UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2014:28

Vektorprodukten: historik och egenskaper

Gyri Hansen Mohisenpour

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare och examinator: Gunnar Berg
Januari 2014

Department of Mathematics
Uppsala University

Vektorprodukten: historik och egenskaper

Gyri Hansen Mohisenpour

Examensarbete i matematik, 15 hp

Handledare och examinator: Gunnar Berg

Januari 2014

Department of Mathematics, Uppsala University

Innehållsförteckning

På denna jord är människan det enda stora;
i människan är anden det enda stora.
Sir William Rowan HAMILTON

Inledning

Inom vektoranalys är vektorprodukten, som matematiskt uttrycks $u \times v$, ett sätt att multiplicera två vektorer u och v som resulterar i en ny vektor w vilken är ortogonal (dvs. vinkelrät) mot både u och v. Det finns ytterligare två kriterier som måste vara uppfyllda för en vektorprodukt och när dessa inkluderas existerar vektorprodukten endast i 3 och 7 dimensioner. Vi bortser här från att man kan få vektorprodukten att fungera i 0 och 1 dimensioner där 0-vektorn uppfyller alla kriterier, men inte tillför denna diskussion något substantiellt.

Förutsatt att $n \geq 3$ och vi har två vektorer $u, v \in R^n$, definieras vektorprodukten som en vektor $u \times v \in R^n$ om följande tre egenskaper är uppfyllda:

I) Vektorn $u \times v$ är ortogonal mot både u och v, dvs. skalärprodukten mellan $u \times v$ och respektive vektor u och v blir 0. $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$

II) $u \times v$ är en bilinjär funktion av u och v. T.ex. är $(u + w) \times v = u \times v + w \times v$

III) Om vektorprodukten kvadreras gäller följande: $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2$, kallad den Pythagoreiska egenskapen.

En vektorprodukt i R^n måste med andra ord uppfylla ortogonala, bilinjära och Pythagoreiska egenskaper för att gälla. Jag vill i denna artikel presentera beviset för hur man kommit fram till dessa egenskaper, visa att de gäller i 3 och i 7 dimensioner, presentera formlerna för vektorprodukt i 3 och 7 dimensioner och bevisa varför det inte går att hitta någon vektorprodukt i andra dimensioner. Men först vill jag presentera den historiska utvecklingen som ledde fram till vektorproduktens upptäckt. Och eftersom det skall handla om vektorer är min förhoppning att jag skall kunna ta läsaren från en vald startpunkt till slutpunkten för denna historiska berättelse via en (hyfsat) rak linje.

Vektorbegreppet. En historisk skiss

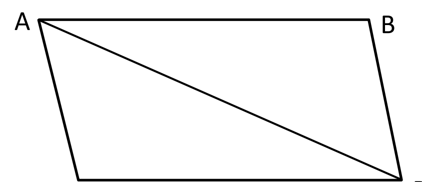
Antiken till 1600-talet

Vektoranalysens tidiga historia följer i huvudsak två spår. Det ena kommer från antikens Egypten och Babylon och rör sig om en ständig utvidgning av talbegreppet. Från början innefattade detta de positiva heltalen, men utökades vartefter till att innehålla både negativa tal, rationella tal, irrationella tal och komplexa tal[1]. Vid 1800-talets början var man van att räkna med både de reella och komplexa talen, men ännu hade man inte klart för sig hur man skulle definiera alla talbegreppen och räknesätten som man opererade med[2]. Dessutom förutsatte man att alla kategorier av tal med nödvändighet skulle följa samma räknelager som man ditintills hade kommit fram till[3]. Till exempel

[1] Crowe 1967, 1.
[2] Kline 1972, 772.
[3] ibid.

var associativa[4], kommutativa[5] och distributiva[6] lagarna för addition och multiplikation grundbultar i det matematiska tänkandet kring hur tal beter sig[7]. George Peacock (1791-1858), professor i matematik vid universitetet i Cambridge, gjorde ett försök på att definiera algebra genom att dela upp den i aritmetisk algebra och symbolisk algebra[8]. Den aritmetiska hade en generell form, man använde till exempel bokstäver som kunde representera vilket som helst positivt heltal, men det fanns specifika villkor som begränsade de värden man kunde få[9]. Symbolisk algebra var generell både i form och i värden. Detta innebär att i aritmetisk algebra gäller $a^m a^n = a^{m+n}$ så länge *m* och *n* är positiva heltal, men det gäller i symbolisk algebra för alla *m* och *n*. När det gäller algebrans operander har dessa inte någon mening i sig själva förutom den som tilldelats dem från lagarna inom algebran. Peacock uttrycker också att algebra är en deduktiv vetenskap, man formulerar en hypotes och härleder konsekvenser som naturligt följer av hypotesen. Om man hittar någon konsekvens som visar att hypotesen inte stämmer falsifieras den, i annat fall stärks den men man kan aldrig bevisa att den är sann. Detta sätt att ta sig an ny kunskap öppnade upp för ett mera abstrakt tänkande inom algebran.[10]

Det andra spåret kommer från det antika Grekland, där man sökte matematiska begrepp för att förklara fysiska problem och därmed använde geometri i stor utsträckning[11]. Under 1600-talet skedde en förändring från att man talade om ett objekts placering och vikt till att man började använda vektorbegreppet och storheter som ”hastighet, kraft, rörelsemängd, och acceleration”[12]. En viktig uppfinning på 1600-talet kom från fransmannen René Descartes’ (1596-1650) som i sin *La géométrie* (1637) beskrev det koordinatsystem som sedan skulle bära hans namn (från lat: Cartesius). I och med detta fick man den första systematiska kopplingen mellan Euklidisk geometri och algebra. Vid denna tid hade man även kunskap om hur vektorer kunde adderas. Tydligast formuleras dessa lagar av engelsmannen Sir Isaac Newton (1643-1727) i hans *Principa Mathematica.* I korollarium I säger han att ”en kropp, som påverkas av två olika krafter samtidigt, kommer att bilda diagonalen i en parallellogram samtidigt som den skulle bilda sidorna i densamme från de två krafterna var för sig.”[13]



Newtons kraftparallellogram

Komplexa tal och försöken att skapa ett tredimensionellt vektorsystem

Det var på slutet av 1700-talet och början på 1800-talet ett antal matematiker som jobbade med de komplexa talens geometriska framställning, en framställning i två dimensioner, och några av dem

---

[4] (a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc) (*associativa lagen*)
[5] a + b = b + a, ab = ba (*kommutativa lagen*)
[6] a(b + c) = ab + ac (*distributiva lagen*)
[7] Kline 1972, 775.
[8] ibid, 773.
[9] ibid.
[10] ibid, 774.
[11]Crowe 1967, 1. Crowe nämner Arkimedes, Hero av Alexandria och författaren till den pseudo-Aristoteliska *Mechanica,* medan Kline anser att Aristoteles själv hade en primitiv version av kraftparallellogrammen.
[12] ibid.
[13] Newton 1687, 14, min översättning, på originalspråket står: “A body, acted on by two forces simultaneously, will describe the diagonal of a parallelogram in the same time as it would describe the sides by those forces separately.

försökte även att utvidga detta till tre dimensioner[14]. En av dessa var Caspar Wessel (1745-1818) en norsk lantmätare som hade studerat vid universitetet i Köpenhamn. Han publicerade sitt arbete *Om direktionens analytiske betegning* i 1799, men tyvärr på danska och av den orsaken fick hans idéer från början liten spridning[15]. Han skrev: ”Närvarande försök angår frågan hur riktning analytiskt bör betecknas; när från en enda ekvation mellan en obekant och andra givna linjer det skulle kunde finnas ett uttryck som gav både den obekantas längd och dess riktning[16].” Han syftar här på addition av vektorer och uttrycker sedan mer explicit: ”§ 1. Två räta linjer adderas, om man först fogar dem samman, så att den ena börjar där den andra slutar, och sedan drar en rät linje från de sammanfogades första till sista punkt och tar denna som de sammanfogades summa[17].” Wessel säger att varje rät linje i planet kan representeras analytiskt med uttrycken $a + \epsilon b$ och $r(\cos v + \epsilon \sin v)$ och visar hur dessa uttryck kan multipliceras, divideras och upphöjas i potenser.[18] Han utvidgar konceptet att även gälla i tre dimensioner när han säger att flera än två linjer kan adderas på samma sätt och dessa måste inte ligga i samma plan[19]. Dessutom gäller den kommutativa lagen; det spelar alltså ingen roll i vilken ordning man adderar linjerna. Wessel säger sedan att varje punkt i rymden kan representeras med en vektor på formen $x + \eta y + \epsilon z$. I likhet med de komplexa talens i^2 *(eller ii)* är $\eta\eta$ och $\epsilon\epsilon$ lika med -1. Han kom så långt i sina tredimensionella modeller att han roterade kroppar kring y och z-axlarna, men stötte sannolikt på problem när han ville rotera kring x-axeln, eftersom han då skulle bli tvungen att definiera $\eta\epsilon$.[20]

En annan matematiker som tog sig an problemet på liknande sätt, men som höll sig till de komplexa talen och två dimensioner var Rev. John Warren (1796-1852) som i 1828 oberoende av alla de andra presenterade sin bok *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities.* Denna kom att influera Hamilton som sedan kunde utveckla modellen till att gälla högre dimensioner[21]. I tillägg till Wessel och Warren var det ytterligare tre män som hade publicerat liknande arbeten om de komplexa talen. Dessa var Jean Robert Argand (1806), C. V. Mourey (1828), och Carl Friedrich Gauss (1831). Gauss publikation blev den mest inflytelserika, men vare sig denna eller någon av de andras förutom Warrens var kända för Hamilton när han upptäckte kvaternionerna[22].

Hamiltons kvaternioner

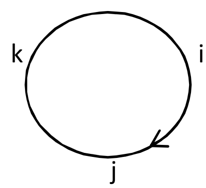
Det första flerdimensionella vektorsystemet skapades i 1843 av irländaren William Rowan Hamilton (1805-1865). Hamilton var som ung begåvad både inom språk och också matematik. Som matematiker arbetade han noggrant och systematisk med sina uträkningar tills han lyckades lösa det problem han tagit sig an. [23] Hans största upptäckt kom dock när han träffades av en inspirationens blixt vid ett specifikt tillfälle. Hamilton promenerade med sin fru längs kanalerna i Dublin på väg till

[14] Crowe 1967, 5.
[15] ibid, 6; 8.
[16] Wessel 1799, 5, min översättning.
[17] ibid, 9, min översättning.
[18] Notera att Wessel använder ϵ istället för *i* som används idag jfr $a + bi$.
[19] Crowe 1967, 7.
[20] ibid, 8.
[21] ibid, 11.
[22] ibid, 10.
[23] Kline 1972, 777.

ett möte i Royal Irish Academy, och plötsligt kom han på den grundläggande formeln för kvaternionerna: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Hamilton berättar 15 år senare om händelsen[24].

> Tomorrow will be the fifteenth birthday of the Quaternions. They started into life, or light, fully grown, on the 16th October, 1843, as I was walking with Lady Hamilton to Dublin, and came up to Brougham Bridge. That is to say, I then and there felt the galvanic circuit of thought closed, and the sparks which fell from it were the fundamental equations between I, J, K; *exactly such* as I have used them ever since. I pulled out, on the spot, a pocketbook, which still exists, and made an entry, on which, *at the very moment*, I felt that it might be worth my while to expend the labour of at least ten (or it might be fifteen) years to come. But then it is fair to say that this was because I felt a *problem* to have been at that moment *solved*, and intellectual *want relieved*, which had *haunted* me for at least *fifteen years* before.

Han ristade direkt in formeln i bron han passerade, en inskription som idag är borta, men vid platsen finns en minnestavla[25]. Hamilton sökte att hitta något som motsvarade de komplexa talens placering i talplanet, men i högre dimensioner, och det var speciellt multiplikation av dessa som vållade honom huvudbry[26]. Kvaternionerna som han kom fram till har en reell och tre imaginära axlar (medan de komplexa talen har en av varje). Varje kvaternion (q) kan uttryckas $q = a + bi + cj + dk$ där a, b, c, d är reella tal och i, j, k är tre (över R) lineärt oberoende imaginära enheter. Denna uppdelning i skalärer och vektorer är ett av de viktigaste bidragen Hamilton ger till vektoranalysen[27]. Den viktigaste skillnaden när man räknar med kvaternionerna är att den kommutativa lagen för multiplikation inte gäller. I stället har de följande regler för multiplikation:



Multiplikation 'medsols' ger den följande bokstäven med positivt tecken så att $ij = k$, medan man får negativt tecken om man multiplicerar 'mot solen' $ji = -k$[28]. Det är alltså möjligt att multiplicera två kvaternioner och resultatet blir en tredje kvaternion.

Grassmans *Ausdehnungslehre*

Medan Hamilton på titelbladet av sin *Lectures on Quaternions* stolt visade upp alla sina titlar, bland annat professor i astronomi vid Dublins universitet och medlemskap i ett dussin olika intellektuella sällskap, beskrev Hermann Günther Grassmann (1809-1877) sig helt enkelt som 'Lärare vid Friedrich-Wilhelmsskolan i Stettin' när han i 1844 publicerade sina teorier[29]. Grassmann fick inte heller samma genomslag för sina idéer som Hamilton fick och detta kan bero på att Grassmanns matematiska

---

[24] Kline 1972, 779.
[25] Knutsen 2006, 298.
[26] ibid, 297.
[27] Crowe 1967, 135.
[28] Kline 1972, 780.
[29] Crowe 1967, 19.

system var mycket omfattande och dessutom publicerades i fyra till viss del olika versioner[30]. Victor Schlegel, en stor beundrare av Grassmann beskriver 1878 verket på detta sätt[31]:

> Sådana höjder av matematisk abstraktion som de som återfinns i *Ausdehnungs-läran* hade aldrig förut uppnåtts. Som Pallas från Zeus huvud, väcktes den till liv, komplett och redo, springande över en generation av matematisk utveckling, uppstod den som en ny vetenskap, och idag, 33 år senare, förblir den ny och, tyvärr för många, precis lika oförståelig som förut.

I själva verket kan det vara så att Schlegels hjältedyrkan av Grassmann hade negativ effekt på hur han mottogs[32], men även Grassmanns inblandning av filosofiska spekulationer mellan sina matematiska teser gjorde verket svårläst[33]. Grassmanns system omfattade n-dimensionell geometri, och han kallade sina tal för hypertal. Han erkänner att rymden endast har 3 dimensioner, men säger att ”abstrakt vetenskap inte har några begränsningar”[34]. För att förstå systemet ser vi hur det fungerar för n = 3. Ett hypertal kan skrivas $\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ där α_i är reella tal och där e_1, e_2 och e_3 är enheter som kan representeras i ett ortogonalt högerorienterat system av axlar[35]. Grassman har två typer av produkter, den inre, som i modern vektoranalys motsvarar skalärprodukten, och den yttre, motsvarande vektorprodukten[36]. Grassmann var således en av de första som uttryckte något som liknar på den grundläggande formeln för vektorprodukten.

$$P = [\alpha\beta] = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[e_2e_3] + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)[e_3e_1] + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[e_1e_2]$$

På samma sätt som i Hamiltons kvaternioner blir $[e_2e_3] = e_1$ (motsvarande $jk = i$) och plustecknen indikerar inte att de olika elementen skall summeras, men är, uttryckt med Klines ord, ”en historisk olyckshändelse” som härrör från de komplexa talen[37]. Grassmann förstår också att den kommutativa lagen inte gäller vid addition när han skriver: ”Jag blev ursprungligen konfunderad av det märkliga resultatet att trots att de övriga lagarna för ordinär multiplikation (inkluderat relationen mellan multiplikation och addition) bevarades i denna nya multiplikation, kunde man endast byta ordningen på faktorer om man samtidigt ändrade tecknet (dvs. ändrade + till - och - till +).”[38]

Tait och Maxwell

Eftersom Grassmanns arbete gavs lite uppmärksamhet och Hamiltons kvaternioner inte mötte fysikers behov fullt och helt öppnades fältet upp för andra aktörer[39]. Två av dessa var Peter Guthrie Tait (1831-1901) och James Clerk Maxwell (1831-1879), jämnåriga skottar och nära vänner under uppväxten med liknande akademisk bakgrund tills de skildes åt efter studier vid Cambridge[40]. Maxwell blev professor i fysik vid universitetet i Cambridge[41], medan Tait blev professor i matematik

[30] Crowe 1967, 55.
[31] Rowe 2010, 41, min översättning.
[32] ibid.
[33] Crowe 1967, 77-80.
[34] Kolmogorov & Yushkevich 1981, 77.
[35] Kline 1972, 782.
[36] ibid, 783.
[37] ibid, 776.
[38] Crowe 1967, 57, min översättning.
[39] Kline1972, 785.
[40] Crowe 1967, 117.
[41] Klein 1972, 785.

vid Queen's College i Belfast[42]. Tait var en nära arvtagare till Hamilton och skrev många artiklar om kvaternionerna delvis efter uppmuntran från Hamilton[43]. Det är intressant för denna analys att han utvidgade deras användningsområden inom fysiken, som var hans primära intressefält[44], men även att han använde dem på ett sätt som liknar modern vektoranalys[45]. På detta sätt förde Tait kvaternionerna ett steg närmre det system som vektoranalysen sedan kom att fungera inom[46].

Maxwell hade inte samma kontakt med kvaternionerna som Tait och kände sannolikt inte till dem före 1870[47]. Han är känd som grundaren av elektromagnetism[48], och upptäckte inom den vetenkapsgrenen koncepten för elektromagnetiska fält som kunde analyseras med hjälp av kvaternioner[49]. När Maxwell presenterade sitt arbete på 1860-talet använde han kartesiska komponenter, medan han i sin *Treatise on Electricity and Magnetism*(1873) använder både dessa och kvaternioner[50], men framhäver Hamiltons kvaternioner som det snabbaste och enklaste sättet för vissa operationer[51]. Dock är det så att både Crowe och Kline hävdar att Maxwell föredrog vektorer som det bästa redskapet för fysikens behov[52]. Maxwells *Treatise* ledde dock till att kvaternionerna fick en större spridning[53].

Gibbs och Heaviside

Tidigt på 1880-talet utvecklade Josiah Willard Gibbs (1839-1903) och Oliver Heaviside (1850-1925) nästan samtidigt den moderna vektoranalysen[54]. Gibbs far (med samma namn) var professor vid Yale och där fick även den yngre Gibbs hela sin utbildning[55]. Han blev i 1871, efter en längre akademisk karriär inklusive studier i Europa, professor i matematisk fysik vid Yale. Han var den första att presentera något skrivet material om vektoranalysen då han i 1881/84 lämnade ut en liten trycksak han kallade *Elements of Vector Analysis* till sina studenter[56]. Genom ett brev Gibbs skrev till Schlegel 1888 lär vi att han hade introducerats för kvaternionerna genom Maxwell, sedan gått till Tait och Hamiltons publikationer för att lära mera, men konkluderat med att skalärdelen och vektordelen inte bör blandas ihop. När han till sist (1877 eller senare) introducerades för Grassmanns arbete tyckte han om dennes sätt att arbeta med vektorer, men hade lika stora problem med att komma igenom *die Ausdehnungslehre* som alla andra[57]. Gibbs fortsatte att utveckla sin vektoranalys och en av hans styrkor låg i att han hade förmågan att välja ett system som fyllde den tidens behov[58].

---

[42] Crowe 1967, 118.
[43] ibid.
[44] ibid.
[45] ibid, 124.
[46] ibid.
[47] Crowe 1967, 129.
[48] Kline 1972, 785.
[49] Crowe 1967, 128; 131.
[50] ibid, 128.
[51] ibid, 135.
[52] Crowe 1967, 110; Kline 1972, 786.
[53] Crowe 1967, 134.
[54] Kline 1972, 786.
[55] Kumaran 2007, 5.
[56] Kline 1972, 786.
[57] Crowe 1967, 152-154.
[58] ibid, 162.

Heaviside hade ingen universitetsutbildning och började i 1868 att jobba som telegrafi- och telefoningenjör[59]. Det sägs att han på grund av dålig hörsel i 1874 slutade jobba och flyttade ut på landet. Maxwells *Treatise* hade nyss utkommit och denna intresserade Heaviside sig för till den grad att han applicerade metoden på ett antal nya användningsområden.[60] Han publicerade i åren 1882-1887 ett antal artiklar i tidskriften *the Electrician* där han presenterade sin förenklade vektoranalys[61]. År 1888 fick han en kopia av Gibbs bok och uttryckte sympati med hans idéer, förutom när det gällde notation där han valde att bygga på Taits system[62]. En sammanfattning av metoden publicerades i verket *Electromagnetic Theory* i tre volymer (1893, 1899 och 1912) vartefter han slutade sitt vetenskapliga arbete[63].

Det finns, som vi har sett, två parallella system för notation och räkning med vektorer. Hamiltons kvaternioner och det mer allmänt kända kallad vektoralgebra. Det senare fick en större utbredning och har varit det dominerande systemet sedan slutet på 1800-talet. Dock har kvaternionerna hämtats fram på senare tid eftersom de har vissa fördeler vid rotationer[64]. Med kvaternioner blir det färre räkneoperationer än med matristransformationer och man undviker låsning av rotationsaxlarna, kallad ”gimbal lock”. Genom att bädda in vektorerna som rent imaginära kvaternioner kan man använda dem för räkneoperationer i R^3. De fält där de har visat sig vara speciellt nyttiga är bland annat inom datorgrafik, styrning av robotar och flygsimulatorer[65].

59 Crowe 1967, 162; Kline 1972, 787.
60 Unz 1963, 30.
61 Crowe 1967, 163-169.
62 Kline 1972, 787.
63 Unz 1963, 31.
64 Lilja 2013, 18.
65 ibid.

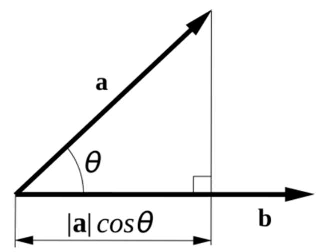
Vektorprodukten: definitioner och egenskaper

Helt grundläggande är en vektor en sträcka som har både riktning och längd. Eftersom denna undersökning gäller hur vektorer beter sig i minst 3 dimensioner så utgår vi från tredimensionella vektorer till en början. Dessa har i det kartesiska koordinatsystemet tre komponenter som motsvarar deras x-, y- och z-koordinater, till exempel v = (4,-2, 1). Det är även vanligt som vi såg i Grassmanns variant att skriva ut enhetsvektorerna e_1, e_2 och e_3; $v = 4e_1 - 2e_2 + e_3$ eller mer allmänt $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$.

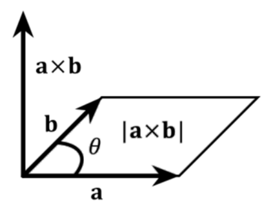
Ett vektorrum i n dimensioner betecknas R^n där n avgör hur många dimensioner vektorrummet har. Längden av en vektor v i R^n kallas normen av v och skrivs $|v|$. För att räkna normen adderar man kvadraten från varje element och tar sedan roten ur detta: $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2}$.

Skalärprodukten

Skalärprodukten, också kallat ”dot product” eller inre produkt (jfr Grassmann) är ett numeriskt värde som uttrycker längden av en vektors projektion på en annan vektor. Formeln för skalärprodukten är: $u \cdot v = |u||v| \cos \theta$, där θ är vinkeln mellan vektorerna u och v. Skalärprodukten kan även räknas ut om man endast har vektorerna och ingen känd vinkel. Formeln blir då: $u \cdot v = (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)$. Av detta följer att $u \cdot u = |u|^2$. Om skalärprodukten är lika med noll, har man ingen projektion, och vinkeln mellan de två vektorerna är lika med 90°. Har man en positiv skalärprodukt ligger vinkeln mellan 0-90° eller mellan 270-360°, medan en negativ skalärprodukt indikerar en vinkel mellan 90-270° (också kallad respektive spetsiga och trubbiga vinklar). Skalärprodukten är alltid ett tal.[66]



Vektorprodukten



Vektorprodukten, också kallat kryssprodukt eller yttre produkt är en vektor som framkommer genom multiplikation av två andra vektorer. Vektorprodukten w har en riktning och längd som bestäms av de två vektorerna u och v enligt följande. I R^3 är vektorprodukten alltid vinkelrät mot båda de ursprungliga vektorerna och dess orientering följer högerhandsregeln. Dennas innebörd är att om en vektor u (a på bilden) ligger höger om en vektor v (b på bilden) kommer $u \times v$ att ha en positiv orientering (dvs. uppåt), medan om v ligger höger om u blir orienteringen negativ. Längden av vektorn $u \times v$ bestäms av den parallellogram som spänns upp av de två vektorerna och är beroende av vinkeln θ. Man har att $|u \times v| = |u||v| \sin \theta$. Formeln för vektorprodukten är:

$$u \times v = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3$$

Vektorprodukten är alltid en vektor.

[66] Illustration av skalärprodukten: Av Svjo (Eget arbete) [CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia Commons.

Vektorprodukten: bevis för dens existens i R^3 och R^7

Grundläggande egenskaper för en vektorprodukt

Bevisen som följer tar utgångspunkt i Peter Mcloughlins artikel ”When does a Cross Product on R^n Exist?” Som nämnt inledningsvis behöver tre kriterier vara uppfyllda för att vektorprodukten ska gälla. Dessa är:

I) Vektorn $u \times v$ är ortogonal mot både u och v, dvs. skalärprodukten mellan $u \times v$ och respektive vektor u och v blir 0. $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$, kallad den ortogonala egenskapen.

II) $u \times v$ är en bilinjär funktion av u och v. T.ex. är $(u + w) \times v = u \times v + w \times v$, kallad den bilinjära egenskapen.

III) Om vektorprodukten kvadreras gäller följande: $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2$, kallad den Pythagoreiska egenskapen.

Från den Pythagoreiska egenskapen kan vi härleda följande:

IV) $\frac{u \cdot v}{\sqrt{(u \cdot u)(v \cdot v)}} = cos\theta$ (där θ är vinkeln mellan vektorerna)

V) $\frac{|(u \times v)|}{\sqrt{(u \cdot u)(v \cdot v)}} = sin\theta$

Lemma 1. Anta att *u, v* och *w är vektorer* i $\boldsymbol{R^n}$. Om en vektorprodukt existerar på $\boldsymbol{R^n}$ måste den ha följande egenskaper:

(1.1) $w \cdot (u \times v) = -u \cdot (w \times v)$

(1.2) $u \times v = -(v \times u)$ *som leder till att* $u \times u = 0$

(1.3) $v \times (v \times u) = (v \cdot u)\, v - (v \cdot v)\, u$

(1.4) $w \times (v \times u) = -((w \times v) \times u) + (u \cdot v)\, w + (w \cdot v)\, u - 2(w \cdot u)\, v$

Bevisen för (1.1) och (1.2) följer lätt från definitionen av vektorprodukten och dennes bilinjära egenskap. Se (II) ovan och Peter Mcloughlins artikel ”Basic Properties of Cross Products” för ett detaljerat bevis av dessa. Beviset för (1.3) nedan tjänar som exempel på hur man går tillväga.

Bevis. (1.3) Genom att använda den Pythagoreiska egenskapen hos vektorprodukten (III) och genom att sätta $u := u + w$ har vi:

$$((u + w) \times v)\ ) \cdot ((u + w) \times v)$$
$$= ((u + w) \cdot (u + w))\, (v \cdot v) - ((u + w) \cdot v)^2$$

Nu använder vi den bilinjära egenskapen hos skalärprodukten:

$$((u + w) \cdot (u + w))\, (v \cdot v) - ((u + w) \cdot v)^2$$
$$= (u \cdot u)\, (v \cdot v) + 2(u \cdot w)\, (v \cdot v) + (w \cdot w)\, (v \cdot v) - (u \cdot v)^2 - 2(u \cdot v)\, (w \cdot v) - (w \cdot v)^2 \qquad (1)$$

Genom att sedan använda den bilinjära egenskapen hos vektorprodukten och skalärprodukten och den Pytagoreiska egenskapen hos vektorprodukten har vi:

$$((u + w) \times v)\ ) \cdot ((u + w) \times v)$$
$$= (u \times v + w \times v) \cdot (u \times v + w \times v)$$
$$= (u \times v) \cdot (u \times v) + 2(w \times v) \cdot (u \times v) + (w \times v) \cdot (w \times v)$$
$$= (u \cdot u)\, (v \cdot v) - (u \cdot v)^2 + 2(w \times v) \cdot (u \times v) + (w \cdot u)\, (v \cdot v) - (w \cdot v)^2 \qquad (2)$$

Om vi nu sätter (1) = (2) och använder (1.1) och (1.2) får vi:

$$w \cdot (v \times (v \times u)) = -(u \times v) \cdot (w \times v)$$

$= (u \cdot v)\ (w \cdot v) - (u \cdot w)\ (v \cdot v)$
$= w \cdot (u \cdot v)\ v – (v \cdot v)\ u)$ för alla vektorer w.
Följande måste då gälla: $v \times (v \times u) = (v \cdot u)\ v – (v \cdot v)\ u$.

(1.4) följer på liknande sätt från de andra tre och vi går därför inte in på beviset för denna.

Korollarium 1. Antag att u, v, och w är ortogonala enhetsvektorer i R^n. Om en vektorprodukt existerar på R^n så måste den ha följande egenskaper:

(1.5) $u \times (u \times v) = -v$
(1.6) $w \times (v \times u) = - ((w \times v) \times u$

Beviset för (1.5) och (1.6) följer från föregående Lemma genom att ersätta $(u \cdot v) = (u \cdot w) = (w \cdot v) = 0$ *och* $(w \cdot w) = (v \cdot v) = (u \cdot u) = 1$, då skalärprodukten för ortogonala vektorer blir 0 och skalär-produkten för en vektor med sig själv blir vektorns egen längd i detta fall.

Vi har nu sett på vektorproduktens grundläggande egenskaper och går vidare till att visa att vårt påstående att den existerar i 3 och 7 dimensioner gäller.

Konstruktion av mängder av ortonormala vektorer i R^n

Vi skall nu se hur vi kan utvidga och generalisera det vi redan vet om vektorprodukten. Notera att $\{e_1, e_2, e_3\} = \{e_1, e_2, e_1 \times e_2\}$

Def. Ortonormala vektorer, dvs vektorer av längd 1, skriver vi på generell form som u_i och symbolen $\perp$ står för ortogonalitet.

Def. Vi definierar nu mängder $\{S_k\}$ av ortonormerade vektorer rekursivt genom att först definiera S_0 och sedan definiera S_{k+1} med hjälp av vektorerna i S_k.

Def. $S_0 := \{u_0\}$ och $S_k := S_{k-1} \cup \{u_k\} \cup (S_{k-1} \times u_k)$ där $u_k \perp S_{k-1}$.
Vi visar hur vi tar fram de första mängderna i sekvensen.
$S_0 = \{u_0\}$
$S_1 = S_0 \cup \{u_1\} \cup (S_0 \times u_1) = \{u_0, u_1, u_0 \times u_1\}$
$S_2 = S_1 \cup \{u_2\} \cup (S_1 \times u_2) = \{u_0, u_1, u_0 \times u_1, u_2, u_0 \times u_2, u_1 \times u_2, (u_0 \times u_1) \times u_2\}$
Notera att S_1 motsvarar $\{e_1, e_2, e_1 \times e_2\}$.
Och så vidare på liknande sätt.

Ortonormala mängder som är slutna under vektorprodukten

Givet S_i och S_j sätter vi $S_i \times S_j := \{u \times v$ där $u \in S_i$ och $v \in S_j\}$.
Vi definierar även $\pm S_i := S_i \cup (-S_i)$.
I följande två lemman kommer vi visa att S_n är en ortonormal mängd av vektorer som är sluten under vektorprodukten. Detta i sin tur implicerar att en vektorprodukt endast kan existera i R^n om n = 0 eller n = $|S_k|$.

Lemma 2. $S_1 = \{u_0, u_1, u_0 \times u_1\}$ är en ortonormal mängd. Dessutom är $S_1 \times S_1 = \pm S_1$.

Bevis. Från vektorproduktens definition har vi:

(1) $u_0 \cdot (u_0 \times u_1) = 0$
(2) $u_1 \cdot (u_0 \times u_1) = 0$

Det följer att S_1 är en ortogonal mängd.
Nästa steg får vi om vi utgår från (1.1), (1.2) och (1.3):

(1) $u_1 \times (u_0 \times u_1) = u_0$
(2) $u_0 \times (u_0 \times u_1) = -u_1$
(3) $(u_0 \times u_1) \cdot (u_0 \times u_1) = u_0 \cdot (u_1 \times (u_0 \times u_1)) = u_0 \cdot u_0 = 1$

Det följer att S_1 är en ortonormal mängd och $S_1 \times S_1 = \pm S_1$, vilket skulle bevisas.

Antal element i mängderna genom induktionsbevis

Lemma 3. S_k är en ortonormal mängd och i tillägg är $S_k \times S_k = \pm S_k$ och $|S_k| = 2^{k+1} - 1$.

Bevis. Vi fortsätter genom induktion. Om k = 1 följer induktionspåståendet från föregående lemma.
Antag att S_{k-1} är en ortonormalt mängd, $S_{k-1} \times S_{k-1} = \pm S_{k-1}$ och $|S_{k-1}| = 2^k - 1$.
Låt $y_1, y_2 \in S_{k-1}$. Enligt definition är varje element i S_k på formen y_1, u_k, eller $y_1 \times u_k$.

Från (1.1), (1.2), och (1.6) har vi:

(1) $y_1 \cdot (y_2 \times u_k) = u_k \cdot (y_1 \times y_2) = 0$ eftersom $u_k \perp S_{k-1}$ och $y_1 \times y_2 \in S_{k-1}$.
(2) $(y_1 \times u_k) \cdot (y_2 \times u_k) = u_k \cdot ((u_k \times y_1) \times y_2) = -u_k \cdot (u_k \times (y_1 \times y_2)) = 0$

Det följer att S_k är en ortonormal mängd.

Nästa steg blir att visa från (1.1), (1.2), (1.5)och (1.6) at vi har:

(1) $(y_1 \times u_k) \times (y_2 \times u_k) = -y_1 \times (u_k \times (y_2 \times u_k)) = -y_1 \times y_2$
(2) $y_1 \times (y_2 \times u_k) = -((y_1 \times y_2) \times u_k)$ and $y_1 \times (y_1 \times u_k) = -u_k$
(3) $(y_1 \times u_k) \cdot (y_1 \times u_k) = y_1 \cdot (u_k \times (y_1 \times u_k)) = y_1 \cdot y_1 = 1$

Det följer att S_k är en ortonormal mängd och $S_k \times S_k = \pm S_k$.
Notera slutligen att $|S_k| = 2\ |S_{k-1}| + 1 = 2^{k+1} - 1$, vilket skulle bevisas.

Tabeller för vektorprodukten i R^3 och R^7

Vi kan nu ställa upp en tabell för vektorprodukten i R^3. För att förenkla notationen gör vi följande definition av vektorerna $e_1 := u_0$, $e_2 := u_1$, $e_3 := u_0 \times u_1$. Vi ser att det stämmer överens med det vi vet om multiplikation mellan i, j och k.

×	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

I tabellen ovan har vi använt (1.2), (1.5) och (1.6) för att räkna ut den enskilda vektorprodukten. Som ett exempel visar vi hur det går till: $e_1 \times e_3 = u_0 \times (u_0 \times u_1) = -u_1 = -e_2$. De andra räknas ut på liknande sätt.

Om nu $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ och $v = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ har vi
$u \times v = (x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3) \times (y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3) = x_1y_1(e_1\times e_1) + x_1y_2(e_1\times e_2) + x_1y_3(e_1 \times e_3) + x_2y_1(e_2 \times e_1) + x_2y_2(e_2 \times e_2) + (e_2 \times e_3) + x_3y_1(e_3 \times e_1) + x_3y_2(e_3 \times e_2) + x_3y_3(e_3 \times e_3)$. Med utgångspunkt i tabellen ovan kan vi lett förenkle detta till följande:

$u \times v = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_3y_1)e_3$, vilket är den bekanta formeln för vektorprodukt i R^3.

Utan att gå ytterligare in på detaljer för vektorprodukten i R^7 vill jag visa hur tabellen för multiplikation ser ut.

×	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	0	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	0

För den vakne Sudoku-lösaren kommer mönstret att vara bekant, nämligen att man (utom för $e_i \times e_i = 0$) har ett element av varje valör (antigen med positivt eller negativt tecken) i varje kolumn och också i varje rad.

För mer detaljer om uträkningen i R^7 hänvisas till Mcloughlin[67].

Varför vektorprodukten inte existerar i övriga dimensioner

Lemma 4. Om $u = (u_0 \times u_1)+(u_1 \times u_3)$ och $v = (u_1 \times u_2)-(((u_0 \times u_1)\times u_2)\times u_3)$ då är $u \times v = 0$ *and* $u \perp v$.

Bevis. Genom att använda (1.2), (1.5), (1.6), och den bilinjära egenskapen framgår det att $u \times v = 0$. Notera sedan att $u_0 \times u_1$, $u_1 \times u_3$, $u_1 \times u_2$, och $((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3$ alla är element i S_i om $i \geq 3$. I enlighet med Lemma 3 bildar alla dessa vektorer en ortonormal mängd, vilket betyder att $u \perp v$.

Lemma 5. Om $u = (u_0 \times u_1)+(u_1 \times u_3)$ och $v = (u_1 \times u_2)-(((u_0 \times u_1)\times u_2)\times u_3)$ då är $(u \cdot u)(v \cdot v) \neq (u \times v) \cdot (u \times v) + (u \cdot v)^2$

Bevis. Genom att använda föregående lemma och lemma 3, har vi $(u \times v) = 0$, $(u \cdot u) = 2$, $(v \cdot v) = 2$, and $(u \cdot v) = 0$. Resultatet följer.

Teorem 1. En vektorprodukt kan existera i R^n om och endast om $n = 3$ eller 7. Dessutom existerar det ortonormala baser S1 och S2 för R^3 and R^7 respektive sådana att $S_i \times S_i = \pm S_i$ för i = 1 eller 2.

Bevis. Från Lemma 3 har vi att vektorprodukten endast kan existera i R^n om $n = 2^{k+1} - 1$. Dessutom säger Lemma 4 och 5 att om vi försöker definiera en vektorprodukt i $R^{2^{k+1}-1}$ så håller inte alltid den Pythagoreiska egenskapen när $k \geq 3$. Eftersom vi har visat att det finns ett sådant exempel där denna egenskap inte håller har vi bevisat att R^3 och R^7 är de enda dimensionerna där en vektorprodukt kan existera.

Villkoren för vektorproduktens existens bevisades första gången 1943 av Beno Eckman (1917-2008) inom algebraisk topologi, men med svagare villkor[68]. Grundläggande element kan man även hitta hos

[67] Mcloughlin 2012, 4-5.
[68] ibid, 2.

Adolf Hurwitz (1859-1919) och hans arbete med oktonioner[69]. Om man önskar att fördjupa sig ytterligare i diskussionen kring vektorprodukten hittar man två fullständiga bevis som liknar på Peter Mcloughlins hos Bertram Walsh (1967) och William S. Massey (1983).

Konklusion

Matematiken är en vetenskap där i princip all verksamhet föregår på det abstrakta planet. Även om det finns fysiska tillämpningar så är algebra och vektorer matematiska begrepp som har skapats genom olika tankeexperiment och manipulation med storheter. En mental barriär bröts när man kunde tänka på $\sqrt{-1}$ som ett verkligt tal och en annan begränsning försvann när man började resonera kring n-dimensionella rums existens. Vektorerna kom till i skärningspunkten mellan båda dessa upptäckter och kunskap om dessa har visat sig ha vida användningsområden. När vi här har bevisat vektorproduktens existens i tre och sju dimensioner och har visat att den inte existerar i någon annan dimension (förutom noll och en) har vi nådd en yttre gräns för just detta specifika område inom matematiken. Dock är det så att nästa generations matematiker kommer att avancera vidare och söka att bryta nya barriärer i vårt matematiska tänkande.

[69] Mcloughlin 2012, 2.

Referenslista

Crowe, Michael J. (1967). *A History of Vector Analysis – The Evolution of the Idea of a Vectorial System.* New York: Dover Publications. Reviderad 1985.

Kline, Morris (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York/Oxford: Oxford University Press. Reviderad 1990.

Knutsen, Henning (2006). Omvendt blir det motsatt. *Naturen 130* (6), 289-300. Oslo: Universitetsforlaget.

Kolmogorov, A. N. & Yushkevich A. P. (Eds.). (1981). *Mathematics of the 19th Century – Geometry, analytic function theory.* Basel: Birkhäuser Verlag.

Kumaran, V. (2007). Josiah Willard Gibbs. *Resonance 12* (7), 4-11.

Lilja, Katarina (2013). *Kvaternioner – algebraiska och geometriska aspekter*. Examensarbete Uppsala Universitet, Matematiska Institutionen.

Massey William S. (1983). Cross Products of Vectors in Higher Dimensional Euclidian Spaces. *The American Mathematical Monthly, 90,* (10), 697-701. Washington DC: Mathematical Association of America. Från http://www.jstor.org/stable/2323537.

Mcloughlin, Peter F. (u.å.) Basic Properties of Cross Products. California State University, San Bernardino. Från www.math.csusb.edu/faculty/pmclough/BP.pdf.

Mcloughlin, Peter F. (2012). When Does a Cross Product on R^n exist? Ver. 7, Okt. 2013. New York: Cornell University Library. Från http://arxiv.org/abs/1212.3515v7.

Newton, Sir Isaac (1687) *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles – of Natural Philosophy and His System of the World;* översatt till engelska av Andrew Motte i 1729; Florian Cajori (Ed.). Nypublicering 1946. Berkley, California: University of California Press.

Rowe, David E. (2010) Debating Grassmann's Mathematics: Schlegel versus Klein. *The Mathematical Intelligencer 32*(1), 41-48.

Unz, H. (1963). Oliver Heaviside (1850-1925). *IEEE Transactions on Education 6,* (1), 30-33.

Walsh, Bertram (1967). The Scarcity of Cross Products on Euclidean Spaces. *The American Mathematical Monthly, 74* (2), 188-194.

Warren, Rev. John (1828). *A treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities.* Cambridge: J. Smith printer to the University.

Wessel, Caspar (1799). Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane och sfæriske Polygoners Opløsning. *Archiv for Mathematik og Naturvitenskab 18,* 5-69. Nypublicering från 1895.