UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2012:3

Torsten Brodén och kontinuumhypotesen med en introduktion till naiv mängdlära

Jonas Skäremo Holmberg

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare och examinator: Gunnar Berg
Januari 2012

Department of Mathematics
Uppsala University

Torsten Brodén och kontinuumhypotesen - Med en introduktion till naiv mängdlära

Jonas Skäremo Holmberg

26 januari 2012

C-uppsats 15 hp i matematik vid matematiska institutionen, Uppsala universitet.

Handledare: Gunnar Berg

Sammanfattning

I detta papper undersöker jag hur den svenske matematikern Torsten Brodén (1857-1931) tog sig an det då inom mängdlära högaktuella problemet *kontinuumhypotesen:* Finns det någon mängd med kardinalitet strikt mellan de naturliga talens och de reella talens?

Uppsatsens vetenskapliga huvuddel utgörs av en rapport av Brodéns skrift *Ist das sogenannte Continuumproblem med endlichen Mitteln überhaubt lösbar (1917)*. Den föregås av en kort kontextualisering.

Rapporten avser på ett tydligt vis presentera Brodéns resonerande kring kontinuumproblemet. Jag går från Brodéns problemframställning och filosofiska funderingar om möjliga och omöjliga problem inom matematiken till ansatser med "rena mäktighetsbegrepp" respektive ordningsbegrepp och avslutar med densammes argumenterande för varför hypotesen är olösbar. Därefter diskuterar och kritiserar jag Brodéns stil och ansträngningar.

I Appendix finnes min egen introduktion till naiv mängdlära som riktar sig till lekmannen så att även denne kan ta till sig rapporten. Introduktionen börjar med definierandet av de mest grundläggande begreppen inom mängdlära, går vidare med funktioner och kardinaltal till uppräkneliga och sedan ouppräkneliga mängder, och avslutas med ordinaltal. Syftet är att vem som helst utan några vidare matematiska förkunskaper skall kuna tillgodogöra sig praktiskt taget hela innehållet i rapporten, så länge vilja och tålamod uppbådas.

I Appendix ges också två framställningar av Richards paradox.

Utöver detta finnes en kortare biografi över Brodén.

Innehåll

1 Mängdlära vid sekelskiftet

> "Med 'mängd' avser vi varje sammanfattning M, av bestämda och olika objekt m från vårt tänkande och intuition till en helhet."

Detta citat från Georg Cantor (1845-1918) i densammes artikel *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (1874)*[1] kan sägas utgöra grund för hela området mängdlära. Medan områden inom matematik vanligtvis uppstår gradvis utifrån flera olika aktörers insatser uppstod mängdläran praktiskt taget genom detta enda papper. Detta trots att matematiker i alla tider har använt begreppet mängd, till exempel för att definiera en cirkel: Mängden av alla punkter på ett visst avstånd från en given punkt.

Mängdläran som kommer behandlas här brukar benämnas *naiv*. Detta beror dels på att systemet inte är noggrant axiomatiserat, utan beskrivs med ett naturligt språk som är tillgängligt för vem som helst, och dels på att det vid ett noggrannare studerande av denna mängdlära uppstår paradoxer, något som självfallet inte får förekomma inom något matematiskt område. Inte desto mindre fungerar naiv mängdlära som en lättillgänglig inkörsport till axiomatiserad mängdlära och matematik överhuvudtaget; naiv mängdlära undervisas i på senare matematikkurser på gymnasiet, och behandlas i tidigare matematikkurser på universitetsnivå.

Cantor var i allra högsta grad fortsatt delaktig i mängdlärans utveckling, och fick sällskap av en stor mängd matematiker som intresserade sig för de käppar som sattes i mängdlärans hjul. Här nämner jag ett par mer framträdande.

Felix Hausdorff (1868-1942) är kanske mest känd för sitt bidrag till topologin, men han författade också en av de första omfattande läroböckerna i mängdlära, *Grundzüge der Mengenlehre*. Den utkom 1914, och var inte influerad av förespråkarna för axiomatisering, utan bygger upp en mängdlära väldigt lik den som finnes i Appendix A. Boken blev mycket inflytelserik; den har tryckts i allt nyare upplagor med den senaste så sent som 2002 på Springer. Att den fortsätter vara aktuell talar för den naiva mängdlärans kraft, i trots av sina svagheter. Hausdorff menar i introduktionen i sin bok att "Mängdläran är fundamentet för samtlig matematik [...]". Han påpekar dock också att "fundamentet för detta fundament" inte är färdigutvecklat; "man har inte kommit fram till en invändningsfri grund för mängdläran."

Ernst Zermelo (1871–1953) intresserade sig för det som först var välordningsprincipen (antagandet att alla mängder kan välordnas), därefter välordningsproblemet (förhåller det sig verkligen så?) och bevisade det, varför det blev välordningssatsen. Zermelos bevis mötte dock massiv kritik[2] och blev inte alls vedertaget. Detta föranledde Zermelo att axiomatisera mängdläran för att rensa ut intuition och underförstådda steg.[3] Processen innebar bland annat formulerandet av urvalsaxiomet, som Zermelo kanske är mest känd för. Han lär även ha varit inspirerad av den då nyligen sammanställda axiomatiseringen av

[1] Ungefär "Om en egenskap hos helheten av de reella algebraiska talen".
[2] Moore, 1982:2
[3] Moore, 1982:85

geometrin, där man inte längre skulle behöva hänvisa till fysiska egenskaper hos objekten man studerade eller implicita antaganden.[4]

Zermelo är ständigt aktuell genom den fortsatt använda Zermelo-Fraenkel-mängdläran - den axiomatisering som lärs ut i första kurser i axiomatiserad mängdlära.

2 Torsten Brodén - En biografi

Årtal i karriären

Brodén föddes 1857 i Skara och gick på Skara högre elementarläroverk från hösten 1868; mogenhetsexamen avlades 1877. Brodén studerade vid Uppsala och Lunds universitet. Han tog kandidatexamen 1881 och läste sedan på Stockholms högskola 1884-1885. Brodén tog sin licentiatexamen i Lund i april 1886, och disputerade bara en och en halv månad senare; blev docent vid Lunds universitet 1886 och innehade en amanuens vid matematiska seminariet 1888-1899 - under denna period studerade Brodén på stipendium i Tyskland och Österrike 1891-92; arbetade som vikarierande adjunkt vid Malmö högre allmänna läroverk våren 1903; blev lektor i matematik och fysik vid Helsingborgs högre allmänna läroverk 1904 och senare professor i matematik vid Lunds universitet 1906. 1907-1909 innehade Brodén titeln som censor vid högre allmänna läroverkens mogenhetsexamina. Brodén fick lägga till emeritus till sin titel 1922 när han erhöll om avsked, 65 år och 5 dagar gammal.

Ett par höjdpunkter i karriären lär ha varit dels Oskar II:s stipendium 1901 och den Ferrnerska belöningen från Vetenskapsakademien 1903 och 1905.[5]

Vetenskapliga bidrag

Brodén gjorde avtryck i flera av matematikens hörn. Det mest utmärkande med Brodéns insatser är kanske hans intresse för matematikens mest fundamentala grundbultar. I skriften *Om den Russelska antinomien* (MINNS EJ TITELN) ämnar Brodén komma till en lösning på problemet genom att föra tillbaka paradoxens formulering på semantisk nivå. Med användandet av ord så som "begrepp", "definition" och "predikabilitet" jämför Brodén mängdformen respektive denna begreppsform av paradoxen. I *Begreppens dialektiska upprinnelse. Logisk-Matematiska prolegomena (1895)* försöker Brodén motivera begreppens uppkomst utifrån vad som är naturligt för människans hjärna. Bara titeln på verket *Eine realistische Grundlegung der Mathemathik (1924)* är en annan indikator på vad som stimulerade Brodén.

Andra inriktningar finnes dels i *Om geometrins principer (1890)* och *Ett axiomsystem för den euklidiska geometrien (1912)* där Brodén i den första av dem är före Hilbert med att skapa ett axiomsystem för den euklidiska geometrin, något Johanna Pejlare skriver om i sin avhandling *Torsten Brodén and*

[4] Moore, 1982:150

[5] Svensk biografiskt lexikon, Band 6, 1925

the principles of geometry (2004), och dels i den stora mängd artiklar Brodén författade inom analysen.

3 Kontinuumhypotesen

3.1 Olika formuleringar

Georg Cantor hypotetiserade år 1877, tre år efter sin initierande artikel, följande: Det finns ingen mängd Z sådan att $|\mathbb{N}| < |Z| < |\mathbb{R}|$, eller med flera ord, det finns ingen mängd som uppfyller följande två egenskaper samtidigt:

1. Är för stor för att räknas upp, dvs för att stå i bijektion med $\mathbb{N}$ och

2. Är för liten för att stå i bijektion med $\mathbb{R}$.

Hypotesen kan också formuleras mycket kort med hjälp av alef-talen. Om vi betecknar $|\mathbb{R}|$ med $\mathfrak{c}$ (för continuum) lyder hypotesen helt enkelt $\mathfrak{c} = \aleph_1$. Formuleringen är komplett eftersom $\aleph_1$är definierat som den näst minsta oändliga kardinaliteten.

3.2 Brodén om kontinuumhypotesen.

Förberedelser

Några omständigheter bör beaktas innan man tar sig an rapporten. Det är oklart hur mängdläran som Brodén arbetade med såg ut. Min övertygelse är att han resonerar utifrån en naiv mängdlära som praktiskt taget identisk med den som presenteras i Appendix. Dock bör man ha i bakhuvet att han hade kontakt med samtida forskning i ämnet, och därmed hade insikt i de stora frågorna kring mängdlära: Behövs det en axiomatisering, är urvalsprincipen sann/bevisbar, för att nämna ett par. Trots detta går det att, med några få undantag, förstå samtliga begrepp, definitioner, satser och bevis som finnes nedan. Huruvida man kan förstå tanken *bakom* Brodéns resonemang är en annan fråga, som jag väntar med att ta i tu med till efter att materialet presenterats.

Rapporten är en linjär genomgång av Brodéns skrift *Ist das sogenannte Continuumproblem überhaupt mit endlichen Mitteln lösbar? (1917)* - Är det så kallade kontinuumproblemet överhuvudtaget lösbart med ändliga medel? Där jag tycker det bidrar med något utöver ett referat används direkta citat. Citaten kommer skrivas ut på svenska i rapporten, med tyska original i Appendix C om originialformuleringen är särskilt intressant eller svåröversatt. Citatfrekvensen kommer till en början vara hög för att sedan avta. Detta för att ge en känsla för det språk Brodén uttrycker sig med, för att sedan öka läsbarheten genom referat med ett modernare språk.

Brodén delar in skriften i namnlösa avsnitt som jag i rapporten ger passande rubriker.

Två subtila terminologiskillnader bevaras för att återge Brodéns stil: Ordet *mäktighet* (tyska *Mächtigkeit*, som användes av Cantor själv) ersätter storlek/kardinalitet; samt, att två mängder är ekvivalenta betyder inget annat än att deras mäktigheter är identiska.

1 - Om problems lösbarhet och ändliga medel

> Man föreställer sig vanligtvis att man vid varje matematiskt problem kan besluta om man kan lösa det, eller att det visar sig vara omöjligt. (Brodén, 1917:3)[6]

Denna inledande mening antyder precis det som visade sig vara problemet med kontinuumhypotesen; “stämmer den eller stämmer den inte?” övergick i “kan vi överhuvud komma till *någon* av dessa slutsatser?”. Kontinuumhypotesen liknar på det viset den sorts problem som finnes i matematikdelen NOG på Högskoleprovet. Det gäller inte att lösa huvudproblemet, utan att bestämma hur mycket information som krävs för att en lösning ska vara möjlig.

> För att precisera: Det måste i varje fall vara möjligt att med ändliga medel (ett ändligt antal slutledningar) finna en [positiv eller negativ] lösning, eller bevisa att det finns en motsägelse i frågeställningen. Det kan inte ifrågasättas om detta är helt korrekt. Det skulle i så fall vara en helt annan sorts “omöjlighet”. (Brodén, 1917:3)[7]

Vad gäller retorik och bevisteknik får vi här ett exempel på hur Brodén, en av många gånger, påstår en omständighet eller slutsats, och helt enkelt konstaterar att det förhåller sig så. Kanhända skulle en samtida läsare inte uppleva just detta fall som något irriterande, på grund av en i tiden liggande jargong och insatthet i den tidens problem.

Begreppet ”ändliga medel” introduceras och ges en första definition som “ett ändligt antal slutledningar”.

Som exempel på problem med inneboende motsägelser nämner Brodén de euklidiska konstruktionerna för vinkelns tredelning och cirkelns kvadrering.

Vi skall allteftersom få större insikt i vad ändliga medel kan och inte kan åstadkomma.

Om den andra sortens omöjlighet:

> Man kan nämligen tänka sig frågor som är precist *formulerbara* men inte *lösbara* med ändliga medel. Om sådant förekommer betyder det att det finns matematiska frågor som det mänskliga tänkandet kan formulera men inte besvara. Detta eftersom det mänskliga tänkandet är begränsat till ändliga medel.
>
> Låter det sig på något vis bekräftas att så är fallet? Jag menar att det är så. (Brodén, 1917:3)[8]

[6] Se Appendix C, Citat 1
[7] Se Appendix C, Citat 2
[8] Se Appendix C, Citat 3

Brodén menar att det faktiskt finns sådana problem, där omöjligheten inte ligger i problemställningen utan i att det mänskliga tänkandet bara kan genomföra ett ändligt antal slutsatser i jakten på en lösning. Jag återger ett problem Brodén menar exemplifierar vad som är möjligt och inte möjligt med ändliga medel:

Vi kan på ett ändligt vis definiera mängden av alla reella tal, men det är omöjligt att med ändliga medel individualisera (definiera) varje enskilt reellt tal. Då uppstår frågan: Vilka reella tal låter sig ändligt definieras? Låt E vara mängden av dessa ändligt definierade reella tal. E är då uppräknelig och låt R vara talserien av alla tal i E och endast de tal i E. Det visar sig dock att man, förutsatt detta, kan definiera ett tal z som enligt definitionen ligger i E men aldrig förekommer i R. Vi finner detta tal genom Richards paradox tillämpad på R. Motsägelsen löses vid insikten om att trots att E är uppräknelig, så är uppräkningen av E, dvs R, inte tillgänglig med ändliga medel. Därför är heller inte z ändligt definierat, och skall inte ingå i E.

Brodén konstaterar alltså att ändliga medel kan definiera *mängden* av reella talen (men inte alla enskilda sådana), men vi får inte veta vilken metod han syftar på. Den mest intuitiva tolkningen av de reella talen är kanske den om en linje med oändlig utsträckning åt två håll. Att ett tal definieras på ett ändligt vis ska förmodligen tolkas på samma vis som inom Richards paradox [9], alltså att vi otvetydigt kan definiera talet med en ändlig följd ord.

2 - Om ändlighet och oändlighet

Brodén inleder nästa avsnitt med att påpeka nödvändigheten i att utveckla begreppen “ändliga medel” och “ändlig bestämbarhet”:

> Som förberedelse vore det ändamålsenligt att undersöka begreppen "ändliga medel" och "ändlig bestämbarhet" något mer. Att ett tankeföremål är definierat genom en ändlig mängd led innebär något väldigt distinkt. Man måste dock vara på sin vakt, så att man inte förväxlar en faktisk ändlighet med en skenbar. Detsamma gäller fallet med ett ändligt antal slutsatser. Och om någon fråga inte kan lösas av ett ändligt antal slutsatser beror detta ofta på - eller kan i alla fall bero på - att det krävs ett oändligt antal definitioner. (Brodén, 1917:5)[10]

Vad innebär det att förväxla en faktiskt ändlighet med en skenbar? Kanske var detta väldigt vanligt under denna tid, då oändlighetsbegreppet inte var fullt lika utrett, något Cantor just ville åtgärda med mängdläran. Istället för att utveckla detta resonemang ondgör sig Brodén över att vissa matematiker hävdat att begreppet inte har med matematik att göra, utan snarare filosofi. Han själv menar att det är olyckligt att göra en avgränsning mellan de två, men att kontinuumproblemet kan ses som ett rent matematiskt formulerat problem och att man inte kan förvänta sig en lösning på problemet inom omatematisk

[9] Se Appendix B

[10] Se Appendix C, Citat 4

filosofi, om man nu kan vänta sig en lösning överhuvudtaget. Alldeles oavsett, menar Brodén, är problemet oskiljbart från begreppet “ändlig bestämbarhet”. (Brodén, 1917:3)[11]

> Man vet att kontinuet [mängden av reella tal] inte är uppräkneligt. För detta finns många bevis. Men det är praktiskt, om inte nödvändigt, att vi frågar oss hur vi egentligen bevisar detta på renast möjliga sätt, alltså ett sätt som är befriat från oväsentligheter och som utnyttjar endast de mest nödvändiga, abstrakta begreppen. (Brodén, 1917:7) [12]

Med detta som utgångspunkt presenterar Brodén följande resonemang: Vi vet att givet en uppräknelig mängd A så har potensmängden $P(A)$ samma mäktighet som $\mathbb{R}$. Om vi nu kan visa att $P(A)$ ej är uppräknelig så har vi gjort detsamma för $\mathbb{R}$. Detta är förstås ett specialfall av det välkända faktum som klargör att $|P(M)| > |M|$ för en given mängd M. Brodéns bevis lyder som följer:

Bevis. Låt mängden M vara given och anta att M och $T = P(M)$ har samma mäktighet, det vill säga det finns en "reversibel, entydig korrespondans" (bijektion) f mellan dem. Om nu $a \in M$ så kallar vi motsvarande element i T för $T(a)$; $T = \{T(a) \mid T(a) = f(a) \subseteq M \textit{ och } a \in M\}$. Det gäller nu att $T(a)$ antingen kan innehålla a eller inte. Att båda fallen förekommer kan visas *(Visa det?)*. Vi kan då skapa unionen S av alla $a \in M$ sådana att $a \notin T(a)$. S är en delmängd av M och alltså ett element i T. Det korresponderar mot ett element i M, säg g; $S = T(g)$. Då gäller tydligen att om $g \notin T(g) \Rightarrow g \notin S$, och $g \in T(g) \Rightarrow g \in S$. Men $T(g) = S$, och vi har nått en motsägelse; T och M kan inte ha samma mäktighet, "och att T inte är av mindre mäktighet än M ses utan vidare.” (Brodén, 1917:7) □

Förutom att beviset är bra på så sätt att det är väldigt rent och generellt är det också anmärkningsvärt, menar Brodén, då det överhuvudtaget visar att det finns ouppräkneliga mängder.

Om vi från och med nu behöver en uppräknelig mängd använder vi A, och Brodén ger följande exempel på ett problem ekvivalent med kontinuumhypotesen:

> Finns det någon mängd av delmängder av A - kalla den Z - som å ena siden inte är uppräknelig, och å andra sidan är strikt mindre än $T = P(A)$? För korthetens skull kan vi kalla Z för mellanmängd, och frågan blir: Finns det mellanmängder? Om svaret på den frågan är ja föreligger förstås möjligheten att det finns flera mellanmängder med flera olika mäktigheter mindre än Cantors andra talklass [alef-ett]. (Brodén, 1917:7)

[11] Se Appendix C, Citat 5
[12] Se Appendix C, Citat 6

Brodén väljer här en formulering av problemet med en ny specifik omständighet: Den mellanmängd vi söker består av delmängder till A. Vidare undersökningar kommer återkomma till detta specialfall.

> Vår fråga - om kontinuumproblemet kan lösas med ändliga medel - sönderfaller nu i dessa två följande:
>
> - A) Låter det sig med ändliga medel visas att det finns mellanmängder?
> - B) Låter det sig med ändliga medel visas att det inte finns mellanmängder? Förstås kan inte båda frågor besvaras positivt, men att båda har ett negativt svar är inte omöjligt. (Brodén, 1917:8)

Att båda frågorna kan besvaras nekande är en alternativ formulering till den negativa delen av det inledande citatet; att besvara båda frågorna nekande är detsamma som att komma fram till att vi inte kan lösa kontinuumproblemet.

3 - Om olika grader av mängdlära, och ändliga medel

Lösningen skulle kunna dölja sig under djupare kunskaper inom mängdläran, menar Brodén, men han vill först angripa problemet med så få verktyg som möjligt - "med tonvikten på vissa huvudpunkter". Dessa huvudpunkter är till att börja med begreppen *mängd, element i en mängd, ett element, flera element, alla element, delmängd*. Med endast dessa begrepp kan vi skapa hyfsat många olika sorters mängder. Till exempel "mängden vars samtliga element är delmängder av mängden M. En sådan mängd är otvetydigt bestämd så fort M är bestämd.", och Brodén kallar den för en ur M härledd mängd, något han behandlat i ett annat verk. “När fler mängder är givna uppstår begrepp som snitt, produkt, *Belegung*[13] och potens.” (Brodén, 1917:8) Dessa begrepp, som inte är beroende av användandet av korrespondens - funktioner mellan mängder - bildar en speciell klass. Brodén kallar denna klass för “första steget” (tyska: *die erste Stufe*.) När vi sedan inför ekvivalens och mäktighet är det något "väsentligt nytt" som ligger utanför det första steget. Brodén är tydlig med att ekvivalens inte är ett grundbegrepp[14], och definierar ekvivalens på följande något omständiga vis:

> Två mängder M och N är ekvivalenta - har samma mäktighet - om det finns någon mängd P vars enskilda element består av ett M-element och ett N-element, och varje M- respektive N-element förekommer en och endast en gång. (Brodén, 1917:8)

Med modernare notation kan vi alltså definiera en bijektion som en viss delmängd P av kartesiska produkten $M \times N$. De två element som utgör ett P-element sägs då korrespondera mot eller eller motsvara varandra. Detta har

[13] Kan översättas till tilldelning, och verkar syfta på det värde $f(a)$ ett element a tilldelas i en funktion f.

[14] Ett grundbegrepp är något vi inte bryter ned i mindre beståndsdelar, utan ska kunna tolka utifrån endast begreppets namn, eller helst inte tolkas alls. Kallas även odefinierad term.

jag låtit illustreras med pilar, $\mapsto$, i Appendix A. "Mäktighetsbegreppet grundar sig alltså på möjligheten/omöjligheten att upprätta ett sådant ett-till-ett-förhållande." (Brodén, 1917:8)

Vi har nu tillgång till det första steget, och kan till det tillägga mäktighetsbegrepp, men saknar *ordningsbegrepp*. Bland dessa finner vi det Brodén kallar *individualisering av ett element*, alltså att finna och definiera enskilda element i en mängd. Detta kan göras, säger han, på flera olika sätt. Dock endast under förutsättningen att mängden besitter en ordning. "Explicit representation av en korrespondens", alltså funktioner där varje tilldelning är explicit formulerad, “har ett nära förhållande med individualisering”. (Brodén, 1917:9)

Brodén menar att en sådan explicit representation av en korrespondens (kortare: "explicit korrespondens") är möjlig då och endast då varje element i respektive mängd är individualiserbart. När vi nu är begränsade till ändliga medel krävs också att mängderna är uppräknliga. Man kan dock upprätta en, som Brodén kallar det, halvexplicit eller betingat explicit representation av korrespondens: Under antagandet att ett element i mängden M_1 är definierat (individualiserat) så kan vi utföra övergången (tilldelningen, gå längs pilen) till motsvarande element i M_2. Som exempel nämner Brodén Cantors bevis för ekvivalensen mellan ett linjestycke och dess kvadrat: I beviset ges en metod (se nedan) för att givet en punkt på ett linjestycke l bestämma en punkt på det linjestyckets kvadrat l^2 så att funktionen $f : l \to l^2$ är en bijektion. Brodén menar då att “korrespondensen *vore* fullständigt explicit om man hade möjlighet att individualisera alla element på linjestycket (dvs alla element i $\mathbb{R}$) vilket ju inte är nåbart med ändliga medel.” Därför är funktionen halvexplicit. (Brodén, 1917:9)

Det är intressant, eller för oss till och med förbluffande, att Brodén vill arbeta under sådana restriktioner att dylika funktioner inte tillåts.

Bijektionen konstrueras på följande vis:[15] Låt $l = (0, 1) \Rightarrow l^2 = (0, 1) \times (0, 1)$. Låt $s = 0, a_1a_2a_3... \in l$ och $f(s) = 0, a_1a_3a_5...; 0, a_2a_4a_6... \in l^2$. Varje punkt på linjen motsvaras av en punkt i kvadraten och tvärtom.

4 - Om ordningens relevans

Det fjärde avsnittet motiverar med hjälp av ett exempel varför ordning är viktigt.

Brodén låter anta att problemet som föreligger är en “ren mäktighetsfråga”, det vill säga en fråga om mäktighet som inte sträcker sig utanför mäktighetsbegreppen; som inte förutsätter ordningsbegrepp. “Det är inte uteslutet att ett beslut kan göras utan användande av ordningsbegrepp.” (Brodén, 1917:9) Som exempel på detta nämner han återigen satsen om att potensmängden $|P(A)| > |A|$, samt satsen om att om en uppräknelig mängd M är ekvivalent med en delmängd N, och $N \subseteq R \subseteq M$ så är M ekvivalent även med R.

Detta andra exempel är en följdsats till *der Äquivalenzsatz,* ekvivalenssatsen, och Brodén hänvisar till Bernsteins bevis av den, “eller hellre Zermelos modi-

[15]Cantor, 1878

fikation". Den kallas numera Cantor-Bernstein-Schröder-satsen [16], och innebär att givet två injektioner $f : A \to B$ och $g : B \to A$ så finns det en bijektion $h : A \to B$. Vad gäller Zermelo har jag inte funnit det Brodén syftar på.

Brodén menar dock att möjligheterna i detta fall - kontinuumproblemet - är begränsade. Problem som visserligen inte definieras med hjälp av ordningsbegrepp kan ändå vara svåra att lösa utan dem. Detta beror på att "möjligheten/omöjligheten för en ett-till-ett-korrespondens som utgångspukt för slutledning är för lite". Brodén presenterar följande exempel:

> Är unionen av två uppräkneliga disjunkta mängder A och B uppräknelig eller inte? Som vi vet är den uppräknelig. Om man dock försöker lösa detta problem utan införande av ordningar kommer man ingenvart. (Brodén, 1917:10)

Brodén föreslår ett försök till bevis, som låter understryka hans poäng; försöker man bevisa det utan ordning kommer man ändå till ett led där man implicit använder ordning: Låt C och D vara oändliga komplementärdelmängder av B (dvs $C = B \setminus D$ och $D = B \setminus C$). Eftersom de är uppräkneliga är $A \cup B$ ekvivalent med $C \cup D$ som är ekvivalent med B - men möjligheten att dela upp B i mängderna C och D förutsätter ordning.

5 - Om bevismetoder

Trots det nyligen avhandlade vill Brodén kverulera ytterligare kring hur man bevisar ekvivalensen mellan två mängder som definierats utan inflytande av ordningsbegrepp. Det finns två vägar att välja mellan:

- A) Man upprättar en explicit eller halvexplicit ett-till-ett-korrespondens mellan mängderna.
- B) Man lyckas bevisa ekvivalensen *utan* någon sådan korrespondens.

Om B säger Brodén följande:

> Möjligheten för ett bevis av typ B beror på vissa axiomatiska eller från definitionerna omedelbara satser, tex följande två:
>
> 1) Unionen av ett antal disjunkta mängder är ekvivalent med unionen av lika många andra disjunkta mängder om de är parvis ekvivalenta.
>
> 2) Om en delmängd T av en mängd M inte är av mindre mäktighet så är T och M ekvivalenta.
>
> Inom B kommer vi till ytterligare ett vägskäl:
>
> B1) Man använder endast rena mäktighetsbegrepp.
>
> B2) Man inför ordningsbegrepp, utan att upprätta en explicit korrespondens men så att man har tillgång till satser som endast ordningsbegrepp kan bevisa.

[16] *Schröder-Bernstein Theorem* i Moschovakis, 2006:16

> I vilken utsträckning det gäller att uteslutandet av möjligheten för ett bevis av typ B1 möjliggör ett bevis av typ B2 är en fråga jag sparar till ett annat tillfälle. (Brodén, 1917:10)

Om motsatsen, icke-ekvivalens:

> Ett bevis för att två mängder inte är ekvivalenta måste alltid bevisas indirekt: Man antar ekvivalens och visar att det leder till en motsägelse. Men även här får vi två olika fall att undersöka:
>
> A) Man visar att givet en 1-till-1-relation så finns dett ett individualiserat element i ena mängden som inte motsvaras av något i den andra mängden (och därmed, enligt antagandet, att det första elementet både tillhör och inte tillhör den första mänden)
>
> B) Man får till en motsägelse utan individualisering. (Brodén, 1917:10-11)

Att Brodén kräver indirekt bevis är betryggande, och en väldigt viktig poäng. Det är lätt, som många matematiker nog erfarit, att genom ett direkt bevis komma fram till felaktiga slutsatser, då man inte utesluter andra möjligheter. Detta förfarande blir speciellt viktigt när man handskas med något med så kontraintuitiva beskaffenheter som oändliga mängder.

Att Brodén ser detta som en uttömmande lista på bevistyper - vilket det är, givet restriktionerna - är avgörande för hur han systematiskt kommer fram till sitt resultat. Nästa avsnitt ägnas nämligen åt att utesluta ena metoden efter den andra, varpå resultatet framstår som oundvikligt.

6 - Om införandet av ordningar och problemets olösbarhet

> Efter dessa allmänna anmärkningar tittar vi nu tillbaka på kontinuumproblemet. Först skall vi anmärka att det inte handlar om att bevisa ekvivalens eller icke-ekvivalens mellan två mängder. Det gäller existensen eller icke-existensen av en mellanmängd Z. Ett beslut om detta kräver dock att man jämför [den ej uppräkneliga] mängden T med en närmare bestämd delmängd av T vad gäller mäktighet. (Brodén, 1917:11)[17]

Så lyder alltså problemställningen just nu.

Brodén vill återigen börja från så låg nivå som möjligt - "utan några främmande hjälpmedel" - och endast använda en uppräknelig mängd A och ur den härledda mängder, men påpekar också att man inte ska tro att man har något att tjäna på att inte använda ordningsbegrepp. Brodén är övertygad om att det inte räcker med första steget och mäktighetsbegrepp för att konstruera en sådan mängd Z. Som motivering för detta uttalande ger han tre exempel på sådana härledda mängder som alla har för liten eller för stor mäktighet:

- Mängden av alla delmängder av ett element i T

[17] Se Appendix C, Citat 7

- Mängden av alla ändliga delmängder av ett element i T
- Mängden av alla element $F \in T$ som har ett ändligt antal element gemensamma med ett givet element $E \in T$.

Bevis för att de har fel mäktigheter ges ej, men Brodén är övertygad om att vi måste ha ordningsbegrepp, och föreslår därför en förenkling av mängden T (som är definierad som alla delmängder av en uppräknelig mängd A) som vi kallar V. V låter vi bestå av alla oändliga delmängder av A som har oändliga komplementärmängder i A. "V är som bekant ekvivalent med T." I ett försök att upprätta en ordning på V undersöks sätten som element i V kan förhålla sig till varandra på:

- Två element E och $F \in V$ har alltid samma mäktighet, uppräkneligt oändliga.
- Unionen $E \cup F$ kan vara lika med V, eller ha en ändlig eller oändlig komplementärmängd (en mängd K sådan att $E \cup F \cup K = V$).
- Två element E och F kan vara disjunkta eller inte, och i det senare fallet kan snittet $E \cap F$ vara ändligt eller oändligt. Speciellt kan snittet vara lika med hela E eller F, om $E \subset F$ eller tvärtom. (Brodén, 1917:11)

Brodén säger dock genast att detta inte ger oss någonting - om vi vill ha en ordning måste vi börja med A.

Brodén antar därför att A är välordnad, och vi kan då tänka oss (väldigt explicit) A som uppräknad. Vi kan då, menar Brodén, tänka oss en välordnad ouppräknelig delmängd $P \subset V$. (Huruvida man *faktiskt* kan det undersöks inte.)

Med dessa förutsättningar sätter Brodén som första mål att visa att det *inte* kan finnas mellanmängder - detsamma som att hypotesen stämmer.

> Det gäller alltså att konstruera en [del]mängd P med mäktighet $\aleph_1$ och sedan visa att den är ekvivalent med V. [...] inom en mängd med kontinuets mäktighet [$|\mathbb{R}|$] definiera en delmängd med mäktighet Aleph-ett genom transfinit induktion. (Brodén, 1917:12)

Vad transfinit induktion faktiskt innebär visas vara oväsentligt; Brodén använder det inte på något explicit vis. Vad som följer detta är ett långt argumenterande för hypotesens olösbarhet - ett argumenterande vars matematiska legitimitet inte är glasklar. Nedanstående översatta citat är förkortade så långt det går för läsbarhetens skull utan att tappa innehåll. Mellan dem infogar jag eventuella förtydliganden och - eftersom jag finner det mest praktiskt på det viset - vissa värderande kommentarer.

> En sådan definition kan dock aldrig bli annat än defekt eller “halvfärdig”, så länge vi är hänvisade till ändliga medel. Inte heller i V kan vi individualisera alla element, trots att den är otvetydigt definierad. Det handlar dock om en *obestämdhet* i P som bara kan överkommas med överändliga medel. Att ändliga medel inte räcker beror

> på att definitionen måste grunda sig på individualisering. (Brodén, 1917:12)[18]

Brodén hinner alltså inte ens börja innan han konstaterar att det är omöjligt (att definiera delmängden P).

> Man frågar sig nu om det är tänkbart att något av de tidigare diskuterade bevistyperna kan användas här. Det är omöjligt att upprätta en bijektion eftersom vi inte kan definiera alla element i V eller P. Ett halvexplicit bevis är också uteslutet: Man kan *förutsätta* att alla element i V är individualiserade, och att man genom någon operation kan ta sig från ett element i V till ett nytt element i V, men enligt den tidigare nämnda obestämdheten i P kan vi inte alltid veta om detta nya element hör till P eller inte. Vid övergång i andra riktningen, från P till V, är varje obestämdhet i P ödesdiger. Alltså kan inte använda oss av bevistyp A [att upprätta en korrespondens]. Man bör anmärka att förutsättningarna inte är identiska med hur vi formulerade bevistyperna. Vi antog då att de mängder som jämförs inte definierats med ordningsbegrepp. Detta är nu inte fallet för P, men för bevistyp A spelar detta ingen roll. (Brodén, 1917:12)[19]

Det känns som att Brodén gör det onödigt svårt för sig själv - som att han inte uppskattar möjligheterna med vad han kallar halvexplicita korrespondenser. Trots att han har definierat mängderna P och V på ett tydligt sätt använder han aldrig elementen ens för att *försöka* upprätta en halvexplicit korrespondens.

Härnäst behandlar Brodén bevistyp B med metoder vars poänger är svåra för oss att förstå. Antingen för att de är för tidstypiska och nu är helt obsoleta eller för att de helt enkelt inte *har* någon poäng.

"Med bevistyp B måste vi genomföra ett par modifikationer. I B1) säger vi nu att vi inte använder någon annan ordningen än den införda välordningen. I B2), å andra sidan, kan vi se till andra ordningar under välordningen."

Brodén frågar sig om man kan utföra ett explicit eller halvexplicit bevis som, förutom de ordningsfria begreppen och satserna endast använder välordningen i sig. Vad detta egentligen innebär blir aldrig tydligt, då Brodén är otypiskt kortfattad:

> Det råder, för mig, föga tvivel om att obestämdheten i P gör det omöjligt. (Brodén, 1917:13) [20]

Brodén vill dock påpeka att obestämdheter som sådana inte behöver utgöra absoluta hinder för mäktighetsbestämning, och nämner som exempel den fundamentala satsen $R \subseteq M$, $N \subseteq R$, $|M| = |N| \Rightarrow |M| = |R| = |N|$. "Men förekomsten av sådana fall hindrar förstås inte att det finns obestämdheter med vilka möjligheten för ekvivalensbevis - eller till och med mäktighetsbestämning - är oförenlig." (Brodén, 1917:13)[21]

[18] Se Appendix C, Citat 8
[19] Se Appendix C, Citat 9
[20] Se Appendix C, Citat 10
[21] Se Appendix C, Citat 10

Brodén sammanfattar läget: Utan ordningsbegrepp kunde vi inte göra något. Och när vi införde ordningsbegrepp var det ändå omöjligt att med ändliga medel definiera P. Brodén använder sedan så många ord som möjligt för att säga att dessa förutsättningar inte räcker för att nå någon framgång med fundamentala satser och ger exempel på mer applicerbara omständigheter, så som hans bevis för att potensmängden har större mäktighet än den givna mängden. Där är ju T helt bestämd så fort M är helt bestämd, till skillnad från P som från vår ståndpunkt (ändliga medel) är obestämd, vilket (för tredje gången) konstateras vara för lite att gå på. Det finns alltså inget att göra med den givna informationen. Förstås kan man inom P utveckla välordningen, men det hjälper inte "brobyggandet mellan de två mängderna". Därmed är välordningen helt oväsentlig, och det finns ingen chans att genomföra ett bevis av varken typen B1) eller B2).

Brodén har hittills sökt finna ett bevis för att hypotesen stämmer. När det gäller att bevisa att hypotesen *inte* stämmer menar han att beviset för detta är "analogt, och bitvis identiskt" och anser det därför överflödigt att gå igenom även det. Brodén menar sig därmed ha kommit fram ett resultat:

> Det går inte att finna en lösning på kontinuumproblemet med ändliga medel, åtminstone inte utan främmande hjälpmedel. (Brodén, 1917:14)

Därmed inte sagt att möjligheterna att lösa problemet faktiskt är uttömda:

> Man kan fråga sig om några främmande hjälpmedel kan hjälpa - om det finns något att vinna genom att använda *hjälpmängder*, mängder som ligger *utanför "A och dess härledda mängder".* (Brodén, 1917:14)

Vad dessa skulle vara för något går Brodén inte in på i denna skrift, men han vill påtala att "många andra matematiska problem [ju] lösts genom 'geniala omvägar', eller åtminstone förenklats genom lämpliga utvecklingar av området inom vilket problemet ligger", något som föreslås i inledningen av det tredje avsnittet. Brodén menar också att vi vanligtvis kan se varför dessa utvecklingar medför en förenkling, men att det i detta fall inte handlar om lätt eller svårt, utan om möjligt eller omöjligt, samt att även om detta ofta är fallet inom matematik, att en vidareutveckling av området är *nödvändig*, så är det i detta fall lönlöst:

> [Oavsett] vågar jag uttrycka åsikten att ingen utveckling av området kan leda till en lösning av kontinuumproblemet. Det är en väldigt speciell sak, detta med den (för mänsklig intelligens) oöverkomliga obestämdheten i mängden P. (Brodén, 1917:14)

Brodén är, som synes, väldigt övertygad om att metoden med delmängden P är nödvändig men också värdelös. Han går till och med så långt som att säga att

> Att [obestämdheten i P], oavsett vilken metod man försöker med, explicit eller halvexplicit, gör det omöjligt, är helt säkert; det ligger omedelbart i sakens natur. (Brodén, 1917:14-15)

Med detta sagt upprepar Brodén återigen att man helt enkelt har lite att gå på, oberoende av bevistyp. Brodéns sista uttalande om obestämdheten i P är poetiskt:

> Vilka vägar man än må vandra längs, sökandes efter en lösning, så kommer obestämdheten i P följa en som en dödlig [katastrofal, ödesdiger] skugga. (Brodén, 1917:15)

3.3 Kritik och reflektioner

Att säga något om Brodéns matematiska insatser i avsnitt 6 känns nästan överflödigt. Det är tydligt att Brodén inte lyckas hitta någon anfallsvinkel som låter sig arbetas med. Den metod han väljer påstår han direkt är värdelös, och ägnar mycket energi åt att försöka formulera denna värdelöshet på så många olika sätt som möjligt. Man anar en desperation; inte i att hans metod är dålig eller att problemet är för svårt, utan i hur självklart han finner det att problemet är omöjligt. Han vädjar nästan till läsarens sunda förnuft, att man ska inse det självklara att det är lönlöst att försöka gå vidare.

Som matematiker kan man inte se skriftens upplösning som annat än antiklimaktisk. Något faktiskt bevis syns inte till, och resonemangen är på sin höjd handviftande eller vädjande. Något som däremot är intressant är väl snarare i så fall att Brodén inte ser sitt resultat som något uppseendeväckande eller olyckligt. Han verkar snarast oberörd.

Brodén är ständigt extremt abstrakt i sitt resonerande. Han föreslår aldrig vad för slags element en mängd innehåller, utan säger bara att mängden finns, och att den har element. Om den har uppräkneligt många element så är det definitionen av mängden; "en uppräknelig mängd". När han hänvisar till enskilda element har de inga egenskaper i sig, mer än att de finns. När han behöver en större mängd tar han utan vidare "potensmängden av en uppräknelig mängd". Här diskuterar han visserligen hur elementen kan förhålla sig till varandra, men fortfarande inte vad de ursprungliga elementen är. Det finns förstås inget fel med detta. Mer explicita element ska inte behövas, men man kan fråga sig huruvida Brodén tjänar på denna extrema abstraktion, eller om den hindrar honom.

Givet de restriktioner Brodén upprättar ser jag annars hans tillvägagångssätt som vettigt fram till avsnitt 6. Han är tydlig med sina avsikter, att han vill ta sig an problemet i olika steg, och utesluter dessa steg allt eftersom. Om hans tillvägagångssätt bedöms (av samtida, relevanta matematiker) som legitimt har han gjort mängdläran en stor tjänst, nämligen konstaterat att det faktiskt krävs något nytt. Jag kan dock inte tänka mig att resonemanget i avsnitt 6 någonsin ansetts som uttömmande eller rigoröst, och Brodén snubblar därmed strax innan mållinjen som han inte kan se. Att Brodén går försiktigt till väga, och inte vill slå på stora trumman för osäkra slutsatser är förstås hedervärt, med tanke på vilka fallgropar som lurar bland oändligheterna.

Man bör vara på det klara med att vi inte egentligen vet hur Brodéns mängdlära såg ut. Hans skrift är utgiven 1917, några år innan ZFC formulerades[22],

[22]För mer om detta se Moschovakis, 2006:22 eller Moore, 1982.

den nu dominerande axiomatiseringen, var färdigställd, men han hänvisar inte heller till några andra axiom. Han antyder vid ett tillfälle att det *finns* axiom, men går inte in på vilka de är, och hänvisar aldrig till några sådana för att stödja sina resonemang. Brodén verkar snarare utgå från en naiv mängdlära - en slags samtida konsensus - med tanke på hur han hellre argumenterar med ord och vädjande än tydliga konstruktioner och bevis när det gäller att göra egna framsteg.

Vad är ändliga medel? Och varför ska man begränsa sig till dem? I mitt huvud återkommer jag ständigt till något jag finner självmotsägande med de ändliga medlen: De kan definiera både uppräkneliga och ej uppräkneliga mängder, och de kan definiera varje element i en uppräknelig mängd, men *inte* varje element i en ej uppräknelig mängd. Jag skulle vilja se att begreppet inte ens kan definiera varje element i en uppräknelig mängd; jag accepterar dock att det kan definiera båda sortens mängder. Det faktum att ingen annan matematiker verkar ha nämnt termen hindrar vår förmåga att få full klarhet i vad som faktiskt avses.

Om jag skulle drista mig till en gissning handlar det om urvalsaxiomet. En antydan till att det skulle vara det som saknas är när Brodén vill chansa sig till mängder med andra storlekar än "uppräknelig" och "potensmängd av uppräknelig". Då snöar han in sig på olika konstruktioner, men lämnar det snart när han konstaterar att de har fel mäktighet. Han hänvisar inte till någon möjlighet att skapa delmängder på det godtyckliga och väldigt abstrakta vis som urvalsaxiomet låter oss.

En underlig anmärkning är att Brodén är inkonsekvent med sitt hänvisande till andra matematiker. Beviset för $|P(A)| > |A|$ bör tillskrivas Cantor, varför satsen numera oftast benämns Cantors sats.[23] Att inte nämna detta får nästan ses som en matematisk faux pas.

4 Avslutande ord: självkritik och något om fortsatt forskning

Denna isolerade studie av ett verk från en annan tid bidrar inte till någon vidare insikt i hur matematikerna som helhet tog sig an detta problem. I rapporten har jag tagit fasta på dels det jag *kan* ta fasta på utifrån mina matematiska kunskaper, och dels det jag finner intressant att ta fasta på utifrån mig själv som person och matematiker. En annan matematiker skulle finna andra poänger att belysa. Det innebär att rapporten inte är uttömmande. Däremot är det en närgången studie, som med rätt komplettering skulle kunna bli det.

Kanske borde det egentligen vara ett kriterium för att göra en sådan här studie, att faktiskt ta flera matematikers dylika ansträngningar i beaktning. Man skulle därmed inom ett och samma arbete få en större förståelse för den tidens jargong, implicita antaganden och sätt att resonera; det var inte ett uttalat syfte med detta arbete, men kanske borde det ha varit det.

[23] Se till exempel Moschovakis, 2006:14

Att inte vara helt säker på vad som ändå får ses som huvudpoängen med Brodéns arbete innebär - restriktionen “med ändliga medel” - känns som ett misslyckande. Det är helt klart något mystiskt med detta begrepp, då det till exempel inte hindrar Brodén från att se till transfinit induktion. Och med mystiskt menar jag förstås att det finns en distinktion jag helt enkelt inte lyckats utröna.

Jag ser två naturliga fortsättningar på detta arbete. Den ena är en djuplodande, där man studerar fler av Brodéns verk för att nå en bättre förståelse för hans matematiska sinne; framför allt de verk där Brodén utforskar och utvecklar matematikens mest grundläggande beskaffenheter.

Den andra naturliga fortsättningen får ses som en breddning, där man undersöker andra samtida matematikers försök att lösa kontinuumhypotesen för att därigenom bringa klarhet i sekelskiftets matematiska kapacitet.

5 Litteraturförteckning

- Almquist, J.A., Boëthius, B. & Hildebrand, B. (red.) (1926). *Svenskt biografiskt lexikon. Bd 6, Brant-Bygdén.* Stockholm: Bonnier.
- Brodén, T. (1915). *Om begreppens dialektiska upprinnelse: logisk-matematiska prolegomena.* Lund: Gleerup.
- Brodén, T. (1917). *Ist das sogenannte Continuumproblem überhaupt mit endlichen Mitteln lösbar?* Lund:
- Cantor, G. (1878). "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.", *Crelles Journal f. Mathematik Bd. 84*, 242-258
- Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig Verlag von Veit & comp..
- Moore, G.H. (1982). *Zermelo's axiom of choice: its origins, development, and influence.* New York: Springer-Vlg.
- Moschovakis, Y. (2006). *Notes on Set Theory.* Springer
- Nagel, E. & Newman, J.R. (1958). *Gödel's proof.* New York: University Press.
- Pejlare, J. (2004). *Torsten Brodén and the principles of geometry.* Lic.-avh. Göteborg : Chalmers tekniska högskola, 2004. Göteborg.
- Rotman, B. & Kneebone, G.T. (1966). *The Theory of Sets & Transfinite Numbers.* Oldbourne.

A En introduktion till naiv mängdlära

Inledning för den ovane

Här presenterar jag en naiv mängdlära, och min förhoppning är att även personer utan matematisk bakgrund ska kunna ta till sig innehållet. Ett varningens finger bör dock lyftas mot dem som inte är vana att läsa matematiska texter: Innehållet är oerhört tätt packad. Att läsa går fort, att lära går mindre fort. Detta innebär att för att verkligen ta till sig innehållet fordras inte bara repeterad läsning, utan också eget aktivt deltagande. Matematik läses med fördel med en penna i ena handen, så att man snabbt kan pröva materialet och själv reda ut det man finner otydligt, eller bara för att vänja sig vid notation och definitioner.

Framställningen nedan syftar till att ge tillräcklig förståelse för att med bekvämlighet kunna läsa rapporten i denna uppsats, samt förstås till att stimulera till funderande.

A.1 Grundläggande notation samt egenskaper och operationer

Utifrån Georg Cantors citat (se också avsnitt 1),

> Med 'mängd' avser vi varje sammanfattning M, av bestämda och olika objekt m från vårt tänkande och intuition till en helhet.

får vi två olika begrepp: mängd, och element i mängd. Om x är ett element i mängden A skriver vi $x \in A$, och om vi vill skriva ut alla element i A gör vi det inom klamrar åtskilda av kommatecken, så att
$A = \{x,\ \textit{ett annat element},\ \textit{ett tredje},\ \textit{o.s.v}\}$. Ett element kan inte förekomma mer än en gång i en mängd. Detta innebär att om vi skulle skriva $A = \{a, b, b\}$ så är det inget annat än $\{a, b\}$. Ofta kommer vi vilja skapa mängder som innehåller element som uppfyller en viss egenskap, hellre än att manuellt stoppa in varje element. Vi skriver då på följande vis: $A = \{x \mid P(x)\}$, vilket utläses "A är mängden av alla element x som uppfyller $P(x)$", där P är en utsaga som antingen är sann eller falsk för olika element. [24] Denna metod kallas ibland för mängdbyggaren.

Vi vill att en mängd är helt bestämd utifrån elementen den innehåller. Vi definierar därför likhet mellan mängder, $A = B$, enligt följande ekvivalens:

> Om A och B innehåller samma element så $A = B$, och om $A = B$ så innehåller de samma element.

Mängder är oberoende av vilken ordning vi skriver eller räknar upp elementen i.

[24]Till exempel kan vi ha $A = \{x \mid P(x)\}$ där "$P(x)$ om x är heltal", vilket innebär att x uppfyller $P(x)$ om x är ett heltal, och i så fall ingår i mängden A.

Om en mängd inte innehåller några element säger vi att den är tom, och genom principen för likhet mellan mängder inser vi att det bara finns en tom mängd. Denna betecknar vi $\emptyset$.

En mängd är en *delmängd* av en annan mängd om alla dess element också finns i den andra. Vi skriver $A \subseteq B$, vilket läses "A är delmängd av B". Det följer direkt att tomma mängden är delmängd av alla mängder. (Testa!)

Ibland kan det vara viktigt att skilja på delmängd och *äkta delmängd*, där det senare syftar på en mängd som är delmängd av en annan mängd men inte är lika med den. Det finns flera olika notationer för dessa två olika sorters delmängder, varav jag föredrar följande:

> $A \subseteq B$ betecknar delmängd,
>
> $A \subset B$ betecknar äkta delmängd. Det undre strecket i symbolen $\subseteq$ kan ses som del av $=$ medan $\subset$ kan ses som en omformning av mindre-än-tecknet $<$.

De enklaste och mest grundläggande operationerna för mängder beskrivs nedan. Vissa av dem kommer vi inte nyttja alls senare, men tål att nämnas ändå. Givet två mängder A och B definierar vi

- *unionen* $A \cup B$ ("A union B") som mängden som innehåller samtliga element från båda mängderna, eller genom mängdbyggaren: $A \cup B = \{x \mid x \in A \textit{ eller } x \in B\}$;
- *snittet* $A \cap B$ ("A snitt B") som mängden som innehåller de element som är gemensamma för båda mängderna, eller: $A \cap B = \{x \mid x \in A \textit{ och } x \in B\}$;
- *differensen* $A \setminus B$ ("A utom B" eller ibland "A minus B") som mängden som innehåller alla element i A förutom de som också ingår i B, eller: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \textit{ och } x \notin B\}$;
- *kartesiska produkten* $A \times B$ som mängden av alla ordnade par (a, b) där $a \in A$ och $b \in B$, eller: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \textit{ och } a \in B\}$;
- *potensmängden* $P(A)$ som mängden av alla delmängder av A, eller: $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

Två mängder kallas *disjunkta* om de inte har något element gemensamt, vilket är detsamma som att deras snitt är lika med tomma mängden.

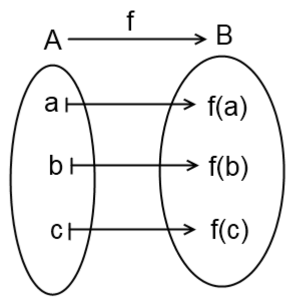
Dessa är de mest fundamentala begreppen vad gäller mängdlära. För att det ska bli riktigt intressant bör vi härnäst introducera funktioner.

A.2 Funktioner - korrespondens mellan mängder

Funktion är ett vitt begrepp och används inom många grenar av matematiken med olika syften. I mängdläran använder vi dem antingen för att jämföra mängders storlekar, eller för att reda ut samband mellan olika mängders element.

Ett typiskt förfarande för en funktion f är att givet ett element, säg $x \in A$, som "input" ger funktionen ett element $f(x) \in B$ som "output". [25]

[25] $f(x)$ läses "f av x".



Figur A.1: Visualisering av en funktion.

Vi använder följande notation

$$
\begin{aligned}
&f : A \to B \\
&a \mapsto f(a) = b, \text{ där } a \in A \text{ och } b \in B,
\end{aligned}
$$

och vi säger "f är en funktion från A till B, där $a \in A$ motsvaras av elementet $f(a) = b \in B$". Notationen förutsätter att $f(a)$ är definierat för varje $a \in A$, och att $f(a) \in B$ för varje a.[26] En enkel funktion:

Låt mängden X bestå av alla positiva heltal mindre än eller lika med 10 och $Y = X \cup \{11\}$ och definiera en funktion f mellan X och Y genom $x \mapsto x + 1$. Med en schematisk tolkning av figuren ovan kan vi visualisera funktionen som nedan.

$$
\begin{array}{ccc}
X & \to & Y \\
 & & 1 \\
1 & \mapsto & 2 \\
2 & \mapsto & 3 \\
3 & \mapsto & 4 \\
4 & \mapsto & 5 \\
5 & \mapsto & 6 \\
6 & \mapsto & 7 \\
7 & \mapsto & 8 \\
8 & \mapsto & 9 \\
9 & \mapsto & 10 \\
10 & \mapsto & 11
\end{array}
$$

Vad denna funktion ger oss är helt trivialt, nämligen att "Efter udda kommer jämnt, efter jämnt kommer udda". Ingen fantastisk insikt, och vi lade sannerligen ned alldeles för mycket energi för att visa det, men med mer raffinerade metoder kan vi visa mer intrikata samband, som vi ska se i nästa avsnitt.

[26] Om något $f(a)$ inte ligger i B så är inte f en funktion till B. Om $f(a)$ inte är definierat för alla element i A så är inte f någon funktion från A.

Vi ska nu definiera två egenskaper en funktion kan besitta och kombinationen av de två egenskaperna, och sedan använda vårt exempel för exemplifiera dem. Givet två mängder A och B säger vi att:

- en funktion är injektiv - en injektion - om det element i B som svarar mot ett element i A inte svarar mot något annat element i A. Vårt exempel uppvisar injektivitet.
- en funktion är surjektiv - en surjektion - om varje element i B motsvarar något element i A. Vårt exempel uppvisar inte surjektivitet.
- en funktion, är bijektiv - en bijektion - om varje element i A respektive B motsvaras av precis ett element i B respektive A. En bijektiv funktion är alltid både injektiv och surjektiv, och tvärtom: En funktion som är injektiv och surjektiv är alltid bijektiv.

För att vårt exempel ska förlora sin injektivitet skulle vi kunna lägga till regeln "och $10 \mapsto 10$"; för att vårt exempel skall besitta surjektivitet kan vi ta bort 1 från Y, varpå den även blir bijektiv.

$$\begin{bmatrix} A_1 & \to & B_1 \\ a_1 & \mapsto & b_1 \\ a_2 & \mapsto & b_1 \\ a_3 & \mapsto & b_2 \\ a_4 & \mapsto & b_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_2 & \to & B_2 \\ a_1 & \mapsto & b_1 \\ a_2 & \mapsto & b_2 \\ a_3 & \mapsto & b_3 \\ & & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & \to & B_3 \\ a_1 & \mapsto & b_1 \\ a_2 & \mapsto & b_2 \\ a_3 & \mapsto & b_3 \\ a_4 & \mapsto & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & \to & B_4 \\ a_1 & \mapsto & b_1 \\ a_2 & \mapsto & b_1 \\ a_3 & \mapsto & b_2 \\ & & b_3 \end{bmatrix}$$

Figur A.2: En surjektiv men inte injektiv funktion; en injektiv men inte surjektiv funktion; en bijektiv funktion; en varken injektiv eller surjektiv funktion.

Funktioner kommer fungera som verktyg för studiet av mängder, ty de ger oss möjlighet att jämföra mängders storlekar, alltså hur många element de har. Förstås, så länge vi jobbar med mängder där vi utan problem kan skriva upp alla element är detta ett trivialt problem - vi räknar dem helt enkelt. Svårigheterna kan uppstå av två anledningar: Vi har en regel (algoritm) som genererar element till en mängd, utan att vi vet hur många det blir, och/eller elementen är oändligt många. Vi kommer fokusera på det sistnämnda.

För att benämna en mängds storlek kommer vi använda Cantors term kardinaltal eller kardinalitet. För mängder med ett ändligt antal element är dess kardinalitet helt enkelt antalet element. Det svenska alfabetets kardinalitet är 28 (eller 29, om man vill ha med W.) Låt oss åskådliggöra hur funktioner låter oss jämföra mängders kardinalitet. (Det bör anmärkas att man inte bör bli för exalterad - vi kommer hålla oss till termerna "mindre än", "lika stor som" eller "större än".) Det finns en uppsjö av notationer för kardinalitet att välja bland. Jag föredrar (och förordar) följande: Om A_S betecknar det svenska alfabetet så har vi $|A_S| = 28$ (eller 29).

Den effekt som kanske är enklast att se är den att en bijektion mellan två mängder direkt talar om för oss att mängderna har samma kardinalitet: Bijektionen parar ihop varje element i ena mängden med precis ett element i den andra, och tvärtom, på ett sådant sätt att det inte blir några element över i någon mängderna - om det blir element över är det inte någon bijektion. Man kan se mängden av par som definitionen av bijektionen i fråga. (Se avsnitt 3.2, del 3)

Vidare har vi att givet en surjektion från A till B så vet vi direkt att A är åtminstone lika stor som B, eller har högre kardinalitet. Detta för att funktionen har träffat varje element i B, men kanske träffar flera element i A samma element i B. En injektion från A till B säger tvärtom att B är åtminstone lika stor som A.

Det viktiga språnget att ta sedan är att låta detta gälla även när mängderna är oändligt stora. Vad som blir konsekvenserna av det ska vi utreda härnäst. (Man skulle kanske hellre säga att detta tillvägagångssätt är fullständigt värdelöst vid ändliga mängder och blir intressant först när oändliga mängder betraktas.)

A.3 Oändliga mängders storlekar

A.3.1 Mot oändligheten...

Låt oss först på enklast möjliga vis definiera begreppet *oändligt stor*: Närhelst antalet element i en mängd överstiger vilket naturligt tal (positivt heltal) som helst säger vi att den är oändlig eller oändligt stor, eller att elementen i mängden är oändligt många.

Den kanske enklaste mängden vi kan tänka oss som är oändligt stor är den som innehåller alla naturliga tal. Vi kallar den $\mathbb{N}$,[27] och skriver

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, 52, \ldots, 16777216, \ \mathit{osv}\ \}.$$

Det är tydligt att den är oändligt stor, men vi säger att den är *uppräknelig*, ty det finns en enkel metod att räkna upp alla element, nämligen "ett, två, tre, ... femtiotvå, sexton miljoner sjuhundrasjuttiosju tusen tvåhundrasexton, ...". Visserligen blir vi aldrig färdiga med denna uppräkning, hur snabbt vi än genomför den, men det är tydligt att vi inte kommer missa något element (något tal) med denna metod. Därför säger vi att mängden är uppräknelig. Elementen behöver förstås inte vara naturliga tal eller tal överhuvudtaget, men då $\mathbb{N}$ närmast förkroppsligar egenskapen uppräknelig är den smidig att utgå ifrån; varje uppräknelig mängd visas enklast vara uppräknelig genom att återkopplas till $\mathbb{N}$. Låt oss demonstrera detta med några exempel.

Låt $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ vara mängden av alla primtal. Det bevisades tidigt i matematikens historia att det finns oändligt många primtal. Vi kan lätt

[27]Fonten kallas "Blackboard", men man säger bara "N". Om det i något fall är oklart vad för N som avses råder man bot på det på enklast möjliga sätt.

räkna upp primtalen enligt följande schema:

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & \dots & 999 & ... \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots \\ P: & 2 & 3 & 5 & \dots & 7907 & \dots \end{array}$$

Vi kan även säga att vi *numrerar* elementen: 2 är det *första* (= minsta) primtalet, 3 är det *andra* (= näst minsta), osv. Processen ger uppenbarligen upphov till en bijektion mellan de två mängderna, vilket innebär, enligt teorin för mängders kardinalitet, att de har samma kardinalitet. Detta trots att primtalen är en äkta delmängd av $\mathbb{N}$. Man inser snart att varje oändlig delmängd av de naturliga talen är lika stor som $\mathbb{N}$ själv.

Låt oss vända på steken. Om $\mathbb{Z}$ är mängden av alla positiva och negativa heltal (inklusive 0) kan vi tänka oss följande numrering:

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & ... \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & ... \\ \mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & ... \end{array}$$

Detta kan vi göra eftersom *varje oändlig delmängd av de naturliga talen är lika stor som* $\mathbb{N}$ *själv*: De jämna respektive udda naturliga talen utgör två oändliga delmängder av $\mathbb{N}$, och vi kan låta dem räkna upp varsin delmängd av $\mathbb{Z}$, en positiv och en negativ. $\mathbb{Z}$ innehåller förutom den positiva och negativa uppsättningen av de naturliga talen även elementet 0. Att ett ändligt tillskott av element till en oändlig mängd inte förändrar dess storhet visas lätt med hjälp av ett schema som ovan.

Vi har hittills tittat på tre olika mängder som alla är lätt att ordna på ett intuitivt sätt, och därför blir lätta att räkna upp. En mer svårordnad mängd är de rationella talen, bråktalen, $\mathbb{Q}$, som definieras som $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$. Bråktalen kan inte ordnas i vanlig storleksordning på grund av det faktum att mellan vilka två bråktal som helst finns det en oändlig mängd bråktal. Trots det skall vi visa att $\mathbb{Q}$ är lika stor som $\mathbb{N}$. Nedan har vi en schematisk uppställning av samtliga *positiva* bråktal $\frac{a}{b}$ utom noll:

$$\begin{array}{lcccccc} \diagdown \; a & 1\;, & 2\;, & 3\;, & 4\;, & 5 & \cdots \\ b & & & & & & \\ 1 & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \cdots \\ 2 & \frac{1}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{5}{2} & \cdots \\ 3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & \frac{4}{3} & & \cdots \\ 4 & \frac{1}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{5}{4} & \cdots \\ 5 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & & \frac{4}{5} & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Om vi kan räkna upp samtliga element i denna uppställning är vi klara. Vi kan inte räkna upp en rad eller kolumn åt gången, för då kommer vi aldrig till nästa. Däremot kan vi gå igenom varje diagonal som börjar i taket och slutar i vänstra väggen, eller tvärtom. Uppräkningen kan alltså se så här:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 7 & \cdots \\ 3 & 5 & 8 & \cdots & \\ 6 & 9 & \iddots & & \\ 10 & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Detta fungerar tack vare att varje diagonal som vi räknar är ändlig - vi vet hela tiden hur vi fortsätter. Om $\mathbb{Q}^+$ respektive $\mathbb{Q}^-$ är de positiva respektive negativa bråktalen (exklusive 0) har vi visat att $|\mathbb{Q}^+| = |\mathbb{N}|$, och eftersom $|\mathbb{Q}^+| = |\mathbb{Q}^-|$ så har vi även visat att $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}| = |\mathbb{Q}|$. Detta resultat har en mer allmängiltig form:

Låt uppräkneligt många mängder som alla innehåller uppräkneligt många element vara givna, se nedan.

$$\begin{array}{lccccl} A_1 = \{ & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots & \} \\ A_2 = \{ & a_{21}, & a_{22} & a_{23}, & \ldots & \} \\ A_3 = \{ & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \ldots & \} \\ \quad\vdots & & & & & \end{array}$$

Unionen av dessa mängder är uppräknelig, och vi bevisar det på samma sätt som vi gjorde med bråktalen.

Det visar sig alltså att många till synes väldigt olika mängder har samma kardinalitet, enligt hur funktioner bestämmer förhållandet mellan mängders storlekar. Resultatet är långt ifrån intuitivt; man tycker gärna att om en mängd är äkta delmängd av en annan - så som $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ - så är den per definition mindre. Man måste i dylika fall ändra sin tolkning från "är mindre än" till "är inte större än".

Denna kardinalitet som vi studerat är den uppräkneligt oändliga, och betecknas $\aleph_0$, *alef-noll.* Vi skall återkomma till alef-talen senare.

A.3.2 ... och vidare

Vi har hittills använt några olika talmängder för att bekanta oss med begreppet uppräknelighet. Vi skall fortsätta på samma spår för att introducera *ouppräknelighet.*

En mängd som bygger vidare på utvecklingen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ är de reella talen, $\mathbb{R}$. Det finns många olika mer eller mindre raffinerade metoder att definiera $\mathbb{R}$. Den förmodligen enklaste är att likställa $\mathbb{R}$ med en talaxel eller tallinje. Denna tallinje har oändlig usträckning åt båda håll, och varje punkt på linjen motsvaras av ett reellt tal. Många av dessa är förstås rationella - det finns ju uppräkneligt oändligt många rationella tal mellan vilka två som helst. Trots det finns det punkter som $\mathbb{Q}$ inte prickar. Välkända exempel på sådana tal är π och $\sqrt{2}$, och deras gemensamma drag är att de inte kan skrivas som kvoten av två heltal. $\mathbb{R}$ innehåller alltså alla tal som $\mathbb{Q}$ har, samt alla de som $\mathbb{Q}$ missar på tallinjen. Det är då tydligt att $\mathbb{R}$ är en uppföljning på den ovan nämnda utvecklingen. Vad som är mindre tydligt är *hur* mycket större den är. För att nå den insikten skall vi följa dessa fyra steg:

- Utveckla vår definition av de reella talen.
- Definiera intervall.
- Visa att alla intervall i $\mathbb{R}$ är lika stora som $\mathbb{R}$.
- Visa att ett elementen i ett intervall inte är uppräkneliga.

Vi börjar med det första steget:

> Elementen i $\mathbb{R}$ är tal med alla möjliga heltalsdelar med *alla möjliga decimalutvecklingar, ändliga såväl som periodiskt och ickeperiodiskt oändliga.*

Den utmärkande faktorn är att bråktalen inte kan ha ickeperiodiska oändliga decimalutvecklingar. Bråktalen kan ha ändliga decimalutecklingar, t.ex. $22/5 = 4,4$), eller periodiskt oändliga, t.ex. $22/7 = 3,142857\ 142857$ ... men inte ickeperiodiskt oändliga. [28]

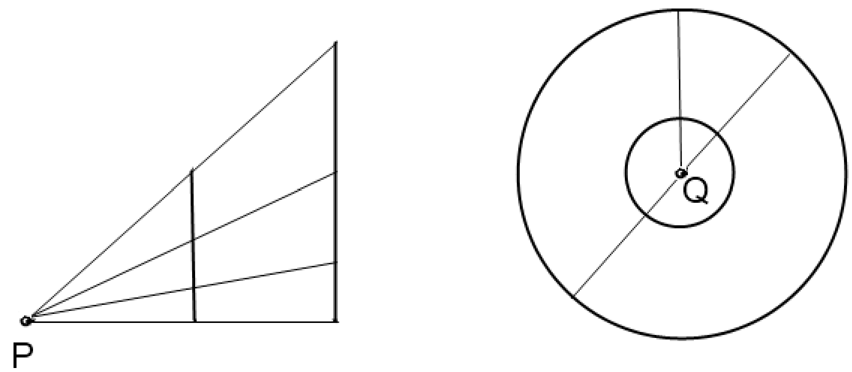
Ett intervall på tallinjen är precis vad det låter som:

> Givet två punkter på tallinjen, säg a och b, så definierar vi det öppna intervallet (a,b) som mängden av alla reella tal som ligger strikt mellan a och b, $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Man bör påpeka att det inte finns något "rationellt intervall"; det gäller nämligen för tallinjen att mellan vilka två punkter som helst finns det tal som inte är rationella - de hål vi nämnde tidigare. Å andra sidan finns det inget "rent reellt intervall", ty det gäller även att det mellan vilka två punkter som helst finns det rationella punkter. Beviset för detta är inte särskilt krångligt. Låt anta att det finns två tal mellan vilka det *inte* finns ett rationellt eller irrationellt (= reellt, icke rationellt) tal. Man inser snart att man lätt konstruerar både rationella och irrationella tal i det givna intervallet.

Utan att gå in på vad dessa öppna intervall besitter för kardinalitet kan vi visa att oavsett hur långa de är så har de samma kardinalitet. Detta visas i figurerna nedan.

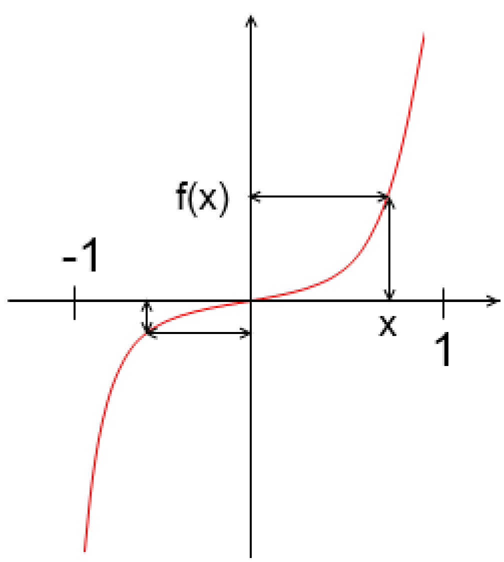
[28] Att det förhåller sig på detta vis framgår tydligt om man studerar förfarandet vid vanlig division: Förr eller senare återkommer en rest r, vilket innebär att nästa rest är samma som förra gången resten var r.



Figur A.3: Två visuella bijektioner mellan geometriska objekt av olika storlek.

Strålarna utgående från punkterna P respektive Q parar bijektivt ihop punkter på de olika långa intervallen respektive olika stora cirklarna. (Cirklarna kan ses som intervall som biter sig själva i sina respektive ändar.)

Nästa figur visar att ett intervall har samma kardinalitet som hela $\mathbb{R}$ genom den bijektiva funktionen $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ där $x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$. Jag har valt denna funktion för att dess utseende är lättolkat.



På vad vi vanligtvis kallar x-axeln är intervallet (-1,1) utmärkt, och y-axeln representerar hela $\mathbb{R}$. Att hela $\mathbb{R}$ träffas av funktionen beror på att funktionsvärdet, $f(x)$, minskar respektive växer utan gräns när x närmar sig -1 resp 1. I och med detta behöver vi inte undersöka hela $\mathbb{R}$ för att finna dess kardinalitet, utan kan nöja oss med vilket intervall som helst; vi kan nu ta det fjärde steget.

Det härnäst presenterade beviset som slutligen visar ouppräkneligheten hos intervall och därmed hela $\mathbb{R}$ kallas för diagonalbeviset. Det blev kritiserat när det publicerades 1891 och fortfarande betvivlar vittnen dess giltighet. Det säger något om hur svårt det kan vara att ta till sig resonemang som bygger på oändligheter:

> Vi skall bevisa att intervallet $(0,1)$ inte är uppräkneligt genom att anta att det är uppräkneligt, och se att detta leder till ett felslut. Anta därför att $(0,1) = \{s_1,\ s_2,\ s_3,\ \dots\}$ där vi kan likställa varje element s_n med en oändlig serie av siffror $s_{n,m}$, där m antyder m-te decimalen i talet som s_n motsvarar, så $s_n = s_{n,1},\ s_{n,2},\ s_{n,3},\ \dots$. Om decimalutvecklingen är ändlig fyller vi på med nollor. Vi kan då ställa upp en lista över alla s_n:
>
> $$\begin{array}{cccccc} s_1 = & s_{1,1}, & s_{1,2}, & s_{1,3}, & s_{1,4}, & \dots \\ s_2 = & s_{2,1}, & s_{2,2}, & s_{2,3}, & s_{2,4} & \dots \\ s_{3=} & s_{3,1}, & s_{3,2}, & s_{3,3}, & s_{3,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$
>
> Givet denna lista kan vi konstruera ett tal som är reellt och tillhör intervallet, men som inte står med i listan. Kalla talet för s_0, och låt dess olika $s_{0,m} = \begin{cases} 5 & om\ s_{m,m} \neq 5 \\ 6 & om\ s_{m,m} = 5 \end{cases}$. Formulering med matematisk notation är väldigt kompakt. Med ord lyder den "låt *första* siffran i s_0 vara fem, om inte det *första* talets *första* siffra är fem, då låter vi *första* siffran i s_0 vara 6; låt *andra* siffran i s_0 vara fem, om inte det *andra* talets *andra* siffra är fem, då låter vi *andra* siffran i s_0 vara 6; och så vidare." Denna process skapar talet s_0 som definitivt hör till intervallet, men skiljer sig från varje tal i listan, eftersom det på första decimalen skiljer sig från (åtminstone) första talet, på andra decimalen skiljer det sig från (åtminstone) det andra talet, och så vidare.
>
> Vi antog att vi hade en uppräkning av en mängd, och konstruerade sedan ett tal som å ena sidan hör till mängden, men å andra sidan inte kommer med i uppräkningen. Vårt antagande om att det finns en uppräkning är alltså absurt: Intervallet är ouppräkneligt.

En sak bör anmärkas: Vi vet inte definitivt att s_0 är reellt. Oavsett motbevisar s_0 tesen om att ett intervall är uppräkneligt; det är godtyckligt vilka siffror vi bygger upp s_0 av, så länge det skiljer sig från varje möjligt tal i uppräkningen.

En berättigad fråga i detta läge är huruvida det finns andra oändligheter än den uppräkneliga och denna ouppräkneliga. Det finns två svar på den frågan: Ja - det finns större oändligheter. Detta insåg Cantor tidigt i sitt utvecklande av mängdläran: Genom potensmängden (se A.1) kan vi givet en mängd alltid skapa en mängd av större kardinalitet, något som kan visas gälla för oändliga mängder utan att ens anta en oändlig mängd. Beviset för detta ges i avsnitt 3.2 del 2.

Det andra svaret, på om det finns oändligheter *mellan* den uppräkneliga och denna ouppräkneliga (kardinaliteten av $\mathbb{R}$) är betydligt mer komplicerat, och är precis vad kontinuumhypotesen handlar om (se avnitt 3).

A.4 Ordning av mängder

Anledningen till att vi så lätt kunde definiera uppräknelighet är att vi har en enkel ordning för de naturliga talen. Utan idén om större än/mindre än hade vi haft svårt att säga att något element var först, och vilket det skulle följas av. (Det skulle dock kräva att de naturliga talen inte hade något med betydelserna "första", "andra", "tredje" o.s.v. att göra, vilket ju känns befängt.)

Införandet av ordning av mängder kommer tjäna ett par olika syften. Ett sådant syfte - som jag inte stött på i någon litteratur, åtminstone inte uttalat - är att det ger sin egen förklaring för det vi finner ointuitivt med att $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$. Det huvudsakliga syftet är dock att det låter oss otvetydigt definiera den nästa minsta oändligheten.

Ordning är ett samlingsbegrepp som oftast innefattar tre olika typer av ordning, med stigande strikthet: Partiell ordning, total ordning och välordning. Vi kommer ägna oss åt den sistnämnda. En välordning på en mängd ser till att två kriterier är uppfyllda:

- Vilka två olika element som helst i mängden kan jämföras med termerna "större än/mindre än" (eller "kommer efter/kommer före").
- I vilken delmängd som helst finns ett minsta element.

Vi ser direkt att vår naturliga ordning på de naturliga talen är en välordning. Om vi går vidare till $\mathbb{Z}$ räcker dock inte samma ordning till - vi kan lätt bilda delmängder som saknar minsta element. Däremot skapade vi en välordning av $\mathbb{Z}$ när vi ställde den i bijektion med $\mathbb{N}$ i A.3.1. Den är något mer svårformulerad: Om vi låter $<$ vara vår vanliga mindre än-ordning och $<_{\mathbb{Z}}$ beteckna en ordning på $\mathbb{Z}$ så kan vi definiera den som så:

> $a <_{\mathbb{Z}} b$ om (i) $|a| < |b|$ eller om (ii) $|a| = |b|$ och $a < b$. I annat fall är $b <_{\mathbb{Z}} a$.[29]

Även för $\mathbb{Q}$ skulle vi kunna använda bijektionen i A.3.1 för att formulera en välordning.

På detta sätt får alla tre mängder en och samma struktur: Ett minsta element, med en efterföljare, som har en efterföljare, som har en efterföljare, och så vidare. Men man kan lätt bilda andra strukturer - andra ordningar. Vi kan till exempel införa en ny ordning på de naturliga talen som förutom den naturliga ordningen även säger att alla udda tal är "mindre än" alla jämna tal. I stigande ordning från minsta element blir ordningen

[29] $|a|$ betecknar *absolutbeloppet* av a, som kan sägas vara storleken på a, oavsett tecken ($+$ eller $-$). Vi kan definiera det som, givet positivt tal x så är $|x| = |-x| = x$. (Eller: Givet negativt tal x så är $|x| = |-x| = -x$.)

$$1, 3, 5, 7, ..., 0, 2, 4, 6, ...$$

Denna ordning är något mer mystisk på så vis att det inte finns något element vars efterföljare är 0, och om man försöker hittar man snart välordningar som är vansinnigt komplicerade. Man kan tänka sig en ordning efter antal unika heltalsdivisorer, primtalsdivisorer, antalet treor i talet, siffersumma, och oändligt många andra kriterier. Det är i och med detta, menar jag, som man kan börja uppskatta mångsidigheten av uppräkneliga mängder och hur de kan ställas i bijektion med varandra.

När vi använde bijektionen mellan $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}$ (som ju har samma kardinalitet) för att finna en identisk välordning för $\mathbb{Z}$ hade vi alltså givet välordning på ena mängden samt någon bijektion mellan mängderna, och definierade välordningen på $\mathbb{Z}$ utifrån bijektionen. En annan situation uppstår om vi istället har givet två mängder med samma kardinalitet, och samma välordning. Då finns det en bijektion mellan mängderna som *bevarar välordningen* genom att para ihop element med samma plats i ordningarna.

Det finns alltså en någorlunda analogt förfarande gällande välordning och bijektion som det gällande kardinalitet och bijektion. [30] Sammanfattat gäller alltså:

1. Givet en bijektion mellan två mängder A och B och en välordning på A kan vi upprätta en välordning på B med hjälp av bijektionen.

2. Givet två mängder A och B med samma välordning så existerar det en välordningsbevarande bijektion mellan dem.

Detta innebär att bland annat samtliga uppräkneliga mängder kan välordnas, ett delresultat av *välordningssatsen,* som säger att alla mängder kan välordnas, något som tyvärr kräver för en för axiomatisk framställning för att tas upp i detalj här.

A.4.1 Representation av ordningar - ordinaltal

Vi vill kunna arbeta med ordningar på ett smidigt sätt som låter oss snabbt uttrycka "Mängden X med ordningen som ser ut så här/som är definierad på detta vis" på ett väldigt kortfattat vis. För att åstadkomma detta skall vi introducera *ordinaltal.*

Liksom kardinaltal representerar mängders storlekar representerar ordinaltal ordningars storlekar, eller strukturer. För ändliga mängder är ordinaltalet för varje mängd lika med mängdens kardinaltal. Detta för att vi omöjligen kan åstadkomma någon annan ordning än den triviala (ett första element, som har en efterföljare, som har en efterföljare, o.s.v.) Det kan vara skönt att övertyga sig om att så är fallet. Oändliga mängder å andra sidan kräver ett nytt resonemang. För att nå ditt vill jag åskådliggöra simplast möjliga skillnad mellan två oändliga ordningar.

[30] $f : A \to B$ är bijektion $\Leftrightarrow |A| = |B|$.

Låt oss först betrakta de två mängderna $\mathbb{N}$ och $\mathbb{N} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{N}}$ utan några ordningar. Dessa mängder har båda kardinaliteten $\aleph_0$, och kan därför ställas i bijektion med varandra, till exempel genom $1 \mapsto \infty$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 2$, och så vidare. Men säg nu att vi upprättar den vanliga välordningen på $\mathbb{N}$ och en välordning på $\hat{\mathbb{N}}$ som är precis som den vanliga, med tillägget att ∞ är större än alla andra element. Då kan vi inte upprätta en välordningsbevarande bijektion mellan dem. Detta av den enkla anledning att de inte har samma struktur, alltså ordning, i och med att $\hat{\mathbb{N}}$ har ett största element som inte kan paras ihop med något största element i $\mathbb{N}$. Om vi ändå skulle göra vårt bästa - göra en bijektion välordningsbevarande så länge som möjligt - skulle vi uppleva att ordningen på $\hat{\mathbb{N}}$ var ett element längre. Läggs ytterligare ett ännu större element till skulle den upplevas vara två element längre, och så vidare. Vi måste alltså kunna ha en mycket finare indelning i storlekar hos ordinaltalen än kardinaltalen - vi måste kunna skilja på "oändlighet" och "oändlighet plus ett". Detta är precis vad vi skall göra.

Det finns ett minsta oändligt ordinaltal - den vanliga ordningen på de naturliga talen. Vi betecknar det ω, omega. Vi behöver nu ett otvetydigt system för att beteckna ordningarna i exemplet här ovan. Därför ska vi definiera *ordnad union av ordnade mängder.*

> Givet disjunkta ordnade mängder A och B definierar vi den ordnade unionen $\langle A \cup B \rangle$ som unionen $A \cup B$ ordnad så att A med sin inbördes ordning kommer före B med sin inbördes ordning.

Om vi låter $\overline{X}$ beteckna ordinaltalet för en välordnad mängd X så kan vi genom regeln $\overline{\langle A \cup B \rangle} = \overline{A} + \overline{B}$ (som antyddes i exemplet) bygga upp mängden av uppräkneliga ordinaltal:

$$\{0,\ 1,\ 2\ ,3,\ \dots, \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \dots, \omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ \dots\}.$$

Som vi såg innan är det inte intressant att tillföra en ändlig ordning före än oändlig, vilket innebär att $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$.

Vidare kan vi definiera multiplikation av ordinaltal på ett intuitivt sätt. Givet två ordinaltal som faktorer $\overline{A}$ och $\overline{B}$ låter vi produkten $\overline{A}.\overline{B}$ vara det ordinaltal som representerar ordningen där vi först tänker oss A, och sedan ytterligare A efter varandra tills vi har $\overline{B}$ stycken. Därmed gäller för naturliga tal n att $\omega.n = \omega + \omega + \dots$ n stycken gånger, medan $n.\omega = \omega$.

Vi har nu fått att $\omega + \omega = \omega.2$ och kan fylla på mängden av uppräkneliga ordinaltal med $\omega.3,\ \omega.4,\ \dots,\ \omega.\omega = \omega^2,\ \omega^2+1, \dots$.

Med denna mängd framför sig kan man tänka sig en alternativ definition av ordinaltal, nämligen ordinaltal som ordnade mängder. Ett ordinaltal definieras då rekursivt[31] som mängden av alla föregående (mindre) ordinaltal, och är ordnad efter delmängd - givet två element i mängden är antingen det ena delmängd av det andra eller tvärtom.

Som mängd är ω det minsta ordinaltalet med kardinaliteten $\aleph_0$.

[31] Med detta menas att givet ett första ordinaltal definierar vi nästa, och givet dessa två definieras nästa, och så vidare.

Det måste nu finnas något minsta ordinaltal som är större än alla uppräkneliga, nämligen det minsta ouppräkneliga ordinaltalet. Vi kallar det ω_1, och som mängd är det alltså lika med den ovan utskrivna. Dess kardinalitet definieras som $\aleph_1$, den näst minsta oändliga kardinaliteten. Det kan inte finnas någon mindre ty alla mindre ordinaltal är ju uppräkneliga. Däremot finns det, precis som med ω, större ordinaltal med samma kardinalitet.

Det är svårt att till fullo uppskatta genialiteten i förhållandet mellan ordinaltal och kardinaltal - ett förhållande som kan utgöra grund för en definition av tal överhuvudtaget.

A.5 Sammanfattning

Att gå längre än hit utan en mer gedigen matematikbakgrund och ett mer formellt förhållningssätt är inte omöjligt, men risken är att kunskapen blir för fläckvis och sammanhangsbunden.

Denna introduktion tog oss från en första idé om vad en mängd är, definierade förhållanden mellan givna mängder, definierade funktionsbegreppet och visade hur vi kan tillämpa funktioner på mängder. I och med det kunde vi på ett generellt plan definierat storlekar av mängder - kardinaltal.

Vi tog oss an mängder med oändligt många element och påvisade kontraintuitiva egenskaper hos sådana mängder, och visade att det fanns en minsta oändlig kardinalitet, som vi utan förklaring kallade $\aleph_0$. Givet begreppet välordning av mängd kunde vi definiera ordinaltal som kan hjälpa oss förstå strukturen på välordnade mängder. Tack vare ordinaltal kunde vi till slut definiera det näst minsta oändliga kardinaltalet $\aleph_1$.

B Richards paradox

Ett flertal paradoxer, eller antinomier, gjorde sig aktuella runt sekelskiftet och under mängdlärans formation. Några fick stor effekt. Russell's paradox, till exempel, visade med all säkerhet att Cantors naiva mängdlära ledde till motsägelser, något som föranledde Zermelos axiomatisering av mängdläran.

Richards paradox, efter franske matematikern Jules Richard, gjorde inte samma omvälvande avtryck, men har däremot initierat sina diskussioner om vad som är matematik och vad som kan beskriva matematik - metamatematik. Jag ger här två versioner av paradoxen. Den första återfinnes i Moore (1982), och verkar vara Richards originalformulering av problemet.

Vi upprättar här en lista av först alla tvåstaviga bokstavskombinationer i bokstavsordning. Därefter alla trestaviga, fyrstaviga, och så vidare. Vi tar sedan bort alla bokstavskombinationer som inte beskriver ett reellt tal. Vi har då skapat en uppräknelig, välordnad, mängd E av alla reella tal som är definierbara med ett ändligt antal bokstäver. Vi skapar sedan ett tal s på samma vis som vi gjorde i diagonalbeviset, så att det skiljer sig på varje decimal från varje tal i mängden E. Vi har nu definierat s med ett ändligt antal bokstäver (det fick ju plats ovan), men s finns inte i E, eftersom det skiljer sig från varje tal i E.

Richard menar att motsägelsen löses i och med att definitionen av s kräver att E är definierad, men att definitionen av E skulle kräva ett oändligt antal ord.

I den andra versionen, som ges av Nagel & Newman (1958), låter vi istället anta att vi på ett språk, säg svenska, kan formulera de aritmetiska egenskaperna hos de ändliga kardinaltalen. Vi antar att vi förstår vad "delbarhet", "produkt", "summa" och liknande ord betyder. Vi kan då definiera primtal som "ett tal som är delbart endast med sig självt och ett", eller en perfekt kvadrat som "ett tal som är produkten av något heltal med sig självt". Varje sådan definition kommer bestå av ett ändligt antal bokstäver. Vi kan då ordna dem på samma sätt som i förra versionen, för att sedan upprätta en bijektion mellan denna mängd och de naturliga talen. I vår lista över egenskaper kommer de två nyss nämnda finnas med någonstans. För exemplets skulle låter vi "ett tal som är delbart endast med sig självt och ett" motsvaras av 23, medan "ett tal som är produkten av något heltal med sig självt" får motsvaras av 32. Det gäller nu att definitionen som 23 motsvarar också stämmer in på talet 23, medan definitionen som 32 motsvarar *inte* stämmer in på talet 32. Vi säger då, givet vår bijektion, att 32 är *Richardiskt*, medan 23 inte är Richardiskt. Att ett tal är Richardiskt innebär alltså det beskrivs av den definition det motsvarar:

- "ett tal som är delbart endast med sig självt och ett"$\leftrightarrow$ 23, 23 är inte Richardiskt.
- "ett tal som är produkten av ett heltal med sig säjlvt"$\leftrightarrow$ 32, 32 är Richardiskt.

Vad händer när vi nu låter en definition lyda "ett tal som inte beskrivs av den definition det motsvarar"? Den består av ett ändligt antal bokstäver och verkar därmed höra hemma i vår mängd av definitioner. Låt den motsvaras av n. Är n Richardskt? För läsbarheten förkortar vi till "är Richardiskt"

- "är Richardiskt"$\leftrightarrow n$. Antag n är Richardiskt. Vi får att n *inte* "är Richardiskt".
- "är Richardiskt"$\leftrightarrow n$. Antag n inte är Richardiskt. Vi får att n "är Richardiskt".

Lösningen här är ännu mer konkret än i den första versionen. Vi säger inledningsvis att vi "kan formulera de aritmetiska egenskaperna", men att ett tal är Richardiskt är ingalunda en aritmetisk egenskap. Vi har blandat matematik och beskrivande av matematik

C Originalcitat

Nedan återges de citat som kan vara särskilt intressanta att läsa på originalspråk, antingen för att de var svåröversatta eller på grund av intressanta ordval.

Citat 1:

> Man stellt sich wohl im allgemeinen vor, dass bei jedem mathematischen Problem, eine Entscheidung möglich ist, entweder so dass man die Frage beantworten kann, oder so dass es sich darlegen lässt, dass das verlangte unmöglich ist.

Citat 2:

> Und man fasst hierbei die Sache, ein wenig näher präzisiert, so auf, dass es in jedem Falle möglich sein muss, durch endliche Mittel entweder eine Lösung zu gewinnen oder den Nachweis zu liefern, dass in der Aufgabe ein Widerspruch steckt. Es kann doch in Frage gestellt werden ob dies ganz richtig ist. Es wäre eine ganz andere Art von "Unmöglichkeit" denkbar.

Citat 3:

> Man könnte sich nämlich denken, dass gewisse Fragen, welche mit endlichen Mitteln in präzieser Form formulierbar sind, andererseits nicht mit endlichen Mitteln lösbar wäre; dies so aufgefasst, dass endliche Mittel nicht für eine Entscheidung ausreichen sollten. Wenn solches vorkommen kann, so bedeuted dies, dass es mathematische Fragen giebt, welche das menschliche Denkvermögen wohl aufstellen, aber nicht beantworten kann. Denn das menschliche Denken ist auf endliche Mittel hingewiesen.
>
> Lässt es sich nun aber in irgend einer Weise erhärten, dass solche Fälle Wirklich existieren? Ich bin der Meinung, dass es sich so verhält.

Citat 4:

> Als Vorbereitung ist es zweckmässig, die oben berührten Begriffe "endliche Mittel", “endliche Bestimmbarkeit" etc. etwas näher ins Auge zo fassen. Dass ein Gedankending durch eine endliche Menge von Bestimmungen definiert ist, hat unbedingt eine ganz distinkte Bedeutung. Aber natürlich soll man sich dafür hüten, eine wirkliche Endlichkeit mit einer scheinbaren zu verwechseln. Ähnliches gilt auch für den Begriff endliche Anzahl von Schlussfolgerungen. Und wenn irgend eine Frage nicht durch eine endliche Reihe von Schlüssen entschieden werden kann, so beruht dies darauf - oder kann jedenfalls darauf beruhen - dass die Entscheidung überendliche Definitionen erfordern sollte.

Citat 5:

> Indessen haben auch hervorragende Mathematiker geltend machen wollen, dass Begriffe wie "endliche Bestimmbarkeit" nicht zur Mathematik gehören, sondern mehr philosophischer Natur sein. Eine solche scharfe Trennung von mathematik und Philosophie finde ich meinetwegen jedenfalls in diesem Falle nicht glücklich.

Allgemeine Betrachtungen über das Verhältniss zwischen Logik und Mathematik sollen hier nicht angestellt werden. Nur sei bemerkt: das Continuumproblem darf wohl als ein mathematisches Problem aufgefasst werden; es ist wohl jedenfalls erlaubt, die Frage zu stellen, ob es in menschlicher Macht steht, dies Problem zu lösen. Eine Beantwortung dieser Frage durch unmathematischer Philosophen ist nicht zu erwarten; und die Sache ist mit dem Begriffe endlicher Bestimmbarkeit untrennbar verbunden."

Citat 6:

Man weiss, dass das Continuum nicht abzählbar ist. Und hierfür sind mehrere Beweise gegeben. Es ist aber hier nützlich oder sogar notwendig, dass wir uns fragen, wie dieser Satz in so zu sagen möglichst reiner Form zu beweisen ist, d.h. in einer Form, welche von jeder Unwesentlichkey befreit ist und nur die notwendigsten, möglichst abstrakten Begriffe voraussetzt.

Citat 7:

Giebt es irgend eine aus Teilmengen von A bestehende Menge Z, welche einerseits nicht-abzählbar ist, andererseits kleinere Mächtigkeit als T hat. Wenn wir der Kürze wegen eine solche Menge Z als Zwischenmenge bezeichnen, wird also die Frage: giebt es Zwischenmenge, oder nicht? - Wenn die Frage zu bejahen ist, liegt natürlich die Möglichkeit vor, dass Zwischenmengen verschiedener Mächtigkeiten vorhanden sind, unter denen jedenfalls diejenigen von kleinster Mächtigkeit mit der zweiten Cantor'schen Zahlenklasse äquivalent sind.

Citat 8:

Nach dem oben gesagten muss eine solche Definition immer defekt - nur "halbfertig", wenn man så sagen will - bleiben, so lange man auf endliche Mittel hingewiesen ist. Auch bei der Menge V ist es so, dass nicht alle Elemente mit endlichen Mitteln individualiziert werden können. Aber die Menge als solche haben wir in unzweideutiger Weise definiert. Nun handelt sich aber um eine *Umbestimmtheit* in der Definition der Menge P, welche nur mit überendlichen Mitteln überwunden werden könnte. Und das endliche Hilfsmittel hier nicht ausreichen, beruht - kann man sagen, darauf, dass die Definition, der Natur der Sache gemäss, eben auf Individualizierung der Elemente gegründet sein muss.

Citat 9:

Es stellt sich nun die Frage dar, inwieweit es denkbar ist, dass der eine oder andere der oben angegebenen Typen von Äquivalentzbeweisen im vorliegenden Falle angewandt werden könnte. Dass es unmöglich sein muss, eine (1,1)-deutige Korrespondenz zwischen V und P explicit darzustellen, folgt unmittelbar schon aus der Unmöglichkeit, alle Elemente von V und P individuell zu definieren. Aber auch die "halbexplicite" Korrespondenz ist ausgeschlossen. Man kann voraussetzen, dass Elemente von V sämmtlich individualiziert wären, und durch irgendwelche Operationen von einem beliebigen V-Elemente zu einem neue V-Elemente übergehen; aber eben zufolge der erwähnten Unbestimmtheit von P kann man nicht immer wissen, ob dies neue Element zu P gehört, oder nicht. Und in der entgegensetzten Richtung, von P nach V, ist jene Unbestimmtheit offenbar ebenso verhängnissvoll. Der Beweistypus A (p.10) kann somit nicht in Frage kommen. Man bemerke übrigens hier, dass die Voraussetzungen jetzt nicht ganz dieselben sind wie oben bei der Feststellung der verschiedenen Typen. Dort wurde nämlich angenommen, dass die zu vergleichenden Mengen ohne Benutzung von Ordnungsbegriffen definiert waren. Jetzt gilt ja dies nicht für die Menge P. Dieser Unterschied ist jedoch ohne Bedeutung, so lange es sich um Typus A handelt. Aber bei den Typen B)1) und B)2) bewirkt die etwas väränderte Lage eine gewisse Modifikation. In B)1) asoll es jetzt heissen, dass man keine anderen Anordnungen als die eingeführten Wohlordnung benutzt; in B)2) dagegen, dass man neben den Wohlordnungen auch andere Anordnungen heranzieht. Wir betrachten zuerst die Eventualität B)1). Ist es möglich einen weder expliciten noch halbexpliciten Äquivalenzbeweis (man kann ja kurz so sagen) zu führen, bei welchem ausser den ordnungsfreien Begriffen und Sätzen nur die Wohlordnung benutzt wird?

Citat 10:

Es ist jedenfalls für much kaum zweifelhaft, dass die mehrerwähnte Unbestimmtheit in der Definition von P die Sache unmöglich macht. Natürlich bildet die Unbestimmtheit als solche kein unbedingtes Hinderniss. Es kann sehr wohl möglich sein, äquivalenz zwischen zwei Mengen darzulegen, obgleich die eine oder sogar beide unbestimmt sind. Es ist zum Beispiel so in den oben berührten Falle: wenn R Teilmenge von M, und N Teilmenge von R ist, so lässt es sich zeigen, dass bei Äquivalenz von M und N auch M und R äquivalent sind. Hier ist ja R zwischen gewissen Grenzen unbestimmt, auch wenn man voraussetzt, dass M und N gegebene und bestimme Mengen sind. Aber solche Vorkomnisse hindern natürlich nicht, dass es Arten von Unbestimmtheiten geben kann, welche mit der Möglichkeit eines Äquivalenzbeweises (oder überhaupt einer Mächtigkeitsbestimmung) unvereinbar.