nu e_4 & -b_2e_1 + c_3e_2 - \mu e_3 - c_1e_4 \\ -b_3e_1 - c_2e_2 + c_1e_3 - \nu e_4 & -e_1 & b_1e_1 + \lambda e_2 + c_3e_3 - c_2e_4 \\ b_2e_1 - c_3e_2 + \mu e_3 + c_1e_4 & -b_1e_1 - \lambda e_2 - c_3e_3 + c_2e_4 & -e_1 \end{pmatrix}$$

där b_i, c_i, λ, μ och ν fås genom konfigurationen för den fyra dimensionella algebran (se sidan 3).

Definition 2.7 *Låt A vara en matris. Med A_{+4} förstås en matris identisk med A där varje förekomst av e_i är utbytt mot e_{i+4}.*

Multiplikationen i den fördubblade algebran $\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}1 \oplus V$ ges då utav $e_1 e_i = e_i = e_i e_1$ samt i V utav tabellen

	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_2				e_6			
e_3		A		e_7		A_{+4}^T	
e_4				e_8			
e_5	$-e_6$	$-e_7$	$-e_8$	$-e_1$	e_2	e_3	e_4
e_6				$-e_2$			
e_7		$-A_{+4}$		$-e_3$		A^T	
e_8				$-e_4$			

Att multiplikationen ser ut på ovanstående sätt följer direkt ur definitionen av fördubblingen. Denna matris åskådliggör ett viktigt faktum i multiplikationen, även om matrisen inte ser ut att innehålla någon slags symmetri så är den faktiskt antisymmetrisk. Detta gör att $e_i e_j = -e_j e_i$ om $i \neq j$.

Lemma 2.8 *Studera $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ som en direkt summa $\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}1 \oplus V$. Låt $u, v \in V$. Då gäller $u \perp v \Leftrightarrow uv + vu = 0 \in \mathcal{V}(A)$*

Bevis Eftersom $u, v \in V = Im(\mathcal{V}(\mathcal{A}))$ så gäller $\lambda(u) = \lambda(v) = 0$
$uv + vu = 0 \Leftrightarrow$ (ekv. 4) $2\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v$ □

Lemma 2.9 *Lemma om bevarandet av ON-bas. En ON-bas i $\mathcal{A}$ överförs till en ON-bas i $\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ genom*

$$e_i = (e_i, 0) \text{ om } i \in \{1,2,3,4\}$$
$$e_i = (0, e_{i-4}) \text{ om } i \in \{5,6,7,8\}$$

Bevis $e_i \notin \mathbb{R}1, e_i^2 \in \mathbb{R}1$ dvs $e_i \in V = Im\mathcal{V}(\mathcal{A})$ $\forall i \in \underline{8} \backslash \{1\}$

Ur multiplikationstabellen för V fås $e_i e_j + e_j e_i = 0$, $i \neq j$

$\forall i, j \in \underline{8} \backslash \{1\}$, $i \neq j$ gäller $e_i e_j + e_j e_i = 0 \Rightarrow$ (lemma 2.8) $e_i \perp e_j$

$\langle e_i, e_i\rangle = 2\lambda(e_i)\lambda(e_i) - \frac{1}{2}\lambda(e_i e_i + e_i e_i) = 0 - \frac{1}{2}\lambda(-2e_1) = 1$ dvs ON-bas i V

Komplettera detta med $e_1 = 1$ och en ON-bas i $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ erhålls. □

Anmärkning 2.10 *Detta lemma kan verka trivialt, men likväl är det detta faktum som gör att det går lätt att arbeta med fördubblingen. Jag har endast visat att ON-basen bevaras vid fördubbling från 4 till 8 dimensioner, men det troliga är att det alltid gäller.*

3 Konstruktion av 8-dimensionella divisionsalgebror

Nu när vi har två sätt att konstruera divisionsalgebror på skall jag visa att dessa konstruktioner inte kan ge upphov till samma algebror.

Tag en konfiguration $\kappa = (b, c, \delta)$ för en fyradimensionell algebra (se sidan 3 för fullständig klassifikation av dessa algebror). Denna konfiguration kan ses som två punkter i rymden, $b = (b_1,\ b_2,\ b_3)$, $c = (c_1,\ c_2,\ c_3)$ och en ellipsoid där $\delta = (\lambda,\ \mu,\ \nu)$ beskriver ellipsens avstånd till respektive axel.
Genom fördubblingen $(\mathcal{V})$ erhålls $\kappa = (b, c, \delta) \mapsto \mathcal{A} = \mathcal{A}(\kappa) \mapsto \mathcal{B} = \mathcal{V}(\mathcal{A}(\kappa))$. Från den fördubblade algebran $\mathcal{B}$ får vi en dissident trippel (V, ξ, η) och det är denna jag vill jämföra med de tripplar som genom den andra konstruktionen ger upphov till 8-dimensionella reella divisionsalgebror.

V är då imaginärrummet till den 8-dimensionella algebran.

ξ och η fås genom (λ är som i lemma 2.5):

Låt $\beta : V \times V \to \mathbb{R},\ \beta = \beta^s + \beta^a$, där
$\beta^s(v,w) = \frac{1}{2}(\beta(v,w) + \beta(w,v)) = \frac{1}{2}(\lambda(vw) + \lambda(wv)) = \frac{1}{2}\lambda(vw + wv) = -\langle v, w\rangle$ och
$\beta^a(v,w) = \frac{1}{2}(\beta(v,w) - \beta(w,v)) = \frac{1}{2}(\lambda(vw) - \lambda(wv)) = \frac{1}{2}\lambda(vw - wv)$

Då är $\xi = \beta^a(v,w) = \frac{1}{2}\lambda(vw - wv)$ och $\eta(v \wedge w) = vw - \lambda(vw)$

Det jag ska studera närmare är η. Denna avbildning blir då för en godtycklig fördubblad algebra:

$$\eta = \begin{pmatrix}
c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -c_2 & -c_3 & -\lambda \\
-c_1 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 & \mu & -c_3 \\
\nu & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\nu & c_1 & c_2 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -b_3 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & -1 & -b_1 & 0 & -b_2 & b_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -c_2 & -c_3 & 0 & 0 & c_2 & 0 & -\lambda & 0 & c_3 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & \mu & 0 & 1 & -c_1 & 0 & -c_3 & 0 & -\mu & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\nu & c_1 & 0 & 0 & \nu & 0 & c_2 & 1 & -c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Om denna avbildning kan faktoriseras som $\eta = \varepsilon\pi$ kan jag jämföra ε med de ε som skapar algebrorna genom konstruktionen beskriven i sektion 2.1. Däremot är det tyvärr inte bara att gå rakt på sak och faktorisera, det finns oändligt många vektorprodukter att välja på. Dock kan vi istället studera $\eta_{\mathbb{P}}$, vilket är en automorfism på $\mathbb{P}(\mathbb{R}^7)$, projektiosrummet i 7 dimensioner. Om vi sedan kan lyfta denna morfism till $GL_7(\mathbb{R})$ så får vi nästan det sökta ε, det som erhålls är ε^{-*}, dvs inverterade och transponerade ε.

Frågan är nu om $\eta_{\mathbb{P}}$ kan lyftas till ε^{-*} eller ej. För att kunna besvara frågan måste jag försöka konstruera $\eta_{\mathbb{P}}$. Innan jag går in på detta behövs lite teori.

Definition 3.1 *Låt V vara ett vektorrum. Jag definerar då:*

1. *En projektiv punkt i $\mathbb{P}(V)$ är ett en-dimensionellt underrum till V.*
2. *En projektiv linje i $\mathbb{P}(V)$ är ett två-dimensionellt underrum till V.*

Definition 3.2 *En avbildning β kallas kollinjär omm följande två villkor är uppfyllda*

1. *avbildningen är bijektiv*
2. *tre projektiva punkter som ligger på en projektiv linje avbildas på tre projektiva punkter som ligger på en projektiv linje*

Sats 3.3 Projektiva geometrins huvudsats.

Låt β vara en bijektion från ett projektivt rum $\mathbb{P}$ till sig självt. Då kan β lyftas till en linjär avbildning omm β är kollinjär.

3.1 Konstruktion av $\eta_{\mathbb{P}}$

Att beräkna hur $\eta_{\mathbb{P}}$ ser ut är enkelt men kräver en del arbete med matriser. Jag nöjer mig därför att endast visa delar av beräkningarna, resten av beräkningarna är på precis samma sätt. Först behöver jag dock en notation.

Definition 3.4 *$Y_{\bullet ij}$ avser den kolonn i η som motsvarar $\eta(e_i \wedge e_j)$*

Jag börjar med att beräkna $\eta_{\mathbb{P}}$ för de olika basvektorerna. Först har vi $\eta_{\mathbb{P}}[e_2] = \eta\left(e_2 \wedge e_2^{\perp}\right)^{\perp}$

$$\begin{aligned} \eta\left(e_2 \wedge e_2^{\perp}\right) &= [Y_{\bullet 23},\ \dots,\ Y_{\bullet 28}] \\ &= [Y_{\bullet 23},\ Y_{\bullet 24}] \oplus [e_5,\ e_6,\ e_7,\ e_8] \\ \text{Dvs } \eta_{\mathbb{P}}[e_2] &= [Y_{\bullet 23},\ Y_{\bullet 24}]^{\perp} \subset [e_2,\ e_3,\ e_4] \end{aligned}$$

Detta ger då att $\eta_{\mathbb{P}}[e_2] = \left(c_1^2 + \mu\nu : c_1c_2 + c_3\nu : c_1c_3 - c_2\mu : 0 : 0 : 0 : 0\right)$ På samma sätt beräknas övriga $\eta_{\mathbb{P}}[e_i]$ där $i = 3, \dots, 8$ och fås till

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbb{P}}[e_3] &= \left(c_1c_2 - c_3\nu : c_2^2 + \lambda\nu : c_2c_3 + c_1\lambda : 0 : 0 : 0 : 0\right) \\ \eta_{\mathbb{P}}[e_4] &= \left(c_1c_3 + c_2\mu : c_2c_3 - c_1\lambda : c_3^2 + \lambda\mu : 0 : 0 : 0 : 0\right) \\ \eta_{\mathbb{P}}[e_5] &= (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0) \\ \eta_{\mathbb{P}}[e_6] &= \left(0 : 0 : 0 : 0 : c_1^2 + \mu\nu : c_1c_2 + c_3\nu : c_1c_3 - c_2\mu\right) \\ \eta_{\mathbb{P}}[e_7] &= \left(0 : 0 : 0 : 0 : c_1c_2 - c_3\nu : c_2^2 + \lambda\nu : c_2c_3 + c_1\lambda\right) \\ \eta_{\mathbb{P}}[e_8] &= \left(0 : 0 : 0 : 0 : c_1c_3 + c_2\mu : c_2c_3 - c_1\lambda : c_3^2 + \lambda\mu\right) \end{aligned}$$

Jag har nu alla kolonner i matrisen för $\eta_{\mathbb{P}}$ sånär som på konstanten för varje kolonn. Om jag antar att $\eta_{\mathbb{P}}$ är kollinjär, vilket enligt sats 3.3 är ekvivalent med att $\eta_{\mathbb{P}}$ kan lyftas, kan jag fixera kolonnerna mot varandra och därmed bara få en konstant kvar. Men först en hjälpsats

Lemma 3.5 *$(e_i + e_j) \perp (e_i - e_j)$ samt $(e_i + e_j) \perp e_k$ där $i \neq j$ och $i \neq k,\ j \neq k$*

Bevis Följer på en gång av ekv. 4 på sidan 5 $\square$

Jag fortsätter med hjälp av ovanstående lemma. Kalla konstanten för kolonnen hörandes till $\eta_{\mathbb{P}}[e_i]$ för λ_i

$$\eta_{\mathbb{P}}[e_2 + e_3] = \eta\left((e_2 + e_3) \wedge (e_2 + e_3)^{\perp}\right)^{\perp} = [Y_{\bullet 23},\ Y_{\bullet 24} + Y_{\bullet 34},\ \dots,\ Y_{\bullet 28} + Y_{\bullet 38}]^{\perp}$$

Vilket då ger

$$H = \begin{bmatrix} c_2 & c_3 + \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_3 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & -c_1 - c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 1 & -b_3 - 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & c_2 & -c_2 & -c_3 - \lambda \\ 0 & 0 & 1 & -c_1 & c_1 & \mu - c_3 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & \nu & c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

Antag nu att $\eta_{\mathbb{P}}$ är kollinjär. Detta gör att lösningen till $[x]H = 0$ måste se ut som $[x] = (\lambda_2(\mu\nu + c_1^2) + \lambda_3(c_1c_2 - c_3\nu) : \lambda_2(c_3\nu + c_1c_2) + \lambda_3(\lambda\nu + c_2^2) : \lambda_2(c_1c_3 - c_2\mu) + \lambda_3(c_1\lambda + c_2c_3) : 0 : 0 : 0 : 0)$. Detta ger då lösningen $\lambda_3 = \lambda_2$. På detta sätt "låses" konstanterna till $\lambda_8 = \lambda_7 = \lambda_6 = \lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2$

λ_5 däremot är lite svårare att bestämma, eller snarare vid ett försök att bestämma λ_5 fås ekvationer som måste vara uppfyllda. Med den nyss använda metoden tillämpad på $\eta_{\mathbb{P}}[e_2 + e_5]$ fås:

$$\begin{aligned}\eta_{\mathbb{P}}[e_2+e_5] = \eta\left((e_2+e_5)\wedge(e_2+e_5)^{\perp}\right)^{\perp} = [Y_{\bullet 25},\ & Y_{\bullet 23} - Y_{\bullet 35},\ Y_{\bullet 24} - Y_{\bullet 45},\ Y_{\bullet 26} + Y_{\bullet 56},\\ & Y_{\bullet 27} + Y_{\bullet 57},\ Y_{\bullet 28} + Y_{\bullet 58}]^{\perp}\end{aligned}$$

Vilket då ger

$$H = \begin{bmatrix} 0 & c_2 & c_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & -\mu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \nu & -c_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -b_3 & b_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -c_2 & -c_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & c_1 & \mu \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\nu & c_1 \end{bmatrix}$$

Den antagna kollinjäriteten hos $\eta_{\mathbb{P}}$ gör att lösningen till $[x]H = 0$ måste se ut som $[x] = (\lambda_2(\mu\nu + c_1^2) : \lambda_2(c_3\nu + c_1c_2) : \lambda_2(c_1c_3 - c_2\mu) : \lambda_5 : 0 : 0 : 0)$. $[x]H = 0$ ger genom de tre sista kolonnerna i H upphov till systemet:

$$\begin{aligned} x_2 - \ x_5 = 0 &\Leftrightarrow x_5 = \ \ x_2 = \mu\nu + c_1^2 \\ x_3 - b_3x_5 = 0 &\Leftrightarrow x_3 = \ b_3x_5 = b_3(\mu\nu + c_1^2) \\ x_4 + b_2x_5 = 0 &\Leftrightarrow x_4 = -b_2x_5 = -b_2(\mu\nu + c_1^2) \end{aligned}$$

Detta ger då två ekvationer som måste vara uppfyllda:

$$b_3(c_1^2 + \mu\nu) = c_1c_2 + c_3\nu \tag{5}$$
$$b_2(c_1^2 + \mu\nu) = c_2\mu - c_1c_3 \tag{6}$$

På samma sätt ger $\eta_{\mathbb{P}}[e_3 + e_5]$:

$$b_3(c_2^2 + \lambda\nu) = c_3\nu - c_1c_2 \tag{7}$$
$$b_1(c_2^2 + \lambda\nu) = c_2c_3 + c_1\lambda \tag{8}$$

$\eta_{\mathbb{P}}[e_4 + e_5]$:

$$b_1(c_3^2 + \lambda\mu) = c_1\lambda - c_2c_3 \tag{9}$$
$$b_2(c_3^2 + \lambda\mu) = c_2\mu + c_1c_3 \tag{10}$$

$\eta_{\mathbb{P}}[e_5 + e_6]$:

$$b_3(c_1^2 + \mu\nu) = -c_1c_2 - c_3\nu \tag{11}$$
$$b_2(c_1^2 + \mu\nu) = c_1c_3 - c_2\mu \tag{12}$$

$\eta_{\mathbb{P}}[e_5+e_7]$:

$$b_3(c_2^2+\lambda\nu)=c_1c_2-c_3\nu \tag{13}$$
$$b_1(c_2^2+\lambda\nu)=-c_2c_3-c_1\lambda \tag{14}$$

$\eta_{\mathbb{P}}[e_5+e_8]$:

$$b_3(c_3^2+\lambda\mu)=-c_1c_3-c_2\mu \tag{15}$$
$$b_2(c_3^2+\lambda\mu)=c_2c_3-c_1\lambda \tag{16}$$

Lemma 3.6 *Om $\eta_{\mathbb{P}}$ kan lyftas så är $\kappa=(0,0,\delta)$*

Bevis Om η_P kan lyftas så är $\eta_{\mathbb{P}}$ kollinjär enligt sats 3.3. Då måste ekvationerna (5)-(16) vara uppfyllda.

$$\begin{aligned}(5)+(7)+(11) &\Rightarrow b_3=c_3=0\\ (6)+(10)+(12) &\Rightarrow b_2=c_2=0\\ (8)+(9)+(14) &\Rightarrow b_1=c_1=0\end{aligned}$$

Vilket ger det sökta resultatet. □

Nu kommer jag till det fall där $\eta_{\mathbb{P}}$ verkligen går att lyfta till ε^{-*}. Först behöver jag dock ett litet lemma.

Lemma 3.7 *$e_2-e_3,\ e_2-e_4,\ e_2-e_5,\ e_6,\ e_7,\ e_8$ och $e_2+e_3+e_4+e_5$ utgör en ortogonal bas i V.*

Bevis Följer genom att ekv 4 på sidan 5 är uppfylld för alla kombinationer av ovanstående vektorer.□

Med hjälp av detta lemma kan jag då bevisa den utlovade satsen.

Sats 3.8 *Låt $\kappa=(0,0,\delta)$. Då kan $\eta_{\mathbb{P}}$ lyftas till ε^{-*} endast om $\lambda=\mu=\nu$.*

Bevis $\eta_{\mathbb{P}}[e_2+e_3+e_4+e_5]=\eta\left((e_2+e_3+e_4+e_5)\wedge(e_2+e_3+e_4+e_5)^{\perp}\right)^{\perp}$

$e_2-e_3,\ e_2-e_4,\ e_2-e_5,\ e_6,\ e_7$ och e_8 är alla ortogonala mot $e_2+e_3+e_4+e_5$ enligt lemma 3.7.

$$\begin{aligned}\eta\left((e_2+e_3+e_4+e_5)\wedge(e_2+e_3+e_4+e_5)^{\perp}\right)&=[-2Y_{\bullet 23}-Y_{\bullet 24}-Y_{\bullet 25}+Y_{\bullet 34}+Y_{\bullet 35},\\ -Y_{\bullet 23}-2Y_{\bullet 24}-Y_{\bullet 25}-Y_{\bullet 34}+Y_{\bullet 45},\ &Y_{\bullet 23}+Y_{\bullet 24}+2Y_{\bullet 25}+Y_{\bullet 35}+Y_{\bullet 45},\ Y_{\bullet 26}+\ldots+Y_{\bullet 56},\\ &Y_{\bullet 27}+\ldots+Y_{\bullet 57},\ Y_{\bullet 28}+\ldots+Y_{\bullet 58}]\end{aligned}$$

Det sökta ortogonala komplementet till detta fås genom $[x]H=0$ där [x] är den sökta linjen och

$$H=\begin{bmatrix}\lambda & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0\\ \mu & 2\mu & -\mu & 0 & 1 & 0\\ 2\nu & -\nu & \nu & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 2 & 0 & \lambda & -\lambda\\ 1 & 0 & 1 & -\nu & 0 & \nu\\ 0 & 1 & 1 & \mu & -\nu & 0\end{bmatrix}$$

Eftersom utgångspunkten är att $\eta_{\mathbb{P}}$ är kollinjär måste $[x] = (x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : 0 : 0 : 0)$. Jag vet även att $x_5 \neq 0$, sätt $[x] = (x_2 : x_3 : x_4 : 1 : 0 : 0 : 0)$.

$$[x]H = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl} \lambda x_2 + & \nu x_3 - & 2\mu x_4 & & = 0 \\ -\lambda x_2 + & 2\nu x_3 - & \mu x_4 & & = 0 \\ - & \nu x_3 + & \mu x_4 & & = 0 \\ x_2 & & & -1 & = 0 \\ & x_3 & & -1 & = 0 \\ & & x_4 & -1 & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} [x] = (1:1:1:1:0:0:0) \\ \lambda + \nu - 2\mu = 0 \\ -\lambda + 2\nu - \mu = 0 \\ -\nu + \mu = 0 \end{array} \right.$$

Ur de sista ekvationerna fås på en gång $\lambda = \mu = \nu$. Detta ger

$$\varepsilon^{-*} = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Vilket innebär att för varje linje L så är $\eta_{\mathbb{P}}(L) = \varepsilon^{-*}(L) = L$ dvs $\eta_{\mathbb{P}}(L) = 1_{\mathbb{P}(\mathbb{R})}$. Det enda som återstår är nu att verifiera att så verkligen är fallet.

Tag en godtycklig linje, $L = \sum_{i=2}^{8} \alpha_i e_i$

$$\eta_{\mathbb{P}}\left[\sum_{i=2}^{8} \alpha_i e_i\right] = \eta\left(\left(\sum_{i=2}^{8} \alpha_i e_i\right) \wedge \left(\sum_{i=2}^{8} \alpha_i e_i\right)^{\perp}\right)^{\perp}$$

Genom samma resonemang som i lemma 2.8 på sidan 6 inses att

$$\left(\sum_{i=2}^{8} \alpha_i e_i\right)^{\perp} = [\alpha_3 e_2 - \alpha_2 e_3,\ \alpha_4 e_2 - \alpha_2 e_4, \ldots,\ \alpha_8 e_2 - \alpha_2 e_8]$$

Låt $f_k = -\left(\alpha_2^2 + \alpha_k^2\right) e_2 e_k - \sum_{i=3, i \neq k}^{8} \alpha_i \alpha_k e_2 e_i - \sum_{i=3}^{k-1} \alpha_2 \alpha_i e_i e_k + \sum_{i=k+1}^{8} \alpha_2 \alpha_i e_k e_i$

$$\text{Då är } \eta\left(\left(\sum_{i=2}^{8} \alpha_i e_i\right) \wedge \left(\sum_{i=2}^{8} \alpha_i e_i\right)^{\perp}\right) = [f_3,\ f_4, \ldots,\ f_8] =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_4\lambda & -\alpha_2\alpha_3\lambda & \alpha_2\alpha_6 & \alpha_2\alpha_5 & -\alpha_2\alpha_8\lambda & \alpha_2\alpha_7\lambda \\ \alpha_3\alpha_4\lambda & -\left(\alpha_2^2+\alpha_4^2\right)\lambda & \alpha_4\alpha_5\lambda+\alpha_2\alpha_7 & \alpha_4\alpha_6\lambda+\alpha_2\alpha_8\lambda & \alpha_4\alpha_7\lambda-\alpha_2\alpha_5 & \alpha_4\alpha_8\lambda-\alpha_2\alpha_6\lambda \\ -\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)\lambda & -\alpha_3\alpha_4\lambda & -\alpha_3\alpha_5\lambda+\alpha_2\alpha_8 & -\alpha_3\alpha_6\lambda-\alpha_2\alpha_7\lambda & -\alpha_3\alpha_7\lambda+\alpha_2\alpha_6\lambda & -\alpha_3\alpha_8\lambda-\alpha_2\alpha_5 \\ -\alpha_2\alpha_7+\alpha_3\alpha_6 & \alpha_4\alpha_6-\alpha_2\alpha_8 & \alpha_5\alpha_6 & \alpha_2^2+\alpha_6^2 & \alpha_6\alpha_7+\alpha_2\alpha_3 & \alpha_6\alpha_8+\alpha_2\alpha_4 \\ -\alpha_3\alpha_5-\alpha_2\alpha_8\lambda & -\alpha_4\alpha_5+\alpha_2\alpha_7\lambda & -\left(\alpha_2^2+\alpha_5^2\right) & -\alpha_5\alpha_6 & -\alpha_5\alpha_7-\alpha_2\alpha_4\lambda & -\alpha_5\alpha_8\lambda+\alpha_2\alpha_3\lambda \\ -\alpha_3\alpha_8\lambda+\alpha_2\alpha_5 & -\alpha_4\alpha_8\lambda-\alpha_2\alpha_6\lambda & -\alpha_5\alpha_8\lambda-\alpha_2\alpha_3 & -\alpha_6\alpha_8\lambda+\alpha_2\alpha_4\lambda & -\alpha_7\alpha_8\lambda & -\left(\alpha_2^2+\alpha_8^2\right)\lambda \\ \alpha_3\alpha_7\lambda+\alpha_2\alpha_6\lambda & \alpha_4\alpha_7\lambda+\alpha_2\alpha_5 & \alpha_5\alpha_7\lambda-\alpha_2\alpha_4 & \alpha_6\alpha_7\lambda-\alpha_2\alpha_3\lambda & \left(\alpha_2^2+\alpha_7^2\right)\lambda & \alpha_7\alpha_8\lambda \end{bmatrix}$$

Vilket ger

$$\eta_{\mathbb{P}}\left[\sum_{i=2}^{8} \alpha_i e_i\right] = \eta\left(\left(\sum_{i=2}^{8} \alpha_i e_i\right) \wedge \left(\sum_{i=2}^{8} \alpha_i e_i\right)^{\perp}\right)^{\perp} = (\alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 : \alpha_5 : \alpha_6 : \alpha_7 : \alpha_8)$$

dvs $\eta_{\mathbb{P}} = 1_{\mathbb{P}(\mathbb{R}^7)}$ $\square$

Sats 3.9 *Utav alla algebror som erhålls vid fördubbling av 4-dimensionella potensassociativa reella divisionsalgebror är det endast oktonionerna som ger upphov till en dissident trippel (V,ξ,η) sådan att η kan faktoriseras enligt $\eta = \varepsilon\pi$, där ε är en definit 7×7-matris och π är någon vektorprodukt.*

Bevis Lemma 3.6 och sats 3.8 gör att jag endast behöver studera konfigurationen $\kappa = (0,0,\delta)$, där $\delta = (\lambda,\lambda,\lambda)$. Antag att η kan faktoriseras som $\eta = \varepsilon\pi$. Sats 3.8 visade att ε^{-*} måste se ut som

$$\varepsilon^{-*} = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Detta innebär att

$$\varepsilon = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

samt att

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

För att då kunna faktorisera η som $\eta = \varepsilon\pi = k\pi$ måste π vara standardvektorprodukten. Detta gör då att $k = 1$, vilket innebär att avbildningen η är avbildningen för oktonionerna. $\square$

Korollarium 3.10 *De två mängder av isomorfiklasser som erhålls vid konstruktion mha dissidenta tripplar resp fördubblingen har endast ett gemensamt element, oktonionernas isomorfiklass.*

Bevis Detta är en omformulering av sats 3.9. $\square$

Anmärkning 3.11 *De två satserna 3.8 och 3.9 påvisar även ett annat intressant faktum. Det existerar $\eta_{\mathbb{P}}$ sådant att den går att lyfta till ε^{-*} men η kan inte faktoriseras enligt $\eta = \varepsilon\pi$ (konfigurationen $\kappa = (0,0,\delta)$, $\delta = (\lambda,\lambda,\lambda)$ $,\lambda \neq 1$). Dessutom säger lemma 3.6 att $\eta_{\mathbb{P}}$ oftast inte ens går att lyfta. Detta påvisar att $\eta_{\mathbb{P}}$ i vissa speciella fall har mycket intressanta egenskaper som kan vara värda att studera närmare. Detta resultat kan användas för att underlätta klassificeringen av de fördubblade algebrorna.*

References

[1] E. Dieterich. Power-Associative Real Division Algebras. *Can. Math. Soc.*, 24:139–144, 1998.

[2] E. Dieterich. Zur Klassifikation Vierdimensionaler Reeller Divisionsalgebren. *Math. Nachr*, 194:13–22, 1998.

[3] E. Dieterich. Dissident Algebras. *Coll. Math.*, 82:13–23, 1999.

[4] E. Dieterich. Eight-Dimensional Real Quadratic Division Algebras. *Algebra Montpellier Announcments 01-2000*, pages 1–5, 2000.

[5] E. Dieterich. Real Quadratic Division Algebras. *Communications in Algebra*, 28 (2):941–947, 2000.

[6] E. Dieterich and J. Öhman. On the Classification of Four-Dimensional Quadratic Division Algebras over Square-Ordered Fields. *UUDM Report 2001:8*, 2001.

[7] H-D. Ebbinghaus. *Zahlen*. Springer-Verlag, 1984.

[8] F. G. Frobenius. Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84:1–63, 1878.

[9] H. Hopf. Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra. *Comment. Amth. Helv.*, 13:219–239, 1940/41.

[10] M. Zorn. Theorie der alternativen Ringe. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 8:123–147, 1931.