UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2013:13

Kvaternioner – algebraiska och geometriska aspekter

Katarina Lilja

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare och examinator: Seidon Alsaody
Juni 2013

Department of Mathematics
Uppsala University

Sammanfattning

Kvaternionerna kommer här att belysas dels ur ett historiskt perspektiv genom deras grundare och tillkomsthistoria, dels ur ett nutidsperspektiv där deras algebraiska egenskaper beskrivs samt där geometriska aspekter rörande rotationer och några av deras tillämpningar lyfts fram. Slutligen kommer en vidare generalisering av kvaternionerna att beröras.

Innehåll

Historik

I början av 1800-talet hände flera matematiskt viktiga saker som kom att få stor betydelse framöver. I tidsandan låg att man ville söka efter en exakt teoretisk grund inom alla grenar i matematiken och många matematiker började fokusera mer koncentrerat på detta. Tre av de viktigaste följderna av detta var utvecklingen av icke-Euklidisk geometri, utvecklingen av en strikt teoretisk grund för kalkylen och utvecklingen av icke-kommutativ algebra.

Under många år ansågs algebra vara endast generaliserad aritmetik, där bokstäver användes istället för siffror och alla de vanliga reglerna för matematiska operationer även gällde algebraiska manipulationer. Vid den här tiden började dock de matematiker som arbetade med algebra att koncentrerat fokusera på sådant som slutenhet, kommutativitet och associativitet för algebraiska operationer.

En av alla dem som funderade på detta var William Rowan Hamilton. Han föddes vid midnatt mellan den 3 och 4 augusti 1805 i Dublin, Irland som nummer fyra i en syskonskara på nio, son till Archibald Hamilton och Sarah Hutton. [O'Donnell] Familjen hade ekonomiska bekymmer och man upptäckte tidigt att lille William var ett ovanligt begåvat barn. Detta var förmodligen bidragande orsaker till att han vid tre års ålder skickades till sin farbror James Hamilton, som var anglikansk präst och lärare i Trim, för att bo där och han blev sedan föräldralös vid fjorton års ålder. Hamiltons farbror, som var en intelligent och utbildad man, tog sig an sin brorsons utbildning och blev hans privatlärare. Detta visade sig vara en lyckad kombination. Hamilton var en lysande elev och det sägs att han vid tretton års ålder kunde, i olika grad, cirka tio olika språk. [O'Donnell] Språk var dock inte det enda intresset han hade utan han studerade även geografi, religion, litteratur, astronomi och matematik. Det som verkligen väckte hans intresse för matematik var två möten med det amerikanska underbarnet Zerah Colburn. [O'Donnell] En tävling mellan de två i matematik arrangerades och Hamilton förlorade stort. Efter deras andra möte övergav Hamilton i stort sett sitt intresse för språk och koncentrerade sig hädanefter på matematiken. Detta gjorde han på egen hand, förmodligen för att hans farbror inte hade tillräckliga kunskaper i detta.

1823 började Hamilton på Trinity College of Dublin University där han var bäst i intagningsprovet och bestämde sig för att han skulle ägna sig åt vetenskap. Han hade smått otrolig framgång i sina studier och blev en kändis i Dublins intellektuella kretsar. Inom optiken och dynamiken har Hamiltons arbeten lämnat ett stort bidrag och bidrog ytterligare till hans kändisskap. Innan han ens tagit sin examen blev han utsedd till Astronomer Royal vid observatoriet i Dunsink. Vid 30 års ålder blev han som förste Irländske vetenskapsman adlad för sitt vetenskapliga arbete och fick medalj av The Royal Society. Två år senare blev han vald till ordförande i The Royal Irish Academy, den mest framstående akademiska positionen i Irland. [O'Donnell]

De komplexa talen och den geometriska representationen av sådana var känd vid den här tiden. 1837 publicerades en uppsats av Hamilton där framförallt den tredje delen är av stor betydelse. Där utvecklar han de komplexa talen såsom ordnade par av reella tal, nästan på precis samma sätt som det görs idag. Vad Hamilton gör är alltså att ta par av reella tal (a, b) och definiera operationer med dem, alla med de vanliga reglerna för matematiska operationer. Sedan visar han att dessa par följaktligen är ekvivalenta med de komplexa talen på formen $a + bi$. I slutet av denna uppsats skriver han att han söker efter en ”Theory of triplets”. Helt enkelt innebär detta att han vill utvidga de komplexa talen och hitta en algebra för detta i tre dimensioner. [Crowe]

Under många år förbryllade detta honom och han försökte hitta ett sätt att få det att fungera i tre dimensioner. Han berättar själv i ett brev till Archibald, en av sina söner, att varje morgon vid frukosten frågade William Edward, den andre av hans söner, honom ”Jaha, Pappa, kan du multiplicera tripplar nu?” och han var tvungen att svara med att sorgset skaka på huvudet och säga ”Nej, jag kan bara addera och subtrahera dem.”[O'Donnell] Några år senare visade det sig också att detta inte är möjligt.

Men måndagen den 16 oktober 1843 var Hamilton på väg till ett styrelsemöte i The Royal Irish Academy där han skulle leda förhandlingarna. Han gick med sin fru, Helen Bayly, längs Royal Canal och småpratade medan han undermedvetet funderade på problemet med tripplarna. Plötsligt fick han en insikt om att tripplar inte var nog utan det behövdes kvadruppler och han insåg att han inte bara behövde den imaginära komponenten i utan snarare tre sådana, i, j och k, som uppfyllde:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

När nu den grundläggande formeln dök upp i hans medvetande kunde han inte motstå impulsen att ta fram en kniv och rista in den i Broom Bridge som de just passerade. Denna inskription har nu vittrat bort, men en minnestavla finns vid bron. [O'Donnell]

Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge
Källa Wikipedia

När sedan Hamilton introducerade kvaternionerna kom detta som en total överraskning för den matematiska världen eftersom de bröt mot den kommutativa lagen för multiplikation. För den tidens matematiker verkade en sådan algebra, som uppfyllde alla andra kriterier men inte kommutativiteten för multiplikation, vara helt omöjlig. Hamiltons insats var början på något helt nytt inom matematiken och öppnade vägen för den moderna abstrakta algebran. Senare har man studerat gott och väl över 200 olika typer av algebraiska strukturer, exempelvis Liealgebror, vektorrum, divisionsringar/skevkroppar, Jordanalgebror…[Eves]

Ganska snart efter att Hamilton publicerat sina fynd kvaternionerna och sina studier kring detta i det tredimensionella rummet började vektoralgebran att utvecklas och det verkade som om kvaternionerna ganska snart blev omoderna. Hamilton höll dock fast vid sina studier om kvaternionerna under sina återstående 22 år av livet. Som så ofta inom matematiken där man först gör en upptäckt och långt senare finner ett användningsområde för denna, har dock kvaternionerna kommit till heders igen på senare år. Det har upptäckts att det finns användningsområden där kvaternioner är ett mycket mer effektivt verktyg än metoder från vanlig vektoralgebra.[Kuipers]

Femtiofyraårige William Rowan Hamilton
Källa Wikipedia

Hamilton dog den andra september 1865 av ett giktanfall, troligen orsakat av hans dåliga hälsa till följd av hans alkoholism, överarbete och mycket olyckliga äktenskap. Detta endast en kort tid efter att han fått ett brev som berättade att han blivit vald till den första utländska medlemmen av National Academy of Sciences i USA, vilket i klartext betyder att han av de amerikanska medlemmarna ansågs som världens största vetenskapsman utanför USA [Crowe].

Algebraiska aspekter

De reella talen, $\boldsymbol{R}$, uppfyller följande villkor;

1) Slutenhet under addition och multiplikation:
om $a, b \in \boldsymbol{R}$ så är $a + b = c$ och $a \cdot b = d$ där $c, d \in \boldsymbol{R}$

2) Associativitet för både addition och multiplikation:
om $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ så $(a + b) + c = a + (b + c)$ och $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3) Kommutativitet för både addition och multiplikation:
om $a, b \in \boldsymbol{R}$ så $a + b = b + a$ och $a \cdot b = b \cdot a$

4) Existensen av en nolla, ett enhetselement 0 för addition med egenskapen att $a + 0 = 0 + a = a$ för varje $a \in \boldsymbol{R}$

5) Existensen av en invers för addition så att för varje $a \in \boldsymbol{R}$ finns ett tal $- \in \boldsymbol{R}$ så att $a + (-a) = (-a) + a = 0$

6) Existensen av en etta, ett enhetselement 1 för multiplikation så att $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ för varje $a \in R$ och där $1 \neq 0$

7) Existensen av en invers för multiplikation så att för varje $a \in \boldsymbol{R}, a \neq 0$ finns ett tal a^{-1}, så att $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$

8) Distributivitet för addition och multiplikation så att för varje $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ har vi att $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

De ovan nämnda kriterierna var något som ansågs gälla generellt inom matematiken fram till födelsen av den abstrakta algebran. Det var just detta som Hamilton i sin plötsliga insikt ändrade på i och med födelsen av kvaternionerna. Med Hamiltons formel för multiplikation följer, som vi strax skall se, ett brott mot den kommutativa lagen för multiplikation. Till följd av detta kan man påstå att Hamilton öppnade vägen för den abstrakta algebran. En grundläggande egenskap hos abstrakt algebra är just att det finns strukturer där en eller flera av dessa välbekanta lagar inte gäller, exempelvis att en viss operation inte är kommutativ.

Kvaternioner

En kvaternion skrivs på formen

$$\boxed{q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3}$$

Där $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \boldsymbol{R}$ och i, j och k är de imaginära enheter som Hamilton införde. Mängden av alla kvaternioner skrivs $\boldsymbol{H}$ som en tribut till deras upphovsman, Hamilton.

Definition
Givet två kvaternioner, säg $p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3$ och $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$, $p = q$ om och endast om $p_0 = q_0, p_1 = q_1, p_2 = q_2 \; och \; p_3 = q_3$. Skalärerna q_0, q_1, q_2, q_3 kallas kvaternionens komponenter.

Addition

Om vi har två kvaternioner, p och q, så definieras addition av dem $p + q = (p_0 + q_0) + i(p_1 + q_1) + j(p_2 + q_2) + k(p_3 + q_3) = r_0 + ir_1 + jr_2 + kr_3 \in \boldsymbol{H}$. $\boldsymbol{H}$ är alltså sluten under addition.

Det finns också en 0-kvaternion, $0 = 0 + i0 + j0 + k0$ sådan att $0 + p = p + 0 = p, \forall p \in \boldsymbol{H}$.

Varje kvaternion, q, har en additiv invers, -q så att $q + (-q) = -q + q = 0$, nämligen om $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ så är $-q = -q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$.

Addition av kvaternioner är både associativ och kommutativ eftersom addition av reella tal har de egenskaperna och addition av kvaternioner är uttryckt komponentvis i termer av denna.

Multiplikation

Multiplikation med en skalär fungerar på precis samma sätt som med vektorer i $\boldsymbol{R}^n$. Om $c \in \boldsymbol{R}$, och $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in \boldsymbol{H}$ har vi att

$$cq = cq_0 + icq_1 + jcq_2 + kcq_3$$

För att kunna multiplicera två kvaternioner använder vi oss av den formel som Hamilton kom fram till, nämligen:

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$$

Härav följer att:

$$\boxed{\begin{matrix} ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ki = j = -ik \end{matrix}}$$

Dessa produkter är inte kommutativa, och då har vi att produkten av två kvaternioner inte heller är kommutativ.

Om $p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3$ och $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ så har vi att:

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3)(q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3) \\ &= p_0q_0 + ip_0q_1 + jp_0q_2 + kp_0q_3 + ip_1q_0 + i^2p_1q_1 + ijp_1q_2 + ikp_1q_3 + jp_2q_0 + jip_2q_1 \\ &\qquad + j^2p_2q_2 + jkp_2q_3 + kp_3q_0 + kip_3q_1 + kjp_3q_2 + k^2p_3q_3 \\ &= p_0q_0 + ip_0q_1 + jp_0q_2 + kp_0q_3 + ip_1q_0 - p_1q_1 + kp_1q_2 - jp_1q_3 + jp_2q_0 - kp_2q_1 \\ &\qquad - p_2q_2 + ip_2q_3 + kp_3q_0 + jp_3q_1 - ip_3q_2 - p_3q_3 \\ &= p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + p_0(iq_1 + jq_2 + kq_3) + q_0(ip_1 + jp_2 + kp_3) \\ &\qquad + i(p_2q_3 - p_3q_2) + j(p_3q_1 - p_1q_3) + k(p_1q_2 - p_2q_1) \end{aligned}$$

Senare kommer vi att uttrycka denna produkt mer kompakt, men vi börjar med att göra några iakttagelser gällande kvaternionprodukten. Vi konstaterar nu att $\boldsymbol{H}$ är sluten under multiplikation, ty givet två kvaternioner, säg p och q, så har vi att $pq = r_0 + ir_1 + jr_2 + kr_3 = r$ där $r \in \boldsymbol{H}$. Kvaternionprodukten är också associativ, och vi har konstaterat att den inte är kommutativ. Multiplikation i $\boldsymbol{H}$ är också distributiv över addition.

Hur är det då med ett enhetselement, en etta, för multiplikation? Detta kommer vi att återkomma till när vi har fått ett lättare sätt att skriva kvaternionmultiplikation på.

Nu konstaterar vi att man kan se $\boldsymbol{H}$ som $\boldsymbol{R}^4$, nämligen genom att i det fyrdimensionella vektorrummet $\boldsymbol{R}^4$ välja standardbasvektorerna

$$e_1 = (1,0,0,0) \;\; e_2 = (0,1,0,0) \;\; e_3 = (0,0,1,0,) \;\; e_4 = (0,0,0,1)$$

och låta $1 = e_1, i = e_2, j = e_3$ och $k = e_4$. En kvaternion $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ kan då skrivas (q_0, q_1, q_2, q_3) som en vektor i $\boldsymbol{R}^4$.

Här stannar vi upp och konstaterar att skalärprodukten för två vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ där $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{R}^3$ är

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

och kryssprodukten för dessa vektorer är

$$\vec{a} \times \vec{b} = i(a_2b_3 - a_3b_2) + j(a_3b_1 - a_1b_3) + k(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Vi måste då ställa oss en befogad fråga: Vad har räkneregler för vektorer i $\boldsymbol{R}^3$ att göra med kvaternioner och dess produkt då kvaternioner tillhör $\boldsymbol{R}^4$? Svaret är att man kan se vektorer i $\boldsymbol{R}^3$ som kvaternioner där $q_0 = 0$, det vill säga sätta $\boldsymbol{R}^3 = \boldsymbol{H}_{Im}$, där $\boldsymbol{H}_{Im}$ är mängden av alla kvaternioner med $q_0 = 0$, så kallade rent imaginära kvaternioner.

Vi konstaterar också att kvaternioner ibland definieras som summan

$$q = q_0 + \vec{q} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$$

och man ser dem då som bestående av en realdel, q_0, och en imaginärdel, $\vec{q} = iq_1 + jq_2 + kq_3$, där $\vec{q} \in \boldsymbol{R}^3$ eller $\boldsymbol{H}_{Im}$ om vi så vill.

Nu kan vi utnyttja räknereglerna ovan för skalärprodukten och kryssprodukten i $\boldsymbol{R}^3$ till att skriva kvaternionprodukten som

$$\boxed{pq = p_0q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} + p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}}$$

I det specialfall där två kvaternioner som båda har realdelen noll, det vill säga rent imaginära kvaternioner, blir kvaternionprodukten

$$pq = \vec{p} \times \vec{q} - \vec{p} \cdot \vec{q}$$

Nu är vi mogna för att bevisa satsen om att det finns en multiplikativ etta.

Sats
Det finns en etta, det vill säga ett enhetselement, för multiplikation med kvaternioner, nämligen kvaternionen $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$.

Bevis
Givet en kvaternion, $p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3$ har vi att $p1 = p_0 \cdot 1 - \vec{p} \cdot \vec{0} + p_0\vec{0} + 1 \cdot \vec{p} + \vec{p} \times \vec{0} = p_0 + \vec{p} = p$, och på liknande sätt fås $1p = p$.

Ett annat sätt att skriva kvaternionprodukten är att använda matrisform till att utföra multiplikationen. Om vi skriver produkten som:

$$pq = r = r_0 + ir_1 + jr_2 + kr_3$$

Då har vi att:

$$\begin{aligned} r_0 &= p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 \\ r_1 &= p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2 \\ r_2 &= p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1 \\ r_3 &= p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0 \end{aligned}$$

Skrivet i matrisform får vi då:

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Värt att nämna är att det också finns en matris *A* så att

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Det finns också en multiplikativ invers till varje kvaternion $q \in \boldsymbol{H}$, där $q \neq 0$. För att visa detta behöver vi först definiera konjugatet och normen av en kvaternion.

Konjugat

Definition
Givet en kvaternion, $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$, definierar vi konjugatet av *q* som
$q^* = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$.

Givet två kvaternioner *p* och *q* har vi att kvaternionproduktens konjugat är $(pq)^* = q^*p^*$.

Sats
Summan av en kvaternion q och dess konjugat q^* är en skalär, det vill säga ett reellt tal.

Bevis
$q + q^* = (q_0 + \vec{q}) + (q_0 - \vec{q}) = 2q_0$ där $2q_0 \in \boldsymbol{R}$.

Norm

Definition
En norm på $\boldsymbol{R}^n$ är en funktion $N: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ som uppfyller

- $N(v) \geq 0,\ \forall v \in \boldsymbol{R}^n$ och $N(v) = 0 \leftrightarrow v = 0$, dvs funktionen är positivt definit
- $N(\alpha v) = |\alpha| N(v),\ \forall \alpha \in \boldsymbol{R}, v \in \boldsymbol{R}^n$, dvs funktionen är homogen
- $N(v + w) \leq N(v) + N(w),\ \forall v, w \in \boldsymbol{R}^n$, dvs funktionen uppfyller triangelolikheten

Den vanliga Euklidiska normen på $\boldsymbol{R}^n$ ges av den så kallade avståndsformeln $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2}$

Normen av en kvaternion, $N(q)$eller $\|q\|$, är den vanliga Euklidiska normen och man kan visa att $\|q\| = \sqrt{q^*q}$, ty om vi utnyttjar formeln för kvaternionprodukten och det faktum att för varje vektor $\vec{q}$ har vi att $\vec{q} \times \vec{q} = 0$, ger det oss följande

$$\begin{aligned} q^*q &= (q_0 - \vec{q})(q_0 + \vec{q}) \\ &= q_0 q_0 - (-\vec{q}) \cdot \vec{q} + q_0 \vec{q} + (-\vec{q}) q_0 + (-\vec{q}) \times \vec{q} \\ &= q_0^2 + \vec{q} \cdot \vec{q} \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \|q\|^2 \end{aligned}$$

För en godtycklig kvaternion, *q*, har vi alltså att $q^*q = \|q\|^2$, och även $qq^* = \|q\|^2$.

Definition
En enhetskvaternion är en kvaternion med längd 1, dvs $\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1$.

Slutligen studerar vi normen av produkten av två kvaternioner, p och q

Sats
$\|pq\| = \|p\|\|q\|$

Bevis
$\|pq\|^2 = (pq)(pq)^* = pqq^*p^* = p\|q\|^2p^* = pp^*\|q\|^2 = \|p\|^2\|q\|^2$

Så normen av produkten av två kvaternioner är produkten av kvaternionernas individuella normer. Härav följer att produkten av två enhetskvaternioner är en enhetskvaternion.

Invers

Nu är vi redo att definiera kvaternionens multiplikativa invers, q^{-1}. Den skall uppfylla

$q^{-1}q = qq^{-1} = 1$

där $q \neq 0$, eftersom 0 saknar invers.

Multiplicera med det komplexa konjugatet q^*.

$q^{-1}qq^* = q^*qq^{-1} = q^*$.

Nu har vi att

$q^{-1}\|q\|^2 = \|q\|^2q^{-1} = q^*$, ty $qq^* = \|q\|^2$,

varur fås att

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$$

Då har vi kommit fram till definitionen av kvaternionens invers:

$$\boxed{q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}}$$

Om då q är en enhetskvaternion, $\|q\| = 1$, så är $q^{-1} = q^*$.

När vi nu har studerat algebra för kvaternioner kan det vara på sin plats att se $\boldsymbol{H}$ i ett större sammanhang och vi gör därför följande definitioner.

Definitioner
En reell *algebra* är ett reellt vektorrum med en multiplikation som är bilinjär: om V är en reell algebra, $a, b, c \in V$ och $r, s \in \boldsymbol{R}$ så har vi att $(ra + sc)b = r(ab) + s(cb)$ och $b(ra + sc) = r(ba) + s(bc)$

En *divisionsalgebra* är en algebra så att ekvationerna $ax = b$ och $xa = b$ har entydiga lösningar x för varje b och varje $a \neq 0$.

En *ring* är en mängd som är sluten under addition och multiplikation. Additionen skall vara associativ, kommutativ samt ha en additiv invers. Multiplikationen skall vara associativ och den distributiva lagen skall gälla. Dessutom skall det finnas ett enhetselement för både addition och multiplikation. Ett exempel på en ring är heltalen, $\boldsymbol{Z}$.

En *divisionsring* eller *skevkropp* är en ring som uppfyller ovanstående och dessutom uppfyller att varje $a \neq 0$ har en multiplikativ invers. Ett exempel på detta är kvaternionerna, $\boldsymbol{H}$.

En *kropp* är ett objekt som uppfyller alla kriterier för en divisionsring och där multiplikationen är kommutativ. Exempel på kroppar är de reella talen, $\boldsymbol{R}$, och de komplexa talen, $\boldsymbol{C}$.

Hyperkomplexa tal är ett namn som ges åt utvidgningar av de komplexa talen och är tal med flera imaginära delar. Precis som man kan se de komplexa talen som punkter i ett plan, kan man se hyperkomplexa tal som punkter i Euklidiska rum med högre dimensioner. Exempel på hyperkomplexa tal är kvaternioner, $\boldsymbol{H}$, med dimension 4, oktonioner, $\boldsymbol{O}$, med dimension 8 och sedenioner, $\boldsymbol{S}$, med dimension 16. I detta sammanhang kan man också se de reella talen som hyperkomplexa tal med dimension 1 och de komplexa talen som hyperkomplexa tal med dimension 2. Alla hyperkomplexa tal med dimension större än 2 bryter mot en eller flera av villkoren som gäller för de reella talen (och som visades på sidan 4-5).

Kvaternionerna, $\boldsymbol{H}$, är alltså hyperkomplexa tal av dimension 4. Det finns två olika synsätt på dem, antingen ser man kvaternionerna som en reell algebra eller som en icke-kommutativ divisionsring. Vilket av dessa synsätt man väljer är helt en fråga av vilket sammanhang, eller kultur, man står i, eftersom kvaternioner är både en reell algebra och en icke-kommutativ divisionsring.

Geometriska aspekter

Följande framställning av de geometriska aspekterna är framförallt inspirerad av Kuipers.

Kvaternioner har den egenskapen att de är särskilt väl lämpade för rotationer i $\boldsymbol{R}^3$. Vid en första anblick låter detta inte möjligt eftersom kvaternionerna är fyrdimensionella och därmed lever i $\boldsymbol{R}^4$. Vi ska nu titta närmare på hur detta kan hänga ihop, och vi börjar med att konstatera att en rotationsoperator i kvaternionform måste ha vissa egenskaper för att fungera i $\boldsymbol{R}^3$. Dessa egenskaper bör vara att vi på något sätt kan stoppa in en vektor, $\vec{v} \in \boldsymbol{R}^3$ och få ut en roterad vektor, $\vec{w} \in \boldsymbol{R}^3$ där både normen hos vektorn och kryssprodukten av två vektorer är bevarad, det vill säga rotationen måste bevara längd, vinkel och orientering.

För att få enklare formler och beräkningar använder vi skrivsättet $q = q_0 + \vec{q}$ för kvaternioner där vi delar upp q i en reell del och en imaginär del, det vill säga $q_0 \in \boldsymbol{R}$ och $\vec{q} \in \boldsymbol{R}^3$. Problemet med att använda vektorer i $\boldsymbol{R}^3$ löser vi genom att som tidigare välja att se alla vektorer i det tredimensionella rummet som så kallade rent imaginära kvaternioner.

Vårt mål är nu att hitta denna rotationsoperator i kvaternionform och nå fram till en definition. Sedan vill vi verifiera att denna operator kan tolkas geometriskt som en rotation i $\boldsymbol{R}^3$.

Vi antar nu att en rotationsoperator i kvaternionform har samma form som den välkända rotationsmatrisens operator, det vill säga att man bara multiplicerar från vänster. Om detta antagande stämmer skulle det betyda att en kvaternion $q \in \boldsymbol{H}$ på något sätt representerar en rotation, och att vi kan finna bilden $\vec{w} \in \boldsymbol{R}^3$ av någon vektor $\vec{v} \in \boldsymbol{R}^3$, där vi ser $\boldsymbol{R}^3$ som $\boldsymbol{H}_{Im}$, genom att använda den enkla produktregeln $\vec{w} = q\vec{v}$. En sådan regel skulle givetvis både betyda att produkten av en kvaternion, q, och en vektor $\vec{v}$, alltid är definierad och att produkten alltid skulle vara en vektor i $\boldsymbol{H}_{Im}$. Vi undersöker detta.

Låt $\vec{v} \in \boldsymbol{R}^3$ ges av kvaternionen $v = 0 + \vec{v}$ i $\boldsymbol{H}_{Im}$. Givet någon kvaternion $q = q_0 + \vec{q} \in \boldsymbol{H}$ kan vi med hjälp av definitionen för kvaternionmultiplikation räkna

$$
\begin{aligned}
& q\vec{v} = (q_0 + \vec{q})(0 + \vec{v}) \\
& = q_0 \cdot 0 - \vec{q} \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{q} + q_0\vec{v} + \vec{q} \times \vec{v} \\
& = -\vec{q} \cdot \vec{v} + q_0\vec{v} + \vec{q} \times \vec{v}
\end{aligned}
$$

Men detta visar att resultatet generellt sett inte svarar mot en vektor i $\boldsymbol{H}_{Im}$ eftersom resultatet bara blir noll i specialfallet där $\vec{q}$ och $\vec{v}$ är ortogonala, det vill säga $\vec{q} \cdot \vec{v} = 0$. Liknande problem uppstår om vi multiplicerar från höger. Vi kan därför inte vänta oss att vår sökta rotationsoperator bara ska bestå av multiplikation med en enda kvaternion. Detta leder oss till antagandet att vår sökta operator består av minst två faktorer, det vill säga två kvaternioner. Förhoppningsvis är det då möjligt att säkerställa att resultatet av operationen alltid blir en vektor närhelst en vektor matas in i funktionen.

Vi antar då att vår sökta rotationsoperator består av multiplikation med två kvaternioner, säg q och p, där $q, p \in \boldsymbol{H}$, och låt en tredje kvaternion, säg v, där $v \in \boldsymbol{H}_{Im}$, motsvara någon vektor som vi vill rotera, vår variabel i funktionen. Då har vi sex möjliga produkter där dessa tre kvaternioner ingår, nämligen

pqv *pvq* *qvp* *qpv* *vpq* *vqp*

Vi vet att $\boldsymbol{H}$ är sluten under multiplikation, medan $\boldsymbol{H}_{Im}$ inte är det. Detta leder oss till att de trippelprodukter ovan som innehåller produkterna $pq, qp \in \boldsymbol{H}$ inte kommer att fungera eftersom vi just visat att en multiplikation från en sida inte fungerar som den rotationsoperator vi söker. De produkter som då återstår att undersöka är *pvq* och *qvp*. Eftersom q och p är godtyckliga kvaternioner behöver vi inte göra någon skillnad mellan dessa två, och vi nöjer oss med att undersöka om produkten *qvp* kan fungera som rotationsoperator.

Låt $q = q_0 + \vec{q}, p = p_0 + \vec{p}$ och $v = 0 + \vec{v}$. Då har vi med hjälp av vår definition av kvaternionprodukten att realdelen av *qvp* är

$$(qvp)_{Re} = -p_0(\vec{q} \cdot \vec{v}) - q_0(\vec{v} \cdot \vec{p}) - (\vec{q} \times \vec{v}) \cdot \vec{p}$$

Vi skriver om produkten med hjälp av reglerna för vektoralgebra och får

$$(qvp)_{Re} = -p_0(\vec{q} \cdot \vec{v}) - q_0(\vec{p} \cdot \vec{v}) + (\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \vec{v}$$

Nu påminner vi oss om att vår operator måste vara sådan att produkten alltid blir en rent imaginär kvaternion, representerande en vektor i $\boldsymbol{R}^3$, närhelst vi stoppar in en sådan. Realdelen av denna produkt måste följaktligen bli noll.

Antag att $p_0 = q_0$. Då kan vi skriva realdelen som

$(qvp)_{Re} = -q_0(\vec{q} + \vec{p}) \cdot \vec{v} + (\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \vec{v}$

Då har vi att $(qvp)_{Re} = 0$ om $\vec{p} = -\vec{q}$. Detta betyder helt enkelt att

$p = p_0 + \vec{p} = q_0 - \vec{q} = q^*$

Härav följer att vi nu har en kvaternionprodukt som producerar en rent imaginär kvaternion när variabeln $v \in \boldsymbol{H}_{Im}$ nämligen qvq^*. Låt nu den ursprungliga vektorn som skall roteras vara $\vec{v}$, då har vi en möjlig trippelfunktion för en rotationsoperator i kvaternionform nämligen

$$\boxed{\vec{w} = q\vec{v}q^*}$$

Vi har nu funnit en funktion som kan hantera vektorer i $\boldsymbol{H}$ och som tar en vektor till en vektor. Nu vill vi säkerställa att denna funktion inte ändrar längden på den vektor den appliceras på. Detta är en nödvändighet för att vara en lämplig rotationsoperator eftersom längden av en vektor i $\boldsymbol{R}^3$ inte förändras vid en rotation.

Sats
Om q är en enhetskvaternion bevarar funktionen $\vec{v} \to q\vec{v}q^*$ längden hos den ingående vektorn, $\vec{v}$.

Bevis
$\|\vec{w}\| = \|q\vec{v}q^*\| = \|q\|\|\vec{v}\|\|q^*\| = 1 \cdot \|\vec{v}\| \cdot 1 = \|\vec{v}\|$

Om denna funktion skall kunna användas som rotationsoperator vill vi också kunna associera en vinkel med en kvaternion. Låt q vara en godtycklig enhetskvaternion, det vill säga $q_0^2 + \|\vec{q}\|^2 = 1$. Dessutom vet vi att för varje vinkel θ är $\cos\theta^2 + \sin\theta^2 = 1$. Då har vi att det måste finnas en vinkel så att

$$\cos\theta = q_0 \text{ och}$$
$$\sin\theta = \|\vec{q}\|$$

Denna vinkel kan vara unikt bestämd om vi väljer ett lämpligt intervall. I allmänhet vill vi att θ uppfyller kravet $-\pi < \theta \leq \pi$. På så sätt har vi nu en vinkel, θ som vi kan associera med en kvaternion, q. Nu definierar vi en enhetsvektor, $\vec{u}$, vilken representerar riktningen av $\vec{q} \in \boldsymbol{H}_{Im}$ genom att skriva

$$\vec{u} = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \leftrightarrow \vec{q} = \vec{u}\|\vec{q}\| = \vec{u}\sin\theta \text{, om } \|\vec{q}\| \neq 0$$

$\vec{u}$ definieras alltså av $\vec{q} = \vec{u}\sin\theta$ om $\sin\theta \neq 0$, och om $\sin\theta = 0$, sätt $\vec{u}$ lika med säg i eftersom det vid rotation med vinkeln 0 inte har någon betydelse vad $\vec{u}$ är. Därför skulle vi i detta fall också kunna skriva $\vec{u} = j$ eller k (eller något annat).

Då kan vi skriva en enhetskvaternionen q i termer av vinkeln θ och enhetsvektorn $\vec{u}$ som

$$q = q_0 + \vec{q} = \cos\theta + \vec{u}\sin\theta$$

För att undersöka vidare vilken exakt geometrisk mening vinkeln θ och vektorn $\vec{u}$ har i uttrycket $q = \cos\theta + \vec{u}\sin\theta$ och vilken påverkan kvaternionfunktionen och dess ingående parametrar har på vektorn $\vec{v}$ använder vi oss av ett exempel.

Låt kvaternionens vinkel $\theta = \frac{\pi}{6}$ och som vektor associerad med kvaternionen använder vi standardvektorn k. Då kan vi skriva

$$q = \cos\theta + k\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}k$$

Vi tillämpar vidare operatorn $\vec{v} \to q\vec{v}q^*$ på standardvektorn $\vec{v} = \vec{\imath}$. Vi har då

$$\begin{aligned}
&\vec{w} = q\vec{v}q^* \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}k\right)(0 + i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}k\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}k\right) \\
&= \frac{3}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}j + \frac{\sqrt{3}}{4}j - \frac{1}{4}i \\
&= \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j
\end{aligned}$$

Återigen har vi en rent imaginär kvaternion precis som väntat. Rotation har alltså skett runt $\vec{u}$-axeln och vinkeln associerad med denna rotation är $\frac{\pi}{3}$ ty $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ och $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Detta är dubbla ingående vinkeln, $2\theta = 2\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Vi kan då i fallet $\theta = \frac{\pi}{6}$ skriva resultatet som

$$\vec{w} = i\cos 2\theta + j\sin 2\theta$$

Detta exempel bekräftar återigen att operatorn $q\vec{v}q^*$ verkligen är en rotationsoperator i $\boldsymbol{R}^3$, där rotationens vinkel är dubbla vinkeln som är associerad med kvaternionen q och vi vill visa att detta gäller även för en godtycklig vinkel θ. För att göra detta använder vi oss av trippelvektorprodukten.

Lemma

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$$
$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\vec{a} \qquad \text{där } \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \boldsymbol{R}^3$$

Låt $q = q_0 + \vec{q}$ och $\vec{v} = 0 + \vec{v}$ där $\vec{v} \in \boldsymbol{H}_{Im}$. Räkningar visar att

$$\begin{aligned}
&\vec{w} = q\vec{v}q^* = (q_0 + \vec{q})(0 + \vec{v})(q_0 - \vec{q}) \\
&= (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{v} + 2(\vec{q} \cdot \vec{v})\vec{q} + 2q_0(\vec{q} \times \vec{v})
\end{aligned}$$

Här har vi använt ovanstående lemma och det faktum att $(\vec{q} \times \vec{v}) \cdot \vec{q} = 0$.

Definition
Rotationsoperatorn definierar vi nu genom $K_q(\vec{v}) = q\vec{v}q^*$ där $q \in \boldsymbol{H}$, för $\vec{v} \in \boldsymbol{H}_{Im}$

Det vill säga

$$\boxed{K_q(\vec{v}) = (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{v} + 2(\vec{q} \cdot \vec{v})\vec{q} + 2q_0(\vec{q} \times \vec{v})}$$

Nu vill vi bevisa att operatorn $K_q$verkligen representerar en rotation i $\boldsymbol{R}^3$ och att rotationsvinkeln är dubbla vinkeln kopplad till kvaternionen q. Vi börjar med att visa att vår operator är en linjär funktion.

Sats
$K_q(\vec{v}) = q\vec{v}q^*$ är en linjär funktion, det vill säga $K_q\left(s\vec{a} + \vec{b}\right) = sK_q(\vec{a}) + K_q\left(\vec{b}\right)$, där $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{H}_{Im}$ och $s \in \boldsymbol{R}$.

Bevis
$K_q\left(s\vec{a} + \vec{b}\right) = q(s\vec{a} + \vec{b})q^*$
$= (sq\vec{a} + q\vec{b})q^*$
$= sq\vec{a}q^* + q\vec{b}q^*$
$= sK_q(\vec{a}) + K_q(\vec{b})$

Som vi konstaterat förut är längden av en vektor bevarad under kvaternionfunktionen, $\left\|K_q(\vec{v})\right\| = \|\vec{v}\|$. Denna egenskap är, som vi också sagt förut, nödvändig om funktionen skall beskriva en rotation.

Vi påminner oss om att för varje enhetskvaternion, med längd 1, kan vi, för någon vinkel θ, skriva

$$q = q_0 + \vec{q} = \cos\theta + \vec{u}\sin\theta$$

Där $\vec{u}$ är en enhetsvektor.

Givet en vektor $\vec{v} \in \boldsymbol{R}^3$ delar vi $\vec{v}$ i två ortogonala delar och skriver om $\vec{v}$ på formen
$\vec{v} = \vec{a} + \vec{n}$ där $\vec{a}$ är komponenten längs med vektorn $\vec{u}$ och $\vec{n}$ är komponenten vinkelrät mot vektorn $\vec{u}$ och $\vec{n}, \vec{a} \in \boldsymbol{H}_{Im}$. Vi vill nu visa att rotationsoperatorn K_q lämnar den första komponenten, $\vec{a}$ opåverkad, medan den andra komponenten $\vec{n}$ roteras kring $\vec{u}$ med vinkeln 2θ, där θ är vinkeln associerad med q. Detta visar att K_q är en rotation runt $\vec{u}$ med vinkel 2θ.

Eftersom vektorn $\vec{a}$ ligger längs med vektorn $\vec{u}$, är $\vec{a}$ helt enkelt en skalär multipel av $\vec{u}$ så att $\vec{a} = s\vec{u}$ där $s \in \boldsymbol{R}$. Med hjälp av vår definition av rotationsoperatorn $K_q(\vec{v})$ kan vi nu skriva

$$K_q(\vec{a}) = K_q(s\vec{u}) = sK_q(\vec{u}) = s(q\vec{u}q^*) = (\cos\theta + \vec{u}\sin\theta)\vec{u}(\cos\theta - \vec{u}\sin\theta) = s\vec{u} = \vec{a}$$

Och vi har visat att $\vec{a}$ är bevarad.

Vi vill nu visa att K_q roterar komponenten $\vec{n}$ med vinkeln 2θ runt $\vec{u}$ som axel. Med hjälp av vår definition av rotationsoperatorn, där vi byter ut $\vec{v}$ mot $\vec{n}$, kan vi skriva

$K_q(\vec{n}) = (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{n} + 2(\vec{q}\cdot\vec{n})\vec{q} + 2q_0(\vec{q}\times\vec{n})$
$= (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{n} + 2q_0(\vec{q}\times\vec{n})$
$= (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{n} + 2q_0\|\vec{q}\|(\vec{u}\times\vec{n})$

Här har vi använt att $\vec{u} = \frac{q}{\|\vec{q}\|}$ om $\|\vec{q}\| \neq 0$, samt att $\vec{q}\cdot\vec{u} = 0$ då $\vec{n}$ är ortogonal mot $\vec{u}$.

Låt $\vec{u}\times\vec{n} = \vec{n}_\perp$ då kan vi skriva om ekvationen som

$K_q(\vec{n}) = (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{n} + 2q_0\|\vec{q}\|\vec{n}_\perp$

Nästa steg är nu att visa att $\vec{n}$ och $\vec{n}_\perp$ har exakt samma längd. Först noterar vi att vinkeln mellan $\vec{n}$ och $\vec{n}_\perp$ är $\frac{\pi}{2}$, och eftersom $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ kan vi skriva

$$\|\overrightarrow{n_\perp}\| = \|\vec{n}\times\vec{u}\| = \|\vec{n}\|\|\vec{u}\|\sin\frac{\pi}{2} = \|\vec{n}\|$$

Slutligen kan vi, om vi utnyttjar att $q = \cos\theta + \vec{u}\sin\theta\,, -\pi < \theta \leq \pi,$ har vi $q_0 = \cos\theta$ och $\|\vec{q}\| = \sin\theta$, och skriva $K_q(\vec{n})$ som

$K_q(\vec{n}) = (\cos\theta^2 - \sin\theta^2)\vec{n} + (2\cos\theta\sin\theta)\overrightarrow{n_\perp}$
$= \cos 2\theta\,\vec{n} + \sin 2\theta\,\overrightarrow{n_\perp}$

Vi har nu visat att

$\vec{w} = q\vec{v}q^* = K_q(\vec{v}) = K_q(\vec{a}+\vec{n}) = K_q(\vec{a}) + K_q(\vec{n}) = \vec{a} + \vec{m}$

där $\vec{m} = K_q(\vec{n}) = \cos 2\theta\,\vec{n} + \sin 2\theta\,\overrightarrow{n_\perp}$

Härav följer att $\vec{m}$ är resultatet av en rotation av $\vec{n}$ under vinkeln 2θ. Eftersom $\vec{w} = \vec{a} + \vec{m}$ följer att $\vec{w} = q\vec{v}q^*$ kan ses som vektorn $\vec{v}$ roterad vinkeln 2θ runt $\vec{u}$ som axel.

Således har vi nu bevisat följande [Kuipers]

Sats
För varje enhetskvaternion, $q = q_0 + \vec{q} = \cos\theta + \vec{u}\sin\theta$ och för varje vektor $\vec{v} \in \boldsymbol{H}_{Im}$ är funktionen $K_q(\vec{v}) = q\vec{v}q^*$ på $\vec{v}$ en rotation av vektorn $\vec{v}$ med vinkeln 2θ runt $\vec{u}$ som rotationsaxel.

Sats
Om vi multiplicerar två godtyckliga kvaternioner, säg p och q, som båda har samma vektor $\vec{u}$, då är produkten en kvaternion, r, vilken också har samma vektor $\vec{u}$. Vidare är vinkeln associerad med produkten summan av vinklarna som är associerad med faktorerna, det vill säga $p = \cos\alpha + \vec{u}\sin\alpha$ och $q = \cos\beta + \vec{u}\sin\beta$ ger $pq = \cos(\alpha+\beta) + \vec{u}\sin(\alpha+\beta)$.

Bevis
Låt $p = \cos\alpha + \vec{u}\sin\alpha$ och $q = \cos\beta + \vec{u}\sin\beta$. Då har vi, med hjälp av regeln för kvaternionprodukten, att

$pq = (\cos\alpha + \vec{u}\sin\alpha)(\cos\beta + \vec{u}\sin\beta)$
$= \cos\alpha\cos\beta - (\vec{u}\sin\alpha)\cdot(\vec{u}\sin\beta) + \cos\alpha\,(\vec{u}\sin\beta) + \cos\beta\,(\vec{u}\sin\alpha) + \vec{u}\sin\alpha \times \vec{u}\sin\beta$
$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \vec{u}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$
$= \cos(\alpha+\beta) + \vec{u}\sin(\alpha+\beta)$

Detta är exakt vad vi förväntar oss eftersom kvaternioner på något sätt representerar rotationer, och $K_{pq}(\vec{v}) = (pq)\vec{v}(pq)^* = p(q\vec{v}q^*)p^* = K_p\left(K_q(\vec{v})\right)$. Det vill säga K_{pq} är sammansättningen av K_p och K_q, och två rotationer runt samma axel är en rotation runt den axeln med summan av vinklarna. Dessutom talar det faktum att också vektorn $\vec{u}$ dyker upp igen i kvaternionprodukten, för att den på något sätt är inblandad i operatorns verkan på vektorn $\vec{v}$.

I många tillämpningar är det nödvändigt med serier av rotationer och då kan man sätta samman en serie av rotationsoperatorer. Beviset och exempel på detta är dock något som går utanför detta arbetes ram. Dock visar det ovanstående beviset av att pq är en rotation med vinkel $(\alpha+\beta)$, att om man sätter ihop K_p och K_q så får man en rotation med den vinkeln, i specialfallet där p och q har samma $\vec{u}$-vektor. Eftersom sammansatta rotationer ges av produkter av enhetskvaternioner så ger kvaternionerna en enkel och effektiv metod att studera dessa.

Kvaternioner har på senare tid kommit till användning i samband med exempelvis datorgrafik och styrning av robotar. Om man till exempel vill få en robot att rotera sin arm från en position till en annan behöver man finna rotationen mellan två punkter i rummet och att göra detta med hjälp av kvaternioner är väldigt enkelt. Det är också vanligt att man använder kvaternionrotationer i både militära och kommersiella flygsimulatorer.

I moderna dataspel används också kvaternioner i moduler, så kallade fysikmotorer, vilka används för att få föremål som interagerar att röra sig på ett naturligt sätt. De får saker att välta, falla, studsa och rotera som i verkligheten. Här utgör kvaternionerna ett överlägset verktyg som ger snabba och effektiva beräkningar. Särskilt i dataspel med tredjepersonsperspektiv kan kvaternioner användas för att styra kameran genom vilken spelaren ser spelkaraktären. Kvaternioner ger mjuka rotationer och spelet Tomb Raider från 1996 var ett av de första större kommersiella spelen som använde denna teknik. [Bobick]

En stor fördel med att använda just kvaternioner vid rotationer är att man undviker ett fenomen kallat ”gimbal lock”. Detta är något som inträffar när en serie av rotationer i 90º utförs. Plötsligt äger inte rotationen rum på grund av att axlarna placerar sig på en rät linje och så att säga motsvarar samma rörelse, en frihetsgrad går förlorad. Inträffar detta till exempel i ett styrsystem för flygplan skulle det kunna få katastrofala följder. Men detta undviks alltså om man använder kvaternioner vid rotationer.

Absolutbeloppsalgebror

En egenskap hos $\boldsymbol{H}$ är att de är en absolutbeloppsalgebra. En absolutbeloppsalgebra är en reell nollskild algebra [se tidigare definition] med en norm [se tidigare definition] som är multiplikativ, $\|x\cdot y\| = \|x\|\cdot\|y\|$ för alla x och y hos algebran. Det finns endast ändligtdimensionella absolutbeloppsalgebror av dimension 1, 2, 4 och 8 [Albert], exempelvis de reella talen, $\boldsymbol{R}$, de komplexa talen, $\boldsymbol{C}$, kvaternionerna, $\boldsymbol{H}$ och oktonionerna $\boldsymbol{O}$.

Isomorfi
Ett generellt mål är att förklara strukturen hos alla absolutbeloppsalgebror, A_d där $d \in \{1,2,4,8\}$, upp till isomorfi.

Definition
Två algebror, A och B, är isomorfa om det finns en funktion $f: A \to B$ så att $f(x+y) = f(x) + f(y)$ för alla $x, y \in A$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ för alla $\alpha \in \boldsymbol{R}, x \in A$ och $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ för alla $x, y \in A$. Funktionen skall dessutom vara bijektiv. En sådan funktion, *f*, kallas isomorfism.

Att två algebror är isomorfa betyder alltså att de är ekvivalenta då de får liknande algebraiska egenskaper. Det finns bara en endimensionell absolutbeloppsalgebra upp till isomorfi, nämligen de reella talen, $\boldsymbol{R}$. Nu undersöker vi hur det är med absolutbeloppsalgebror av dimension två och fyra.

Tvådimensionella absolutbeloppsalgebror
I två dimensioner är det möjligt att lista alla absolutbeloppsalgebror som finns upp till isomorfi. Klassificering är en listning upp till isomorfi. Den klassificeringen består av fyra algebror, $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}^*$, ${}^*\boldsymbol{C}$ och $\dot{\boldsymbol{C}}$ [Ramirez] och de definieras av de olika multiplikationerna

$$\boldsymbol{C} \text{ med multiplikationen } xy$$
$$\boldsymbol{C}^* \text{ med multiplikationen } xy^*$$
$${}^*\boldsymbol{C} \text{ med multiplikationen } x^*y$$
$$\dot{\boldsymbol{C}} \text{med multiplikationen } x^*y^*$$

där $x, y \in \boldsymbol{C}$ och multiplikationen som används är multiplikation i $\boldsymbol{C}$. Ett exempel på en multiplikation i $\boldsymbol{C}^*$ där $x = 1 + i$ och $y = 1 + 2i$ ser ut som följer $(1+i)°(1+2i) = (1+i) \cdot (1-2i)$ där ° är multiplikation i $\boldsymbol{C}^*$ och den senare är multiplikation i $\boldsymbol{C}$.

Fyrdimensionella absolutbeloppsalgebror
De fyrdimensionella absolutbeloppsalgebrorna har alla sin grund i kvaternionerna, $\boldsymbol{H}$. Några absolutbeloppsalgebror av dimension fyra ges nämligen av

$$\boldsymbol{H} \text{ med multiplikationen } xy$$
$$\boldsymbol{H}^* \text{ med multiplikationen } xy^*$$
$${}^*\boldsymbol{H} \text{ med multiplikationen } x^*y$$
$$\dot{\boldsymbol{H}} \text{med multiplikationen } x^*y^*$$

Men medan de tvådimensionella absolutbeloppsalgebrorna upp till isomorfi är fyra är de fyrdimensionella oändligt många. Relaterade till var och en av de fyra ovanstående olika algebrorna finns i sin tur oändligt många algebror. Dessa ges, upp till isomorfi, av

$\boldsymbol{H}(a,b), \boldsymbol{H}^*(a,b)$, ${}^*\boldsymbol{H}(a,b)$ och $\dot{\boldsymbol{H}}(a,b)$ där $a, b \in \boldsymbol{H}, \|a\| = \|b\| = 1$. [Ramirez]

Multiplikationen som används här är kvaternionmultiplikation och vi börjar med att titta på hur multiplikationen inom de fyra olika klasserna går till.

$$\boldsymbol{H}(a,b) \text{ges multiplikationen av } axyb$$
$$\boldsymbol{H}^*(a,b) \text{ges multiplikationen av } axby^*$$
$${}^*\boldsymbol{H}(a,b) \text{ges multiplikationen av } x^*ayb$$
$$\dot{\boldsymbol{H}}(a,b) \text{ges multiplikationen av } ax^*y^*b$$

Dessa algebror är inte associativa och vi gör ett exempel på detta i $\boldsymbol{H}(a,b)$, där $x,y,z \in \boldsymbol{H}$ och jämför produkterna

$$(x^\circ y)^\circ z = axyb^\circ z = aaxybzb$$
$$x^\circ(y^\circ z) = x^\circ ayzb = axayzbb$$

Låt a och b vara två enhetskvaternioner, säg $a = i$ och $b = j$ och låt $x = 2 + k, y = 1 + 2j$ och $z = 1 + 2i$. Då har vi att

$$\begin{aligned}(x^\circ y)^\circ z &= \big((2+k)^\circ(1+2j)\big)^\circ(1+2i) = i(2+k)(1+2j)j^\circ(1+2i)\\ &= ii(2+k)(1+2j)j(1+2i)j = (-1)(2+k)(1+2j)j(1+2i)j\\ &= (-2-k)(1+2j)j(1+2i)j = (-2-4j-k+2i)j(1+2i)j\\ &= (-2j+4+i+2k)(1+2i)j = (-2j+4+i+2k+4k+8i-2+4j)j\\ &= (2+9i+2j+6k)j = (2j+9k-2-6i) = -2-6i+2j+9k\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}x^\circ(y^\circ z) &= (2+k)^\circ\big((1+2j)^\circ(1+2i)\big) = (2+k)^\circ i(1+2j)(1+2i)j\\ &= i(2+k)i(1+2j)(1+2i)jj = (2i-j)i(1+2j)(1+2i)jj\\ &= (-2+k)(1+2j)(1+2i)jj = (-2-4j+k-2i)(1+2i)jj\\ &= (-2-4j+k-2i-4i+8k+2j+4)jj = (2-6i-2j+9k)jj\\ &= (2j-6k+2-9i)j = (-2+6i+2j-9k) = -2+6i+2j-9k\end{aligned}$$

Då har vi att

$$(x^\circ y)^\circ z = -2-6i+2j+9k \neq -2+6i+2j-9k = x^\circ(y^\circ z)$$

Slutsats

Vi har nu fått en liten överblick över kvaternionerna dels rent historiskt och dels hur de fungerar med dess algebraiska egenskaper och det faktum att kvaternionerna är särskilt väl lämpade för rotationer i $\boldsymbol{R}^3$ eftersom vektorer i det tredimensionella rummet kan bäddas in som så kallade rent imaginära kvaternioner. Genom detta har man funnit användningsområden för kvaternionerna inom datorgrafik, styrning av robotar och i flygsimulatorer där en stor fördel är att det så kallade ”gimbal lock” inte alls inträffar när man genomför rotationer med hjälp av kvaternioner. Vi har också sett generalisering av kvaternionerna, nämligen absolutbeloppsalgebror. Absolutbeloppsalgebror är ett aktivt forskningsområde både internationellt och här vid Uppsala Universitet.

Referenser

Albert, A A *"Absolute valued real algebras*" Annals of Mathematics, April 1947, pp. 495-501

Bobick, Nick *"Rotating objects using quaternions"*, Game Developer, February 1998

Crowe, Michael J (1994) *"A history of vector analysis"* Dover Publications Inc., New York

Ewes, Howard (1990) *"An introduction to the history of mathematics"* Saunders College Publishing, Philadelphia

Kuipers, Jack B (1999) *"Quaternions and rotation sequences: a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality"* Princeton University Press, Princeton

O'Donnell, Seán (1983) *"William Rowan Hamilton"* Boole Press Limited, Dublin

Ramírez Álvarez, Maribel (1999) *"On four-dimensional absolute-valued algebras"* I "Proceedings of the international conference on Jordan structures" (Malaga, 1997), Univ. Málaga, Málaga, pp. 169-173