UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2014:39

Fibonacci och hans matematik

En titt på Fibonaccis matematiska liv och det han lämnat efter sig

Leila Wettergren

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare och examinator: Gunnar Berg
Juni 2015

Department of Mathematics
Uppsala University

Innehållsförteckning

Leonardo Fibonacci[1]

Bakgrund

Leonardo av Pisa föddes 1170 i Pisa, han kom senare att kallas Fibonacci, vilket betyder ”son av Bonacci”, efter hans far Guglielmo Bonacci. Fibonacci och hans familj flyttade till staden Bugia, belägen vid Medelhavet. Där lät fadern sin son bli undervisad i matematik av en muslimsk lärare, vilket innebar att Fibonacci fick lära sig den matematik i form av algebra och aritmetik som araberna utvecklat under en väldigt lång tid, dessutom fick han lära sig att använde de indiska siffrorna istället för endast de romerska siffrorna.[2]

Att Fibonacci fick lära sig detta och använde sig av de indiska siffrorna i sin bok *Liber abaci*, banade väg för det indiska siffersystemet i hela världen. Det tog visserligen tid innan de siffrorna fick den största platsen på grund av skepticism från bland annat bankirer, men nu används de i större delen av världen, bland annat av oss, tack vare deras överlägsna smidighet i jämförelse med romerska siffror. [3]

Liber abaci är en bok om räknekonst av Fibonacci som gavs ut första gången 1202, det kom en ny upplaga av boken 1228. Den består av 15 kapitel och behandlar allt från heltalen till lösningar av ekvationer med olika svårighetsgrader. Det kanske mest kända problemet som nämns i *Liber abaci* är det så kallade ”Kaninproblemet”, som kommer beröras mer i nästkommande avsnitt. Utöver *Liber abaci* så har Fibonacci givit ut två andra böcker om matematik: *Practica geometricae* (1223) och *Liber Quadratorum* (1225) , dessutom publicerade han två skrifter: *Flos* och *Epistola ad Magistrum Theodorum.*[4]

---

[1] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a2/Fibonacci.jpg/220px-Fibonacci.jpg
[2] Fibonaccitalen och gyllene snittet, Bengt Ulin, 2008, s. 10
[3] Ulin, 2008, s. 10
[4] Ulin, 2008, s. 10-11

Fibonaccis talserie

Kaninproblemet

Det som ledde till att Fibonacci fann den välkända talföljden, som numera kallas Fibonaccitalserien, var det så kallade Kaninproblemet, som han tar upp i sin bok *Liber Abaci* på s.123-124 i den upplaga som släpptes 1228.

Kaninproblemet såg ut på följande sätt:

"How many pairs of rabbits can be bred from a single pair in one year?"

"Someone put a pair of rabbits in a certain place, entirely surrounded by a wall, to find out how many pairs of rabbits can be bred from it in one year. The nature of these rabbits is such that every month a pair of rabbits produces another pair, and rabbits start breeding in the second month after their birth.

As the first pair breeds a pair in the first month, then duplicate it and there will be 2 pairs in a month. From these pairs, one – namely the first – gives birth in the following month to another pair, and thus there are 3 pairs in the second month. From these three pairs in one month two will become pregnant, so that two more pairs of rabbits will be born in the third month, and the number of pairs will reach 5. From these in the same month three will be pregnant, so that there will be 8 pairs of rabbits in the fourth month. From these pairs five will breed five other pairs, which added to the eight pairs will give 13 pairs in the fifth month. From these the five pairs which were born during the fifth month will not conceive in that month, but the other eight will, so that there will be 21 pairs in the sixth month. Adding these to the 13 pairs that will be born in the next month, there will be 34 pairs in the seventh month. Adding these to the 21 pairs born in the next month, gives 55 pairs in the eight month. Adding these to the 34 pairs born in the next month, gives 89 pairs in the ninth month. Adding these to the 55pairs born in the next month, gives 144 pairs in the tenth month. Adding these to the 89 pairs born in the next month, gives 233 pairs in the eleventh month. To these we finally add the 144 pairs born next month and so there will be 377 pairs in the twelfth month. This is the number of pairs produced from the first pair at the given place by the end of one year…"[5]

En tabell över kaninparens förökning:

Månad	Antal kaninpar	F_n
0	1 (ursprungspar)	1
1	2 (ursprungspar föder nytt par)	2
2	3 (ursprungsparet får ännu ett par + paret som inte kan föröka sig än)	3
3	3+2 (ursprungsparet får ett par + nya paret får ett par + nya paret som inte kan föröka sig än)	5
4	5+3	8

[5] Citerat ur Fibonacci Numbers, Nikolai Vorobiev, 2002, s.1-2

5	8+5	13
6	13+8	21
7	21+13	34
8	34+21	55
9	55+34	89
10	89+55	144
11	144+89	233
12	233+144	377

Rekursiva talföljder

Fibonaccis talföljd är ett exempel på en rekursiv talföljd. En rekursiv talföljd är en följd av tal där varje tal kan beräknas med hjälp av ett eller flera av de föregående talen. Om F_n är det n:te Fibonaccitalet har vi:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Vi har också två startvärden:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1.$$

Om man använder dessa startvärden får man fram Fibonaccitalserien på följande vis:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377…

Utgående från ovanstående uttryck kan man med matematisk induktion bevisa ett flertal olika formler och ett exempel på ett sådant bevis ges i följande avsnitt.

Fibonaccitalen & Lucastalen

Det finns en annan talföljd som kallas Lucastalen, L_n, som definieras med samma rekursionsformel som Fibonaccitalen, det vill säga:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

men Lucasföljdens startvärden skiljer sig från Fibonacciföljdens, de ser ut såhär:

$$L_1 = 1, L_2 = 3.$$

De första Lucastalen är alltså: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29…

Ett samband mellan Fibonacci- och Lucastalen ges av:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, \qquad n > 0$$

som kan bevisas med matematisk induktion.

Bevis: Först vill vi visa att det är sant för $n = 1$ eftersom $n > 0$.

$$L_1 = F_2 + F_0$$

vilket stämmer eftersom $L_1 = 1$, $F_2 = 1$ och $F_0 = 0$, vi har nu visat att det är sant för $n = 1$.

Vi antar nu att det är sant för alla tal mindre än eller lika med n och visar nu att det då är sant för $n + 1$, det vill säga:

$$L_{n+1} = F_{n+2} + F_n.$$

Antagandet ovan medför nu att

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

$$L_{n-1} = F_n + F_{n-2}$$

vilket ger

$$L_{n+1} = (F_{n+1} + F_{n-1}) + (F_n + F_{n-2}) = (F_{n+1} + F_n) + (F_{n-1} + F_{n-2}).$$

Slutligen ger rekursionsformeln för Fibonaccitalen att

$$L_{n+1} = F_{n+2} + F_n,$$

precis vad vi ville ha. Resultatet följer nu med hjälp av induktionsaxiomet.

Det gyllene snittet

Det gyllene snittet tas för första gången upp i Euklides *Elementa*, bok II, Euklides benämner då detta som ”extreme and mean ratio” [6]. Förhållandet tas upp som en endimensionell figur i form av en sträcka AB som delas i punkten C så att

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$$

om CB = 1 och AC = x på följande sätt:

så får man att

$$\frac{x}{1} = \frac{1 + x}{x}.$$

Sträckan är som nämnt konstruerad så att $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$, alltså är $\frac{x}{1} = \frac{1+x}{x}$ och om vi förenklar detta så får vi $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$, en ekvation som vi kommer att återkomma till strax.

[6] The Golden Ratio, Mario Livio, 2002, s.78

Om vi nu tittar på följande kedjebråk:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

och skriver på följande sätt:

$$x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

så får vi att $x = 1 + \frac{1}{x}$ eftersom kedjebråket fortsätter i oändligt antal upprepningar så är x identisk med det högra ledets nämnare.[7]

Om man nu ska lösa ekvationen $x = 1 + \frac{1}{x}$ får vi

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Vi har nu ekvationen $x^2 - x - 1 = 0$, vilken är samma som den tidigare nämnda ekvationen då vi dividerade sträckorna med varandra. Om vi nu löser denna ekvation får vi att

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 \approx 1{,}6180339 \ldots$$

$$x_2 \approx -0{,}6180339 \ldots$$

Vi har alltså fått ut att $x_1 = \varphi_+$ och $x_2 = \varphi_-$.

Det gyllene snittet noteras på olika sätt beroende på var man tittar, i detta arbete kommer det gyllene snittet definieras som φ och kommer förekomma både som positiv och negativ kvot, på följande sätt:

$\varphi_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ och $\varphi_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

[7] Livio, s.84

Samband mellan det gyllene snittet och Fibonaccitalserien.

Varje tal i Fibonaccitalserien kan fås med hjälp av en formel som kallas Binets formel och ser ut på följande sätt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

där n är ordningen på det Fibonaccital vi vill finna, vi ser att denna formel innehåller talen φ_+ och φ_-. För att räkna ut det n:te Fibonaccitalet behöver vi alltså använda formeln som ger gyllene snittet.

Om vi nu arbetar oss vidare genom att titta på kedjebråksutvecklingen för gyllene snittet, som är

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

och om vi nu vill se hur dessa tal ser ut då vi avbryter kedjebråket på olika platser och vi börjar från början med 1 och arbetar oss framåt och stoppar efter vi gjort detta 6 gånger.

$1 = \frac{1}{1} = 1$ $\quad 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2$ $\quad 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$ $\quad 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5} = 1{,}6$ $\quad 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} = \frac{13}{8} = 1{,}625$

Vi ser då att vid första avbrottet får vi $\frac{1}{1}$, i andra får vi $\frac{2}{1}$, tredje ger $\frac{3}{2}$, fjärde ger $\frac{5}{3}$, femte ger $\frac{8}{5}$ och den sjätte bråkutvecklingen ger till sist $\frac{13}{8}$, för varje steg vi tar så konvergerar kvoten mer och mer mot det gyllene snittet och vi ser dessutom ett tydligt samband med Fibonaccis talserie. Det är hela tiden två på varandra följande Fibonaccital som ger oss dessa kvoter som närmar sig det gyllene snittet, alltså: kvoten $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ konvergerar mot φ_+ då n ökar.[8]

Som vi kan se finns det tydliga samband mellan dessa två fantastiska matematiska fenomen.

Binets formel

För att räkna ut det n:te talet i Fibonaccitalserien utan att behöva känna till alla tal före det n:te talet, kan man använda sig av Binets formel, en formel som användes av både Leonard Euler (1707-1783), Abraham de Moivre (1667-1754) och återupptäcktes senare av

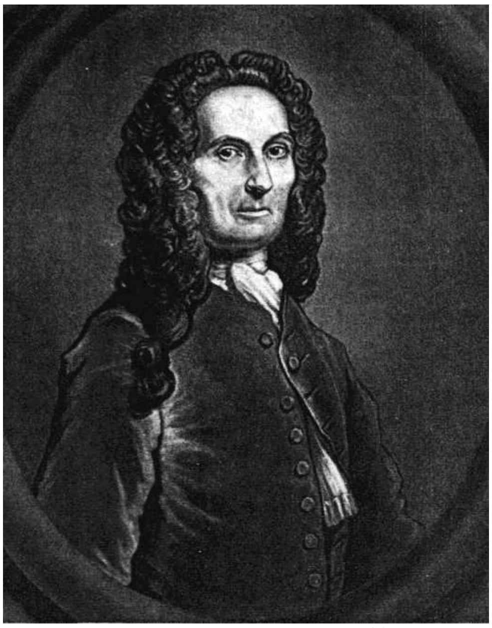
[8] Livio, s.102

fransmannen Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856), som i och med återupptäckten blev personen som fick ge namn åt formeln.[9]

Formeln är direkt beroende av formeln för det gyllene snittet och ser, som vi såg tidigare, ut på följande sätt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$


Jacque Binet[10]


Abraham de Moivre[11]


Leonard Euler[12]

[9] Livio, s.108
[10] http://apprendre-math.info/history/photos/Binet.jpeg
[11] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1b/Abraham_de_moivre.jpg

Induktionsbevis

Här följer ett induktionsbevis för Binets formel. Innan bevisets start vill jag påminna om att

$\varphi_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ och att $\varphi_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Vi vet att φ_+ och φ_- är rötter till ekvationen $x^2 = x + 1$ och om dessa kan vi nu bevisa.

<u>Hjälpsats</u>: Om x är en rot till $x^2 = x + 1$, gäller formeln $x^n = F_n x + F_{n-1},\ > 0$ (*)

<u>Bevis</u>: Vi använder induktion

Först vill vi visa att det är sant för $n = 1$, eftersom $n > 0$.

$$x^1 = F_1 x + F_0$$

vilket stämmer, eftersom $F_1 = 1\ och\ F_0 = 0$ och då får vi $x = 1 \cdot x + 0 \iff x = x$.

Vi antar nu att det är sant för ett tal $n > 0$ och visar nu att det då är sant för $n + 1$, det vill säga:

$$x^{n+1} = F_{n+1} x + F_n.$$

Vi vet att

$$x^{n+1} = x^1 \cdot x^n = x \cdot x^n$$

och därför kan vi ersätta x^{n+1} med $x \cdot x^n = x(F_n x + F_{n-1})$ enligt (*) och får

$$x^{n+1} = F_n x^2 + F_{n-1} x$$

och eftersom $x^2 = x + 1$ så följer nu att:
$x^{n+1} = F_n(x + 1) + F_{n-1} x = F_n x + F_n + F_{n-1} x = x(F_n + F_{n-1}) + F_n = F_{n+1} x + F_n$.

Alltså har vi visat att (*) medför

$$x^{n+1} = F_{n+1} x + F_n$$

och enligt induktionsaxiomet gäller då $x^n = F_n x + F_n$, för alla $n > 0$.

Nu ska vi utifrån detta härleda Binets formel $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

genom att använda sambandet $x^n = F_n x + F_{n-1}$ och ersätta x med $\varphi_+\ och\ \varphi_-$ på följande sätt:

$$A\colon \varphi_+^n = F_n \varphi_+ + F_{n-1}$$

$$B\colon \varphi_-^n = F_n \varphi_- + F_{n-1}.$$

[12] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/60/Leonhard_Euler_2.jpg/480px-Leonhard_Euler_2.jpg

Vi subtraherar B från A och vi får:

$$\varphi_+{}^n - \varphi_-^n = F_n(\varphi_+ - \varphi_-)$$

som leder till

$$F_n = \frac{\varphi^n{}_+ - \varphi_-^n}{\varphi_+ - \varphi_-}$$

om vi nu har i åtanke att $\varphi_+ - \varphi_- = \sqrt{5}$ ser vi att

$$F_n = \frac{\varphi_+{}^n - \varphi_-^n}{\sqrt{5}}$$

och vi har härlett Binets formel.

Fibonacci och kongruenta tal

När man hör ”kongruenta tal” så är troligen det första man tänker på den form då man skriver $a \equiv b\ (mod\ n)$ eller kongruenta trianglar. Detta är inte det vi ska titta närmare på nu, det finns nämligen flera typer av kongruenta tal. Vi ska nu se på kongruenta tal som bland annat Fibonacci såg som kongruenta.

Ett positivt heltal N sägs vara ett kongruent tal om det finns en rationell rät triangel[13] med arean N. Om x och y är sidlängderna på benen och z är hypotenusan får vi enligt Pythagoras sats att $x^2 + y^2 = z^2$ och triangelns area blir $\frac{xy}{2}$. Då säger man att N är ett kongruent tal om $\frac{xy}{2} = N$.[14]

Vi ska nu titta på ett problem som är ekvivalent med problemet om kongruenta tal.

Fibonacci tar i *Liber Quadratorum* upp kongruenta tal på ett annat sätt än det vi nyss tittat på. Det som Fibonacci tar upp är besläktat med följande problem: Vilka positiva heltal är den gemensamma skillnaden hos en aritmetisk talföljd av tre kvadrater av heltal? Som exempel kan vi titta på följande följd av kvadrater:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144 \ldots$$

då kan vi se att 1, 25 och 49 är en sådan följd där den gemensamma skillnaden är 24.

Fibonacci sa att ett heltal är en congruum, alltså ett kongruent tal, om det finns ett heltal *x* så att $x^2 \pm n$ båda är kvadrater.

[13] Rationell rät triangel innebär att alla sidor är rationella tal och att triangeln är rät.
[14] Elementary Number Theory and Its Applications, Kenneth H. Rosen, 2011, s.560

Alltså: n är kongruent om det finns ett heltal x så att $x^2 - n,\ x^2, x^2 + n$ är en aritmetisk talföljd av tre kvadrater där den gemensamma skillnaden är n.[15]

Ordet *congruum* kommer från det latinska ordet congruere, som betyder ”meet together”, vilket de tre kvadraterna gör i den aritmetiska talföljden.[16]

Vi visar nu att om man frågar sig huruvida ett positivt heltal *N* är ett kongruent tal är samma sak som att fråga sig huruvida det är en gemensam differens till en aritmetisk följd av tre kvadrater. Först antar vi att det positiva heltalet *N* är ett kongruent tal. Då finns det positiva heltal a, b, och c så att $a^2 + b^2 = c^2$ och $\frac{ab}{2} = N$. Notera att $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = c^2 + 2ab$ och $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) - 2ab = c^2 - 2ab$. Alltså är $(a-b)^2, c^2, (a+b)^2$en aritmetisk följd av tre kvadrater med den gemensamma skillnaden $2ab = 4\left(\frac{ab}{2}\right) = 4N$. Om vi nu dividerar alla termer i denna följd med 4 produceras den aritmetiska följden $((a-b)/2)^2$, $(c/2)^2$, $((a+b)/2)^2$. Detta är en aritmetisk följd av tre kvadrater av rationella tal med gemensam skillnad *N.*[17] Här kommer ett exempel:

Om vi ska visa att 5 är ett kongruent tal för att det är arean av den räta triangeln med sidlängderna $a = 3/2, b = 20/3$ och $c = 41/6$. Alltså är $(\left(\frac{3}{2}\right) - (\frac{20}{3})/2)^2 = (31/12)^2$, $(\left(\frac{41}{6}\right)/2)^2 = (41/12)^2$, och $(\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{20}{3}\right))^2 = (49/12)^2$ en aritmetisk följd av tre kvadrater med gemensamma skillnaden 5. [18]

Vi såg tidigare att 1, 25, 49 är en aritmetisk följd av tre kvadrater med gemensam skillnad $24 = 2^2 \cdot 6$. Om vi dividerar varje term i följden med $2^2 = 4$ så får vi istället följden

$1/4,\ 25/4, 49/4$ där den gemensamma skillnaden är $N = 6$, vilket är kvadratfritt. För att hitta en rationell rät triangel med sidlängder *a*, *b* och *c* med arean 6 använder vi oss av värdet $x^2 = 25/4$ i vår konstruktion. Vi får då en rät triangel med sidorna *a*, *b*, *c* där

$$a = \sqrt{(5/2)^2 + 6} - \sqrt{(5/2)^2 - 6} = \sqrt{49/4} - \sqrt{1/4} = 7/2 - 1/2 = 3$$

$$b = \sqrt{(5/2)^2 + 6} + \sqrt{(5/2)^2 - 6} = \sqrt{49/4} + \sqrt{1/4} = 7/2 + 1/2 = 4$$

och $c = 2x = 2(5/2) = 5$.

Vi kan sammanfatta våra observationer med följande sats: Det positiva heltal *N* är ett kongruent tal om och endast om *N* är den gemensamma skillnaden hos en aritmetisk följd av tre kvadrater som är rationella tal.

[15] Rosen, s.565-566
[16] Rosen, s. 565
[17] Rosen, s. 565
[18] Rosen, s. 565-566

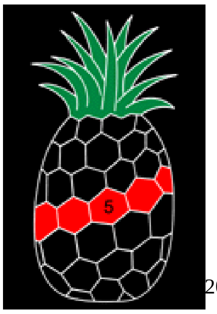
Fibonacci visade dessutom att 7 är ett kongruent tal,[19] troligen med hjälp av en rationell rät triangel med katetlängderna 175 respektive 288 och hypotenusans längd 337, då får vi att arean blir $A = \frac{175 \cdot 288}{2} = 25200 = 7 \cdot 60^2$.

Om man nu dividerar alla sidor med 60 för att få en triangel som är likformig med den första och dessutom ha ett kvadratfritt tal så får vi sidorna $\frac{175}{60}, \frac{288}{60}$ och $\frac{337}{60}$ vilket ger oss följande ekvation för arean $A = \frac{\frac{175}{60} \cdot \frac{288}{60}}{2} = \frac{14}{2} = 7$. Då har vi en rationell rät triangel med arean 7 och därför är 7 ett kongruent tal.

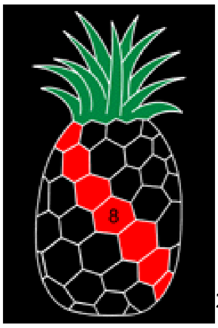
Övrigt

Förekomst i konst och natur

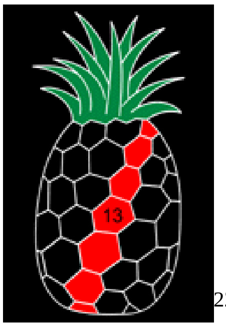
Det är fascinerande hur man kan finna samband mellan Fibonaccis talserie och vår natur. Naturen har arrangerat ett flertal växter på ett sätt så att blad och spiraler är ett visst Fibonaccital till antalet. Till att börja med tänkte jag ta upp ananasen. Ananasen har, som man kanske vet, ett skal bestående av sammansatta hexagoner, vilket innebär att det kan uppstå spiraler i tre riktningar på följande sätt:



[20]



[21]

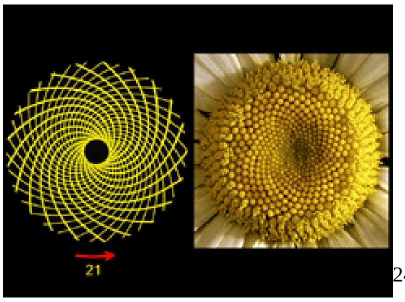


[22]

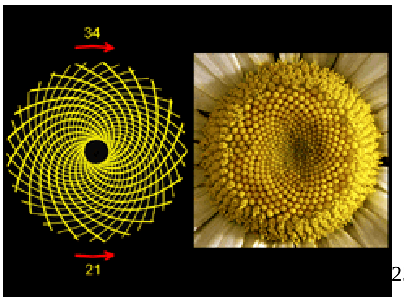
det är alltså 5 spiraler i en riktning, 8 spiraler i andra riktningen och 13 i den tredje riktningen. Tre stycken på varandra följande Fibonaccital.[23]

Tusenskönans frön är nästa exempel, fröna organiserar sig i spiraler medsols och motsols som på följande sätt:

[19] Rosen, s.560
[20] http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/fib34sm.gif
[21] http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/fib35sm.gif
[22] http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/fib36sm.gif
[23] http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/jbfibslide.htm



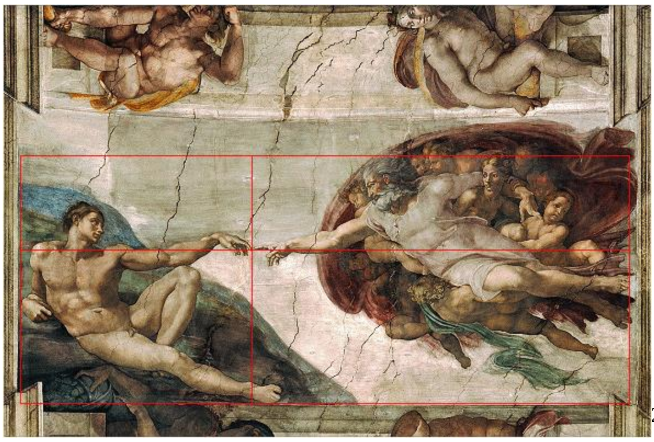
[24]



[25]

som bilden avslöjar är det 21 spiraler åt ena hållet och 34 spiraler åt andra hållet, även här har vi två på varandra följande Fibonacci-tal. Hos både ananaser och tusenskönor k.an antalet spiraler variera med växtens storlek men det sorteras alltid i ett visst antal Fibonaccital.[26]

Fibonaccitalen visar sig inte bara i naturen utan även i konst och arkitektur. Ett exempel är Michelangelos ”The Creation of Adam”, där Guds och Adams fingrar rör vid varandra i precis den gyllene punkten i förhållande till längden och bredden om man tittar på arean som omger de båda.[27]


[28]

Fibonacci Quarterly

Fyra gånger per år ger The Fibonacci Association[29] ut tidsskriften The Fibonacci Quarterly. Tidsskriften berör fibonaccitalen och andra relaterade matematiska förekomster, tidsskriften berör dessutom både gammal och ny forskning som är relaterad till ämnet.[30] Att man ger ut ett magasin fyra gånger per år i dagsläget som behandlar Fibonaccis upptäckter och relaterade problem visar storheten i hans verk. Att detta är något som studeras än idag och fortfarande fascinerar människor världen över är ett tecken på att denne man utfört stordåd i matematikens värld.

---

[24] http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/fib30sm.gif
[25] http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/fib31sm.gif
[26] http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/jbfibslide.htm
[27] http://www.goldennumber.net/art-composition-design/
[28] http://s0.goldennumber.net/wp-content/uploads/michelangelo-creation-of-adam-golden-ratio.gif
[29]ett sällskap som bildades 1963och intresserar sig för Fibonaccital, relaterade nummer och problem http://www.mscs.dal.ca/fibonacci
[30] http://www.fq.math.ca/

Referenser

Tryckta källor

Livio, Mario, The Golden Ratio, 2002

Rosen, Kenneth H, Elementary Number Theory and Its Applications, 2011

Ulin, Bengt, Fibonaccitalen och det gyllene snittet, 2008

Vorobiev, Nicolai N, Fibonacci Numbers, 2002

Internetbaserade källor

http://www.goldennumber.net/art-composition-design/

http://www.mscs.dal.ca/fibonacci

http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/jbfibslide.htm

http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/jbfibslide.htm

Figur- och bildkällor

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a2/Fibonacci.jpg/220px-Fibonacci.jpg

http://apprendre-math.info/history/photos/Binet.jpeg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1b/Abraham_de_moivre.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/60/Leonhard_Euler_2.jpg/480px-Leonhard_Euler_2.jpg

http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/fib34sm.gif

http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/fib35sm.gif

http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/fib36sm.gif

http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/fib30sm.gif

http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/fib31sm.gif

http://s0.goldennumber.net/wp-content/uploads/michelangelo-creation-of-adam-golden-ratio.gif