UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2013:14

Hurwitz 1, 2, 4, 8-sats

Anton Kronosjö

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare och examinator: Seidon Alsaody
Juni 2013

Department of Mathematics
Uppsala University

Anton Kronosjö, 910427-4890
Examensarbete C: Hurwitz 1, 2, 4, 8-sats
VT13

Sammanfattning (Abstract)

Det finns ett starkt samband mellan Hurwitz berömda sats, den så kallade 1-, 2-, 4-, 8-satsen som handlar om produkten av två summor av kvadrater, och absolutbeloppsalgebror. I korta drag så innebär satsen att ändligtdimensionella absolutbeloppsalgebror med en norm som ges av en skalärprodukt endast existerar i dimensionerna 1, 2, 4 och 8. Det är precis detta samband som detta arbete berör. Dessutom så undersöks också vad det egentligen är som händer när en absolutbeloppsalgebra försöks skapas i annan dimension än någon av de ovan nämnda.

Anton Kronosjö, 910427-4890
Examensarbete C: Hurwitz 1, 2, 4, 8-sats
VT13

1 Introduktion

Att matematik har en stark anknytning till tal är det ingen tvekan om. När matematik för första gången introduceras för en individ så brukar vanligen endast de positiva heltalen att beröras (de *naturliga talen*). Successivt så låts denna nya kunskap att sjunka in för den matematikstuderande. Efter de naturliga talen så berörs *heltalen,* som är både negativa och positiva heltal. Många upplever svårigheter när de *rationella talen* involveras, d.v.s. tal skrivna på bråkform. Efter de rationella talen så berörs de *irrationella talen,* vilket kort och gott kan beskrivas som tal med en oändlig decimalutveckling som dessutom saknar period. Med en decimalutveckling som saknar period så menas att decimalutvecklingen ständigt förändras och inte följer något mönster. Det faktum att samtliga ovanstående talmängder är en delmängd av de *reella talen* gör att det endast är reella tal som berörs under de första skolåren. Till följd av detta så associeras vardagsbegreppet ”tal” oftast med just reella tal. Något som många inte vet är att det finns betydligt fler talsystem där tal representeras på ett helt annat sätt. Dock så fyller dessa talsystem inte någon direkt funktion i vardagen och hamnar därmed lite i skymundan. Innan vi går in djupare på hur just dessa talsystem kan se ut så ges en lite djupare bild av vad reella tal faktiskt är.

De reella talen kan beskrivas som samtliga punkter på en kontinuerlig linje, d.v.s. en linje som ständigt hänger samman. Denna linje var något som de antika grekerna kallade för *den reella tallinjen,* och det är den vanligaste metoden att visualisera de reella talen geometriskt. I detta, endimensionella, talsystem finns det något som benämns som *absolutbelopp* och definitionen på detta lyder som följande:

Definition 1: Norm (Absolutbelopp)

En norm på ett reellt vektorrum *V* är en funktion $V \to \mathbb{R}, x \to ||x||$ som uppfyller:

$$||x|| \geqslant 0 \text{ och } ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall x \in V$$

$$||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x|| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V$$

$$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in V$$

Exempel 1: Ett exempel på en norm är den *Euklidiska normen* som också är den absolut vanligaste normen. Den beräknas på följande sätt: $||x_{1,}\ldots, x_n|| = \sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}$.

Bland de reella talen så är avståndet mellan två givna tal, *a* och *b*, absolutbeloppet av talens differens v.s. $||a-b||$. Det faktum att $||ab|| = ||a|| \cdot ||b||$ är en egenskap som har en stor betydelse i denna uppsats. Detta kommer att återknytas till senare.

En annan viktig aspekt, när det kommer till just normer i detta arbete, är deras relation med *skalärprodukter* som definieras nedan.

Definition 2: Skalärprodukt

En skalärprodukt på ett reellt vektorrum *V* är en funktion $VxV \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \cdot y$, som uppfyller:

$$(ax+by)\cdot z = a(x\cdot z)+b(y\cdot z) \qquad z\cdot(ax+by)=a(z\cdot x)+b(z\cdot y)$$
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, x, y, z \in V$$

$$(x\cdot y)=(y\cdot x) \qquad \forall\, x, y \in V$$

$$x\cdot x \geqslant 0 \quad \text{och} \quad x\cdot x \Leftrightarrow 0 \qquad \forall\, x \in V$$

Den skalärprodukt som vanligen används är följande:

$$a\cdot b=\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \quad , \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^n$$

I denna uppsats så kommer det huvudsakligen att fokuseras på normer som kommer från en skalärprodukt. Ett exempel på detta är $||x||=\sqrt{x\cdot x}$.

Problematiken med de reella talen är att de saknar lösning till ekvationen $x^2+1=0$. Rotutdragning ur negativa tal är inte definierat bland de reella talen därför tillkom de *komplexa talen.* Komplexa tal skrivs på formen $a+bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$. Den första variabeln, a , är talets realdel och den andra variabeln, *b*, är talets imaginärdel. Givet är likaså att $i^2=-1$. Rent geometriskt så kan komplexa tal visualiseras som punkter i ett plan. Detta medför att de komplexa talens talmängd har två dimensioner, till skillnad från de reella talens, som endast har en dimension.

Att gå från endimensionella talsystem till tvådimensionella visade sig, i och med de komplexa talen, att vara fullt möjligt. Men finns det talsystem i fler dimensioner än en och två? Detta var en fråga som intresserade den irländske matematikern William Rowan Hamilton som var aktiv under mitten av 1800-talet. När det kommer till just komplexa tal $a+bi$ så visade Hamilton att det logiskt sett är samma sak som att utföra operationer på ordnade par (a, b) av reella tal, dock med specifika förutbestämda räkneregler. Det var detta som kom att bli kärnan i hans intresse i frågan om huruvida den geometriska tolkningen av addition, och speciellt multiplikation, i $\mathbb{R}^2$ -planet kan ha en analog i ett tredimensionellt rum, $\mathbb{R}^3$ via *hyperkomplexa tal* (d.v.s. tal med fler än en imaginärdel). Hamilton hade, efter denna upptäckt, hoppats på att hitta ett sätt att multiplicera ihop reella tripletter med rätt egenskaper. Inledningsvis så försökte Hamilton att utföra detta och han började med att experimentera med tal skrivna på formen:

$$a+bi+cj \quad \text{, där} \quad i^2=j^2=-1 \quad \text{och} \quad a,b,c\in\mathbb{R} \quad .$$

Dessvärre så lyckades inte Hamilton med detta, men däremot så fungerade det hela om han, med hjälp av ytterligare en imaginärdel *k*, hoppade upp till en fjärde dimension. Det Hamilton hade upptäckt var en helt nytt talsystem i $\mathbb{R}^4$ som fick namnet *kvaternioner*[2]. Kvaternioner skrivs på formen:

$$a+bi+cj+dk \quad \text{där} \quad i^2=j^2=k^2=ijk=-1 \quad \text{och} \quad a,b,c,d\in\mathbb{R} \quad .$$

Hamiltons skapande av ett nytt, hyperkomplext, talsystem ledde till en hel del nytänkande. Dåtidens matematiker insåg nu att de, genom att överge den så kallade "vague principle of permanence", kunde skapa nya talsystem som var ännu längre från de reella talen än både de komplexa talen och kvaternionerna. Bara två månader efter att Hamilton upptäckt kvaternionerna så gjorde den irländske matematikern John Thomas Graves en ny upptäckt[2]. Han hade hittat ett åttadimensionell talsystem i $\mathbb{R}^8$, oktonionerna.

Efter att Graves hade upptäckt oktonionerna var naturligtvis intresset stort för att hitta talsystem i ännu fler dimensioner. Dock är det en sak som måste klargöras här. Tidigare i inledningen så nämndes det att en viktig egenskap inom $\mathbb{R}$ var att normen var multiplikativ, d.v.s. att $||ab||=||a||\cdot||b||$ gäller. Faktum är att denna egenskap likaså gäller för de komplexa talen, kvaternionerna och oktonionerna. Det är nämligen så att det ställs en hel del krav på dessa talsystem som dåtidens matematiker var så ivriga att finna. Faktiskt var det så att det var *absolutbeloppsalgebror* som eftersöktes. För att få en vidare bild för vad en absolutbeloppsalgebra egentligen är så bör inledningsvis en förståelse för vad begreppet *bilinjär* innebär att uppnås.

Definition 3: Bilinjär

En avbildning $f : V \times W \to U$ där *U*, *V*, *W* är reella vektorrum sägs vara bilinjär om:

$$f(v+v', w) = f(v, w) + f(v', w)$$

$$f(v, w+w') = f(v, w) + f(v, w')$$

$$f(av, w) = af(v, w)$$

$$f(v, aw) = af(v, w)$$

För alla $v, v' \in V, w, w' \in W, a \in \mathbb{R}$

Exempel 2: Många funktioner är exempel på något som kan vara bilinjärt. Exempelvis funktionen $f(x, y) = xy$ är en bilinjär funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$ eftersom den är linjär i *x* om *y* fixeras och på samma sätt linjär i *y* om x fixeras. Kort och gott så kan en bilinjär funktion beskrivas som en funktion som är linjär i varje variabel var för sig.

För att ytterligare närma sig förståelsen för vad en absolutbeloppsalgebra egentligen är så går vi vidare med att definiera begreppet *algebra*.

Definition 4: Algebra

Ett vektorrum *V* över $\mathbb{R}$ med en multiplikation $V \times V \to V, (x, y) \to xy$ är en algebra över $\mathbb{R}$ om följande gäller:

$$(\alpha x + \beta y) z = \alpha(xz) + \beta(yz)$$

$$x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz)$$

För alla $x, y, z \in V$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Kort och gott kan en algebra alltså beskrivas som ett reellt vektorrum med en bilinjär multiplikation. Men vad är då en absolutbeloppsalgebra?

Definition 5: Absolutbeloppsalgebra

En reell, nollskild, algebra *A* är en absolutbeloppsalgebra om *A* har en multiplikativ norm.

Anmärkning 1: En norm är multiplikativ om $||a|| * ||b|| = ||ab||$ gäller.

Det är alltså dessa krav som ställs på absolutbeloppsalgebror. Så det är alltså inte vilka talsystem som helst som eftersöktes. Men hur är det då med dessa absolutbeloppsalgebror? Existerar det fler än de som ovan nämnts? Svart är nej. Detta bevisades delvis av den tyske matematikern Adolf Hurwitz via den så kallade 1, 2, 4, 8-satsen. Den påvisar just att absolutbeloppsalgebror med en norm som kommer från en skalärprodukt endast existerar i dimensionerna 1, 2, 4 och 8. Innan vi går in på den ovan nämnda satsen så konstateras att problematiken som uppstår när antalet dimensioner ökar är att en eller flera egenskaper hos algebran måste ges efter. Vid övergången från de reella talen till de komplexa talen så försvinner talens totala ordning.

Definition 6: Totalt ordnad mängd

En mängd *A* med ordningsrelation är totalt ordnad om följande gäller:

Givet två godtyckligt valda element *x* och *y* ur mängden *A* gäller något av följande:

$$x<y \quad , \quad x=y \quad , \quad y<x \quad .$$

Exempel 3: De reella talen, $\mathbb{R}$, är en totalt ordnad mängd eftersom två godtyckligt valda element bland de reella talen alltid är jämförbara med varandra.

När antalet dimensioner därefter dubblas, och en övergång till kvaternioner på så vis sker, så är multiplikationen inte längre *kommutativ*. Kommutativitet hänvisar till en egenskap hos en operation. Är en operation kommutativ så gäller följande:

Definition 7: Kommutativitet

En operation Φ på en mängd *A* är kommutativ om $x\Phi\, y=y\Phi\, x$ för alla $x, y\in A$.

Exempel 4: En kommutativ operation är * (multiplikation) på mängden $\mathbb{R}$. Den är kommutativ eftersom $x*y=y*x$ för alla $x, y\in\mathbb{R}$. Detta gäller även för multiplikation med komplexa tal.

Fördubblas därefter antalet dimensioner ännu en gång så sker övergången denna gång till oktonionerna. I denna absolutbeloppsalgebra så är multiplikation inte längre *associativ.* Likaså associativitet hänvisar till en egenskap hos operationer. Är en operation associativ så gäller följande:

Definition 8: Associativitet

En operation Φ på en mängd *A* är associativ om $(x\Phi y)\Phi z = x\Phi(y\Phi z)$ för alla $x, y, z \in A$.

Kontentan är alltså att ordningen som operationerna utförs på inte spelar någon roll. De algebror som skulle uppnås om antalet dimensioner inte antar värdet 1, 2, 4 eller 8 skulle få väldigt annorlunda egenskaper. Exempelvis att $\|ab\| \neq \|a\| \cdot \|b\|$ som ju motstrider definitionen av en absolutbeloppsalgebra. En annan sak som också skulle kunna inträffa är att $ab=0$ trots att $a, b \neq 0$ och detta motstrider de egenskaper som en absolutbeloppsalgebra skall a.

Det är precis detta faktum, att absolutbeloppsalgebror endast existerar i dimensionerna 1, 2, 4 och 8 som denna uppsats skall handla om. Vad är det egentligen som händer om när en absolutbeloppsalgebra försöks att skapas i en annan dimension än någon av dessa? Vad är det som går snett? Varför är inte multiplikation möjligt då? Dessa frågor kommer att besvaras och arbetstillvägagångssättet kommer huvudsakligen att ske via Hurwitz 1, 2, 4, 8-sats.

2 Syfte

Syftet med denna uppsats är att få en insikt i följande faktorer:

- Vad det är som sker om en absolutbeloppsalgebra fösöks att skapas i en annan dimension än dimensionerna 1, 2, 4 och 8.
- Hur det ovanstående förhåller sig till Hurwitz sats.
- Räkning med absolutbeloppsalgebror i olika dimensioner.

3 Metod

Metoden som kommer att användas för att uppfylla uppsatsens syfte är följande: inledningsvis så studeras Hurwitz sats. Hur ser den egentligen ut? Vad är det som sker rent matematiskt och hur förhåller satsen sig till de reella talen, de komplexa talen, kvartenionerna och oktonionerna? Dessutom så kommer relationen mellan Hurwitz sats och absolutbeloppsalgebror i godtyckliga dimensioner att beskrivas. Den räkning som kommer att göras kommer att vara anknuten till Hurwitz sats i de fall då den berör ovanstående talmängder.

Därefter kommer Hamiltons försök till att skapa en aboslutbeloppslagebra i 3 dimensioner att undersökas. Vad var det som gick snett? För att få en bättre insikt i vad som faktiskt gick snett så kommer även en jämförelse att göras mellan Hamiltons försök och Hurwitzs sats.

4 Hurwitz sats: 1-, 2-, 4-, 8-satsen

Hurwitz sats publicerades år 1898 i en artikel under namnet *Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen.* Titeln kan kort och gott översättas till ”*Om sammansättningen av kvadratiska former av godtyckligt antal variabler.*”.

Rent konkret så ser satsen ut som följande:

Sats 1: Hurwitz sats, 1- 2- 4- 8-satsen

För $n=1,2,4,8$ och endast för dessa *n* finns för varje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ och $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *n* reella tal $z_1, z_2, \ldots, z_n$ så att:

$$(x_1^2+x_2^2+,\ldots,+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+,\ldots,+y_n^2)=(z_1^2+z_2^2+,\ldots,+z_n^2)$$

Där $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ges av bilinjära funktioner av $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ och $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

4.1 Hurwitz sats i praktiken

Naturligtvis så kan frågan ställas om hur denna sats egentligen kan säga något om hyperkomplexa absolutbeloppsalgebrors existens, speciellt med tanka på att samtliga

$$x_1, \ldots, x_n\ ,\ y_1, \ldots, y_n\ ,\ z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R} \ .$$

Som tidigare nämnts i inledningen så är det faktum att normen är multiplikativ en väldigt viktig egenskap hos absolutbeloppsalgebror. I just detta specifika fall så är det oerhört viktigt eftersom att det är just denna egenskap som Hurwitz använder sig av i sin sats. Undersöks exempelvis satsen då *n=2* så kommer scenariot att se ut som följande:

$$(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)=(z_1^2+z_2^2)$$

Trots att $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ samtliga är reella tal så kan $(x_1^2+x_2^2)$ och $(y_1^2+y_2^2)$ väljas att ses som normer i kvadrat av komplexa tal. Detta är fullt möjligt då normen av $x_1+x_2 i$, d.v.s. $\|x_1+x_2 i\|$ faktiskt är lika med $\sqrt{(x_1^2+x_2^2)}$, och detta uttryck tillhör de reella talen. Detta är inte heller så oväntat eftersom normen per definition alltid är ett reellt tal.

Vidare så ställer ju även Hurwitz sats krav på att $z_1, z_2, \ldots, z_n$ är bilinjära i *x* och *y*. Detta är också viktigt eftersom detta är ett villkor för att det ens skall definierar en algebra.

4.2 Absolutbeloppsalgebror med en norm från en skalärprodukt

Det finns alltså ett viktigt samband mellan Hurwitz sats och absolutbeloppsalgebror med normer som uttrycks av en skalärprodukt. Faktum är att om likheten i Hurwitz sats gäller för ett specifikt värde på *n* så medför även detta att det finns en n-dimensionell absolutbeloppsalgebra med multiplikation som ges av de bilinjära formerna $z_1, \ldots, z_n$ och norm som kommer från skalärprodukten:

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Likaså gäller detta omvänt, d.v.s. att om en n-dimensionell absolutbeloppsalgebra har en norm som definieras via en skalärprodukt så gäller likheten i Hurwitz sats för detta *n*.

Nu kan det ju tänkas uppstå problem beroende på vilken skalärprodukt det vektorrummet som bearbetas har. Det är ju inte alls säkert att normen beräknas som den Euklidiska normen görs. Som tur är så finns det en välkänd sats från linjär algebra som pekar på att detta inte blir ett problem.

Sats 2: Sylvesters tröghetssats

Om vi har en norm på $\mathbb{R}^n$ som ges av en skalärprodukt så finns det en bas s.a. följande gäller för denna bas:

$$||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}$$

Sammanfattningsvis så kan alltså normen alltid, via ett basbyte, att beräknas på ovanstående sätt.

5 Hurwitz sats: räkning

I detta avsnitt så kommer Hurwitz sats att bevisas genom att räkna igenom satsen för *n=1, 2, 4, 8*. Dessutom kommer de gällande räknereglerna för kvaternioner respektive oktonioner att redovisas. Detta görs dels för att få en förståelse i vad som faktiskt sker, men också för att öva färdigheterna inom just räkning med olika typer av absolutbeloppsalgebror. De reella talen (*n=1*) berörs endast väldigt kort då lösningen är väldigt intuitiv och likaså oktonionerna (*n=8*) berörs väldigt kort eftersom räkningen är oerhört tidskrävande samt tar oerhört mycket plats.

5.1 Hurwitz sats: De reella talen (n=1)

Undersöks Hurwitz sats då *n=1* så säger den att likheten $(x_1^2)(y_1^2)=(z_1^2)$ skall gälla. Stämmer denna likhet så påvisar även den att de reella talen är en absolutbeloppsalgebra.

Ovanstående likhet medför att:

$$(z_1^2)=(x_1^2 y_1^2)$$

Att ovanstående påstående stämmer råder det ingen tvekan om och på så vis kan $z_1=x_1\ y_1$ vara ett värde på z_1. Detta är ju också, som nämnt i exempel 2, ett bilinjärt uttryck i *x* och *y*. Därmed kan slutsatsen dras att de reella talen faktiskt är en absolutbeloppsalgebra.

5.2 Hurwitz sats: De komplexa talen (n=2)

Betydligt knivigare blir det däremot när de komplexa talen berörs. Då *n*=2 så säger Hurwitz sats att likheten $(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)=(z_1^2+z_2^2)$ med $z_{1,}z_2$ bilinjära gäller. Stämmer detta? Vi undersöker!

Inledningsvis så betraktas respektive parentes i *HL* som komplexa tal och därefter beräknas kvadraten av dessa komplexa tals absolutbelopp:

$$a=x_1+x_2 i \rightarrow ||a||^2=x_1^2+x_2^2$$

$$b=y_1+y_2 i \rightarrow ||b||^2=y_1^2+y_2^2$$

Därefter utnyttjas det faktum att algebran, om likheten skall gälla, måste ha en multiplikativ norm. Detta medför att:

$$(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)=||a||^2*||b||^2=||ab||^2=(z_1^2+z_2^2)$$

gäller för några $z_{1,}z_2\in\mathbb{R}$.

Om nu *a* multipliceras med *b* så leder detta till följande:

$$ab=(x_1y_1)+(x_1y_2i)+(x_2y_1i)-(x_2y_2)=(x_1y_1-x_2y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i$$

Detta innebär att $||ab||^2=(x_1 y_1-x_2 y_2)^2+(x_1 y_2+y_1 x_2)^2$, vilket i sin tur innebär att följande värden på z_1 och z_2 kan väljas:

$$z_1=(x_1 y_1-x_2 y_2)$$

$$z_2=(x_1 y_2+y_1 x_2)$$

Notis: *Här ses tydligt att det bilinjära villkoret uppnås. Både* z_1 *och* z_2 *slutar i en linjär funktion om x eller y fixeras.*

Det som nu återstår är att verifiera att $(z_1^2+z_2^2)=(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$ för ovanstående $z_{1,} z_2$.

$$\begin{aligned} VL=(z_1^2+z_2^2)=(x_1 y_1-x_2 y_2)^2+(x_1 y_2+y_1 x_2)^2= \\ =(x_1^2 y_1^2-2x_1 y_1 x_2 y_2+x_2^2 y_2^2)+(x_1^2 y_2^2+2x_1 y_1 x_2 y_2+x_2^2 y_2^2)= \\ =(x_1^2 y_1^2)+(x_1^2 y_2^2)+(x_2^2 y_1^2)+(x_2^2 y_2^2) \end{aligned}$$

Tittar man på de termer med koefficienten +2 och -2 så ser man att dessa tar ut varandra.

$$HL=(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)=(x_1^2 y_1^2)+(x_1^2 y_2^2)+(x_2^2 y_1^2)+(x_2^2 y_2^2)=VL$$

Eftersom *HL=VL* så stämmer satsen och därmed har det bevisats att även de komplexa talen är en absolutbeloppsalgebra.

5.3 Hurwitz sats: Kvaternioner (n=4)

Nedan så redovisas räknereglerna som gäller för kvaternioner samt ett bevis för att Hurwitz sats verkligen gäller då *n=4*.

5.3.1 Kvaternioner: räkneregler

Kvaternioner är vektorer i $\mathbb{R}^4$ och skrivs på formen $x_1+x_2 i+x_3 j+x_4 k$ där $x_{1,} x_{2,} x_{3,} x_4 \in \mathbb{R}$.

Addition:

Vid addition av kvaternioner så adderas termerna termvis, precis på samma sätt som addition med komplexa tal.

Multiplikation:

Vid multiplikation av kvaternioner gäller följande :

$$ij=k \quad jk=i \quad ki=j$$

$$ji=-k \quad kj=-i \quad ij=-j$$

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

Notis: *Det faktum att* $ij\neq ji\,, ik\neq ki\,,\ jk\neq kj$ *gör att kommutativiteten, som både de komplexa och reella talen har, går förlorad.*

5.3.2 Kvaternioner: Hurwitz sats

När det kommer till kvaternionerna, d.v.s. *n=4*, så säger Hurwitz sats att följande gäller:

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=(z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2)\ .$$

Vi utgår från samma arbetsmetod som i det tidigare exemplet:

$$a=(x_1+x_2 i+x_3 j+x_4 k)\rightarrow\|a\|^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$

$$b=(y_1+y_2 i+y_3 j+y_4 k)\rightarrow\|b\|^2=(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)$$

Den multiplikativa normen medför att

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=\|a\|^2*\|b\|^2=\|ab\|^2=(z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2)$$

gäller för några $z_{1,}\ldots,z_4\in\mathbb{R}$.

Multipliceras *a* med *b* så erhålls följande uttryck:

$$\begin{gathered}ab=(x_1 y_1+x_1 y_2 i+x_1 y_3 j+x_1 y_4 k)+(x_2 i\, y_1+x_2 i\, y_2 i+x_2 i\, y_3 j+x_2 i\, y_4 k)+\\+(x_3 j\, y_1+x_3 j\, y_2 i+x_3 j\, y_3 j+x_3 j\, y_4 k)+(x_4 k\, y_1+x_4 k\, y_2 i+x_4 k\, y_3 j+x_4 k\, y_4 k)\end{gathered}$$

Om kvaternionernas räkneregler därefter tillämpas så erhålls:

$$\begin{aligned}&ab=(x_1 y_1-x_2 y_2-x_3 y_3-x_4 y_4)+(x_1 y_2+x_2 y_1+x_3 y_4-x_4 y_3)i+\\&+(x_1 y_3-x_2 y_4+x_3 y_1+x_4 y_2)j+(x_1 y_4+x_2 y_3-x_3 y_2+x_4 y_1)k\end{aligned}$$

Detta medför att följande gäller:

$$\begin{aligned}&||ab||^2=(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4)^2+(x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2\\&+(x_1y_3-x_2y_4+x_3y_1+x_4y_2)^2+(x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2+x_4y_1)^2\end{aligned}$$

Vilket i sin tur medför att värdena för $z_1,\dots,z_4$ kan väljas så att:

$$z_1=(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4)$$

$$z_2=(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)$$

$$z_3=(x_1y_3-x_2y_4+x_3y_1+x_4y_2)$$

$$z_4=(x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2+x_4y_1)$$

Frågan är nu om $(z_1^2+\dots+z_4^2)=(x_1^2+\dots+x_4^2)(y_1^2+\dots+y_4^2)$ verkligen gäller.

$$\begin{aligned}&VL=(z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2)=\\&=(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4)^2+(x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2\\&+(x_1y_3-x_2y_4+x_3y_1+x_4y_2)^2+(x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2+x_4y_1)^2\end{aligned}$$

Multipliceras därefter parenteserna i *VL* ut så erhålls följande:

$$\begin{aligned}&VL=(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4)^2+(x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2\\&+(x_1y_3-x_2y_4+x_3y_1+x_4y_2)^2+(x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2+x_4y_1)^2=\\&=(x_1^2y_1^{\;2}-2x_1y_1x_2y_2-2x_1y_1x_3y_3-2x_1y_1x_4y_4+x_2^2y_2^2+2x_2y_2x_3y_3+2x_2y_2x_4y_4+\\&+x_3^2y_3^2+2x_3y_3x_4y_4+x_4^2y_4^2)+\\&+(x_1^2y_2^2+2x_1y_2x_2y_1+2x_1y_2x_3y_4-2x_1y_2x_4y_3+x_2^2y_1^2+2x_2y_1x_3y_4-2x_2y_1x_4y_3+\\&+x_3^2y_4^2-2x_3y_4x_4y_3+x_4^2y_3^2)+\\&+(x_1^2y_3^2-2x_1y_3x_2y_4+2x_1y_3x_3y_1+2x_1y_3x_4y_2+x_2^2y_4^2-2x_2y_4x_3y_1-2x_2y_4x_4y_2+\\&+x_3^2y_1^2+2x_3y_!x_4y_2+x_4^2y_2^2)+\\&+(x_1^2y_4^2+2x_1y_4x_2y_3-2x_1y_4x_3y_2+2x_1y_4x_4y_1+x_2^2y_3^2-2x_2y_3x_3y_2+2x_2y_3x_4y_1+\\&+x_3^2y_2^2-2x_3y_2x_4y_1+x_4^2y_1^2)\end{aligned}$$

Om de produkter med koefficienten *+2* eller -*2* nu observeras så upptäcks att dessa, även i detta fall, kommer att ta ut varandra. Detta resulterar i att summan av de fyra parenteserna slutligen hamnar på:

$$\begin{aligned}&VL=(x_1^2y_1^2+x_1^2y_2^2+x_1^2y_3^2+x_1^2y_4^2)+(x_2^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_2^2y_3^2+x_2^2y_4^2)\\&+(x_3^2y_1^2+x_3^2y_2^2+x_3^2y_3^2+x_3^2y_4^2)+(x_4^2y_1^2+x_4^2y_2^2+x_4^2y_3^2+x_4^2y_4^2)=HL\end{aligned}$$

Multipliceras sedan parenteserna ut i H*L* så erhålls följande uttryck:

$$HL=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=$$
$$=(x_1^2y_1^2+x_1^2y_2^2+x_1^2y_3^2+x_1^2y_4^2)+(x_2^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_2^2y_3^2+x_2^2y_4^2)$$
$$+(x_3^2y_1^2+x_3^2y_2^2+x_3^2y_3^2+x_3^2y_4^2)+(x_4^2y_1^2+x_4^2y_2^2+x_4^2y_3^2+x_4^2y_4^2)$$

Nu ses tydligt att *VL=HL* och därmed så stämmer satsen även för *n=4*. Detta medför vidare att kvaternionerna är en absolutbeloppsalgebra med norm $||x||=\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)}$.

5.4 Hurwitz sats: Oktonioner (n=8)

Nedan så berörs räknereglerna som gäller för oktonioner samt en redovisning för vilka värden $z_{1,}\ldots,z_8$ kan tänkas anta för att likheten i Hurwitz sats skall gälla.

5.4.1 Oktonioner: räkneregler

Oktonioner är vektorer i $\mathbb{R}^8$ som skrivs på formen $x_0+x_1i_1+x_2i_2+x_3i_3+x_4i_4+x_5i_5+x_6i_6+x_7i_7$ där $x_{0,}x_{1,}x_{2,}x_{3,}x_{4,}x_{5,}x_{6,}x_7\in\mathbb{R}$.

Addition:

Vid addition så adderas termerna termvis.

Multiplikation:

Vid multiplikation så gäller följande:

$$i_n^2=-1$$

$$i_{n+1}i_{n+2}=i_{n+4}=-i_{n+2}i_{n+1}$$

$$i_{n+2}i_{n+4}=i_{n+1}=-i_{n+4}i_{n+2}$$

$$i_{n+4}i_{n+1}=i_{n+2}=-i_{n+1}i_{n+4}$$

Där indexen räknas modulo 7.

5.4.2 Oktionioner: Hurwitz sats

Som tidigare nämnt så tar räkning med oktonioner väldigt mycket textutrymme och därmed kommer inte någon räkning att redovisas här. I fallet *n=8* så kommer oktonionerna att te sig väldigt snarlikt de komplexa talen och kvaternionerna i de räkningar som rör Hurwitz sats. Den enda egentliga skillnaden kommer att vara att parentesutvecklingarna bli mycket längre då varje parentes inledningsvis innehåller åtta istället för två eller fyra termer.

Några värdena som $z_{1,}\dots,z_8$ kan anta är:

$$z_1=(x_0 y_0+x_1 y_1+x_2 y_2+x_3 y_3+x_4 y_4+x_5 y_5+x_6 y_6+x_7 y_7)$$

$$z_2=(x_0 y_1+x_1 y_0-x_2 y_4-x_3 y_7+x_4 y_2-x_5 y_6+x_6 y_5+x_7 y_3)$$

$$z_3=(x_0 y_2+x_1 y_4+x_2 y_0-x_3 y_5-x_4 y_1+x_5 y_3-x_6 y_7-x_7 y_6)$$

$$z_4=(x_0 y_3+x_1 y_7+x_2 y_5+x_3 y_0-x_4 y_5-x_5 y_2+x_6 y_4-x_7 y_1)$$

$$z_5=(x_0 y_4-x_1 y_2+x_2 y_1+x_3 y_6+x_4 y_0-x_5 y_7-x_6 y_3+x_7 y_5)$$

$$z_6=(x_0 y_5+x_1 y_6-x_2 y_3+x_3 y_2+x_4 y_7+x_5 y_0-x_6 y_1-x_7 y_4)$$

$$z_7=(x_0 y_6-x_1 y_5+x_2 y_7-x_3 y_4+x_4 y_4+x_5 y_1+x_6 y_0-x_7 y_2)$$

$$z_8=(x_0 y_7-x_1 y_3-x_2 y_6+x_3 y_1-x_4 y_5+x_5 y_4+x_6 y_2+x_7 y_0)$$

6 Absolutbeloppsalgebror i $\mathbb{R}^3$?

Precis som nämnt i inledningen så har det gjorts försök i att skapa absolutbeloppsalgebror i tre dimensioner, dessvärre utan resultat. Nedan kommer inledningsvis Hamiltons försök till att skapa en absolutbeloppsalgebra tillhörande $\mathbb{R}^3$ att redovisas. Dessutom kommer samma resonemang som Hamilton förde att göras i termer av Hurwitz sats för att på så vis få en djupare insikt i vad som faktiskt gjorde att det hela var omöjligt.

6.1 Hamiltons försök till att skapa en absolutbeloppsalgebra i $\mathbb{R}^3$

Som precis påvisats så gäller likheten från Hurwitz sats utmärkt då *n=1,2,4,8*, vilket i sin tur tyder på att absolutbeloppsalgebror med en norm från en skalärprodukt existerar i varje dimension för respektive värde på *n*. Dock så har vi inte kommit närmare svaret på frågan om vad som händer då absolutbeloppsalgebror i andra dimensioner än de ovan nämnda försöks att konstrueras. Som tidigare nämnts så försökte Hamilton, i början av sitt arbete med hyperkomplexa tal, att multiplicera ihop tripletter. Den metod han använde sig av var densamma som han tidigare använt vid multiplikation bland dubbletter (d.v.s. multiplikation med komplexa tal). Dessvärre så kom ju detta inte att gå så bra. Men vad var det egentligen för problem som Hamilton stötte på? Vad var det som gjorde det omöjligt att skapa en absolutbeloppsalgebra i $\mathbb{R}^3$?

Det som Hamilton inledningsvis försökte med var, precis som nämnts i inledningen, att multiplicera tal på formen:

$$a+bi+cj \quad \text{där} \quad i^2=j^2=-1 \quad \text{och} \quad a,b,c\in\mathbb{R} \quad .$$

Det han började med var att försöka hitta kvadraten till talet $a+bi+cj$, detta eftersom kvadraten av talet ändå är detsamma som att multiplicera talet med sig själv. Efter multiplikationen kom Hamilton fram till följande uttryck:

$$(a+bi+cj)^2=a^2-b^2-c^2+2abi+2acj+2bcij \quad (*)$$

Värt att påpeka är att uttrycket till höger om likhetstecknet räknades fram med kommutativa räkneregler. Efter att ha kommit fram till detta så jämförde Hamilton kvadraten av normen för $(a+bi+cj)^2$ med kvadraten av $||a+bi+cj||^2$. Eftersom att normen hos en absolutbeloppsalgebra skall vara multiplikativ så bör dessa uttryck vara lika med varandra. Faktum är att det är precis denna jämförelse som Hurwitz sats bygger på.

Därefter observeras endast summan av koefficienternas framför 1, *i*, och *j* från (*) så erhålls följande uttryck:

$$(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2ac)^2$$

Något som Hamilton noterade med detta uttryck var att följande likhet faktiskt gäller:

$$(a^2+b^2+c^2)^2=(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2ac)^2$$

För att vara på den säkra sidan så verifieras detta. Om vänsterledet i det ovanstående uttrycket observeras så kommer det, efter att parenteserna multipliceras ut, att resultera i:

$$\begin{aligned} VL&=(a^2+b^2+c^2)^2= \\ &=(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2) \end{aligned}$$

Högerledet blir som följer:

$$\begin{aligned} HL&=(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2ac)^2= \\ &=(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2)+(4a^2b^2)+(4a^2c^2)= \\ &=(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2)=VL \end{aligned}$$

Precis som Hamilton påvisat så gäller likheten. Dock har inte termen *ij* från (*) samt dess koefficient räknats med i ovanstående beräkningar. Eftersom likheten gäller för godtyckliga *a,b* och *c* så sätter detta krav på att *ij=0*. Eftersom det är tre dimensioner som vi befinner oss i så måste *ij* kunna skrivas som en linjär kombination av *1, i* och *j*. Detta medför att *ij* måste kunna skrivas på formen $r+si+tj$ där $r,s,t\in\mathbb{R}$.

För att undersöka huruvida det är möjligt att uttrycka *ij* som en linjär kombination av *1, i* och *j* så undersöks detta.

Inledningsvis så förutsätts följande:

$$\alpha=a^2-b^2-c^2-2\text{abi}-2\text{acj}+2\text{bcij}\rightarrow||\alpha||=a^2+b^2+c^2 \quad (**)$$

Det som nu skall undersökas är vilka värden på *r, s,* och *t* som kan fås om vi antar att $ij=r+si+tj$ i ovanstående uttryck.

Inledningsvis så börjar vi med ett exempel med följande värden på *a, b* och *c:*

$$a=0$$
$$b=1/\sqrt{(2)}$$
$$c=1/\sqrt{(2)}$$

Detta medför att $\alpha=-1+ij$ och $||\alpha||=1$ om vi stoppar in dessa värden i (**). Efter detta så ansätts $ij=r+si+tj$ och medför på så vis att:

$$\alpha=r-1+si+tj$$

Den euklidiska normen i kvadrat av ovanstående vektor, d.v.s, $||\alpha||^2$ blir då:

$$||\alpha||^2=r^2+s^2+t^2-2\text{r}+1$$

Enligt (**) så är $||\alpha||=1\rightarrow||\alpha||^2=1$ då $a=0,b=c=1/\sqrt{(2)}$. Alltså så måste $r^2+s^2+t^2-2\text{r}+1$ också vara lika med 1.

$$1=r^2+s^2+t^2-2\text{r}+1\Leftrightarrow 0=r^2+s^2+t^2-2\text{r} \quad (***)$$

Efter detta så görs samma process igen. Dock så antas nya värden på *a, b* och *c*. Om *a=0, b=1* och *c=1/2* så får man då att:

$$0=r^2+s^2+t^2-5/4\text{r}$$

Nu kan ett ekvationssystem skapas m.h.a. uttrycket från slutet av s. 16 och uttrycket från (***). Det blir som följer:

$$\begin{cases} 0 = r^2 + s^2 + t^2 - 2\mathrm{r} \\ 0 = r^2 + s^2 + t^2 - \frac{5}{4} r \end{cases}$$

Stoppas därefter $r^2 = -s^2 - t^2 + \frac{5}{4} r$ in i det övre uttrycket så fås likheten

$2\mathrm{r} = \frac{5}{4} r$. Det enda alternativa värdet på detta är *r=0*. Gäller *r=0* så måste även detta innebära att *r=s=t=0*. Alltså måste *ij=0* gälla.

Är *ij=0* så måste detta innebära att $\|ij\| = 0$. Problemet som uppstår $\|ij\| = 0$ är då att varken $\|i\|$ eller $\|j\|$ är lika med *0* och därmed kan inte $\|ij\| = 0$ gälla eftersom att det motstrider definitionen av en absolutbeloppsalgebra, ty $\|ij\| = \|i\| * \|j\|$.

Detta var självklart något som Hamilton starkt ogillade. Han märkte senare att han vid multiplikationen egentligen erhållit *ij + ji* och, p.g.a. den förutsatta kommutativiteten summerat detta till *2ij*. Av detta så drog han slutsatsen att om $ij \neq 0$ skall gälla så måste de kommutativa räknereglerna uppoffras.

I och med denna upptäckt så började Hamilton att experimentera på andra förutsatta värden på *ij* och *ji*. Något som han ansåg var mindre kritsikt än *ij=0* var att *ij=-ji*. Är *ij=-ji* så kommer termerna ändå att ta ut varandra och totalt så får vi noll st *ij* efter additionen. Efter att ha kommit fram till ovanstående slutsats så antog han att *ij=k* och *ji=-k*. Dock så kvarstod det fortfarande att ta reda på vad *k* egentligen var.

Det var nu det slog Hamilton att han faktiskt kunde göra *k* linjärt oberoende av *1*, *i*, och *j* och på så vis hoppa upp till $\mathbb{R}^4$.

6.2 Hurwitz sats då n=3

För att ytterligare få insikt i vad som sker om man försöker att skapa absolutbeloppsalgebror tillhörande $\mathbb{R}^3$ så uttrycker vi oss i termer av Hurwitz sats. Vad är det som egentligen händer om *n* antar värdet *3* i likheten från Hurwitz sats?

Inledningsvis så utgår vi från att likheten från Hurwitz sats gäller då *n=3* och att absolutbeloppsalgebror existerar i tre dimensioner. Därmed så utgår vi ifrån att $z_1, \ldots, z_3$ är bilinjära i *x* och *y* och dessutom att dessa vektorer är uttryckta i en bas s.a. normen ges av den euklidiska skalärprodukten. Stämmer allt detta så medför detta att följande likhet gäller:

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=(z_1^2+z_2^2+z_3^2)$$

Precis som med de andra absolutbeloppsalgebrorna så skrivs de två parenteserna i *HL* som absolutbeloppet i kvadrat av tal tillhörande $\mathbb{R}^3$.

$$a=(x_1+x_2 i+x_3 j)\rightarrow||a||^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

$$b=(y_1+y_2 i+y_3 j)\rightarrow||b||^2=(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$

Som tidigare nämnt så måste normen vara multiplikativ för att detta skall definiera en absolutbeloppsalgebra och därmed måste följande gälla:

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=||a||^2 * ||b||^2=||ab||^2=(z_1^2+z_2^2+z_3^2)$$

Multipliceras *a* med *b* så erhålls följande uttryck:

$$\begin{aligned}ab&=(x_1 y_1+x_1 y_2 i+x_1 y_3 j)+(x_2 i\, y_1+x_2 i\, y_2 i+x_2 i\, y_3 j)+\\&+(x_3 j\, y_1+x_3 j\, y_2 i+x_3 j\, y_3 j)\end{aligned}$$

Därefter tillämpas de räkneregler som gäller vid multiplikation. Att $i^2=j^2=-1$ kan vi förutsätta eftersom *i* och *j* skall vara imaginära enheter och således måste $i^2, j^2<0$ gälla**.** Däremot så har vi inte kommit närmare på svaret om vad *ij* respektive *ji* är för något och därmed så får det lämnas som det är tills vidare.

Efter att ha tillämpat $i^2=j^2=-1$ så får vi följande uttryck:

$$\begin{aligned}ab&=(x_1 y_1-x_2 y_2-x_3 y_3)+(x_1 y_2+x_2 y_1)i+(x_1 y_3+x_3 y_1)j\\&+(x_2 y_3)ij+(x_3 y_2)ji\end{aligned}$$

Om vi nu tittar på det ovanstående uttryckets norm i kvadrat, men då också utesluter *ij* och *ji*, så får vi följande:

Från uttryckets realdel så kommer:

$$x_1^{\ 2} y_1^{\ 2}+x_2^{\ 2} y_2^{\ 2}+x_3^{\ 2} y_3^{\ 2}-2x_1 x_2 y_1 y_2-2x_1 x_3 y_1 y_3+2x_2 x_3 y_2 y_3 \quad .$$

Från den imaginära enheten *i* så kommer:

$$x_1^2 y_2^2+x_2^2 y_1^2+2x_1 x_2 y_1 y_2 \quad .$$

Och från den imaginära enheten *j* så kommer:

$$x_1^2 y_3^2+x_3^2 y_1^2+2x_1 x_3 y_1 y_3 \quad .$$

Men var bör *ij* och *ji* sluta på om vi skall få likheten att gälla? När kvaternionernas existens bevisades m.h.a. Hurwitz sats i avsnitt 5.3.2 så upptäcktes det att samtliga termer med koefficienter *+2* eller *-2* tog ut varandra och på så vis fick likheten i satsen att gälla. Därmed kan man tänka sig att det även bör inträffa i detta fall, då *n=3*. En annan sak som också pekar på detta bör ske är att vi vet vill $(x_{1,}^2\dots,x_n^2)(y_{1,}^2\dots,y_n^2)=(z_{1,}^2\dots,z_n^2)$ skall gälla då *n=3*. Multipliceras parenteserna i *VL* ihop så erhålls endast en summa av kvadrater multiplicerade med kvadrater. Därmed så bör även *HL* sluta i en summa av kvadrater multiplicerade med kvadrater. Termerna med koefficienterna *+2* och *-2* består inte av kvadrater och bör därmed ta ut varandra.

I de termer som är färgmarkerade på s. 18 så kan det tydligt utläsas att det som är grönmarkerat tar ut varandra och att det som är blåmarkerat tar ut varandra. Det som återstår är den sista, rödmarkerade, termen.

Studeras rödmarkerade termen så kan slutsatsen dras att denna kan erhållas vid multiplikation av termer som tillsammans endast innehåller variablerna $x_{2,} x_{3,} y_{2,} y_3$. Observeras därefter *ab* så kan slutsatsen dras att detta kommer att inträffa då *ij* och *ji* multipliceras med varandra. Detta kommer att inträffa om *ij* och *ji* tillhöra samma imaginära enhet eftersom att multiplikationen sker när normen räknas ut. Ett alternativet som därmed kan tänkas fungera för att få den rödmarkerade termen att försvinna är att tillföra ytterligare en imaginär enhet, *k*, och därefter anta att $ij=k$ och $ji=-k$. På så vis kommer koefficienterna framför *ij* och *ji* att multipliceras med varandra. Antas detta så kommer den imaginära enheten *k* att bidra med följande efter att uttryckets norm i kvadrat har beräknats:

$$x_1^2 y_3^3+x_3^3 y_1^2-2x_2 x_3 y_2 y_3$$

Genom detta så kommer de rödmarkerade termerna att ta ut varandra och endast produkten av kvadrater multiplicerade med kvadrater kommer att återstå. Dock så har nu än en gång en övergång till $\mathbb{R}^4$ skett, och vi befinner oss därmed inte längre i $\mathbb{R}^{3.}$. Något som är värt att nämna är att det som berörs i detta avsnitt (6.2) verkligen inte är något bevis på att absolutbeloppsalgebror inte existerar i $\mathbb{R}^{3.}$, utan endast något visar på vad som händer om man stoppar in värdet $n=3$ i likheten från Hurwitz sats och därefter dessutom försöker att få likheten att gälla.

7 Slutsats

Syftet med denna uppsats var att få en insikt i varför absolutbeloppsalgebror endast kan existera i dimensionerna 1, 2, 4 och 8, hur detta kan visas med Hurwtiz sats samt att få en insikt i hur räkning med hyperkomplexa tal går till.

Vad gäller den först punkten i syftet så har en viss insikt i vad som går fel vid försökt till att skapa absolutbeloppsalgebror tillhörande $\mathbb{R}^3$ att erhållits. Denna förståelse har delvis kommit i besittning via Hamiltons försökt till att skapa en tredimensionell absolutbeloppsalgebra, men också via Hurwitz sats. När det kommer till räkningen så har en viss förståelse i hur räkning vad gäller kvartenioner och oktonioner uppnåts. Utöver detta så har även sammbandet mellan Hurwitz sats och absolutbeloppsalgebror med en norm som ges av en skalärprodukt berörts.

8 Referenslista

1. Conway, John H. & Smith, Derek A. (2003) *On Quaternions and Octonions.* A K Peters, Ltd.

2. Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A. & Remmert, R. (1991) *Numbers.* Springer-Verlag New York Inc.

3. Hurwitz, A. (1898) *Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen.*