UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2015:6

En introduktion till de surreella talen

John Larsson

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare och examinator: Gunnar Berg
Juni 2015

Department of Mathematics
Uppsala University

Innehåll

1 Introduktion

John H. Conway, från Cambridge University uppfann de surreella talen 1969 med avsikten att beskriva olika aspekter av spelteori, men självaste termen ”surreal numbers” introducerade av Donald Knuth, som är en datavetare från Standford University. Det var en dag år 1972 då Knuth och Conway träffades för att äta lunch som Knuth lärde sig om Conways nya system att konstruera tal. Detta ledde till att Knuth skrev novellen *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Hapiness*, publicerades 1974, som handlar om den unga mannen Bill och den unga kvinnan Alice som är på en romantisk resa på en isolerad ö i Indiska oceanen. Där finner de en uråldrig sten med beskrivningar av tal och tillsammans utforskar de texten och bygger upp Conways talsystem. Novellen hade inte bara avsikten att lära ut Conways teori, även att lära ut hur man kan gå tillväga för att utveckla en sådan teori.[1]

På den uråldriga stenen fann Bill och Alice en inristad text som beskriver Conways två regler och skapelsen av de första surreella talen:

> *"In the beginning, everything was a void, and J. H. W. H. Conway began to create numbers. Conway said, "Let there be two rules which bring forth all numbers large and small. This shall be the first rule: Every number corresponds to two sets of previously created numbers, such that no member of the left set is greater than or equal of any number of the right set. And the second rule shall be this: One number is less than or equal to another number if and only if no member of the first number's left set is greater than or equal to the second number's right set is less than or equal to the first number." ... And the first number was created from the void left set and void right set. Conway called this number "zero", and said that it shall be a sign to separate positive numbers from negative numbers. Conway proved that zero was less than or equal to zero, and he saw that it was good. And the evening and the morning were the day of zero. On the next day, two more numbers were created, one with zero as its left set and one with zero as its right set. And Conway called the former number "one", and the latter called "minus one". And he proved that minus one is less than but not equal to zero and zero is less than but not equal to one. And the evening ..."* [2]

[1] Donald Knuth, *Surreal Numbers How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness*, Tillgänglig http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/sn.html, (Hämtad 2015-04-14).

[2] Donald Knuth, *Surreal Numbers: How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness*, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974, ss. 6-7.

Enligt Conways två regler så kan vi från början när vi har ingenting skapa talet 0, vilket har en tom vänster mängd och en tom höger mängd. Här införs även konceptet ”dag” vilket vi säger att ”talet 0 skapades dag 0”. Nästa dag, dag 1, så kan vi skapa nya tal genom att sätta 0 i den vänstra mängden för det ena talet och sätta 0 i den högra mängden för det andra talet, och under dag 2 så kan vi skapa flera tal från de tidigare skapade talen och så vidare. På detta sätt så skapades alla surreella tal och till varje tal kan vi associera till den dag talet skapades.[3]

Conways första regel är beskriver definitionen för ett surreellt tal:

Definition 1: *Ett surreellt tal är ett par av mängder från tidigare skapade surreella tal. Mängderna är kända som ”den vänstra mängden” och ”den högra mängden”. Inget element i den högra mängden får vara mindre eller lika med något element i den vänstra mängden.*[4]

Om x är ett surreellt tal kan vi skriva $x = \{X_L \mid X_R\}$ och enligt *definition 1* så medför det att

$$\forall\, x_L \in X_L \;\forall\, x_R \in X_R : x_R \nleq x_L \tag{1.1}$$

Att skriva tal med notationen $x = \{X_L \mid X_R\}$ är något som den tyska matematikern Richard Dedekind införde när han konstruera de reella talen från de rationella talen. Hans metod var att dela in de rationella talen i två mängder: L och R, så att inget tal i L är större än något tal i R och han definierade de nya talet som $\{L \mid R\}$.[5]

Om (1.1) uppfylls så innebär det att den vänstra mängden och den högra mängden är välformat par av mängder.

Conways andra regel beskriver definitionen för ett välformat surreellt tal:

Definition 2: *Ett surreellt tal x är mindre eller lika med ett surreellt tal y om och endast om y är mindre eller lika med inget element av x:s vänstra mängd, och inget element i y:s högra mängd är mindre eller lika med x.*[6]

Vilket vi kan skriva *definition 2* som:

---

[3] Knuth, 1974, s.11.

[4] Claus Tøndering, *Surreal Numbers – An Introduction*, 2005, s. 6, Tillgänglig http://www.tondering.dk/claus/sur16.pdf (Hämtad 2015-04-14).

[5] J. H. Conway, *On Numbers and Games*, London: Academic Press Inc. Ltd., 1976, s. 3.

[6] Tøndering, 2005, s.7.

$$x \leq y \Leftrightarrow \neg\exists\ x_L \in X_L : y \leq x_L \wedge \neg\exists\ y_R \in Y_R : y_R \leq x \tag{1.2}$$ [7]

I arbetet kommer vi hänvisa till *definition 2* om och om igen när vi arbetar med bevis för olika antaganden för surreella tal. I en del av bevisen kommer *definitionen 2* motsatta definition vara användbart:[8]

$$x \nleq y \Leftrightarrow \exists\ x_L \in X_L : y \leq x_L \vee \exists\ y_R \in Y_R : y_R \leq x \tag{1.3}$$

De surreella talen är en fullständig ordnade talkropp för viss addition, multiplikation och ordning, och det är den största ordnade talkroppen i den meningen att den innehåller en isomorfisk kopia utav alla ordnade talkroppar. Särskilt kommer de surreella talen innefatta en identifierbar delmängd som har en isomorfism med de reella talen. Dessutom kommer de surreella talen innehålla Cantors oändliga ordinaltal och infinitesimaler, vilket medför att de surreella talen inte har en arkimedisk egenskap. I texten kommer vi titta på olika konstruktioner av surreella tal, titta på några grundläggande egenskaper hos surreella tal, beröra en del av de satser som visar att de surreella talen bildar en ordnad talkropp och introducera kort om hur de surreella talen kan användas för att analysera spelet Hackenbush.[9] Om läsaren vill läsa mer ingående om surreella tal så hänvisar vi till Philip Ehrlichs *The Absolute Arithmetic Continuum and The Unification of All Numbers Great and Small (2012)*.

2 De första surreella talen

Som vi nämnde i citatet från Donald Knuths *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Hapiness* så tänkte sig Conway att de surreella talen skapades under successiva dagar, sådan att vid dag n så skapades alla tal $\{L \mid R\}$ där varje element i den vänstra mängden och den högra mängden hade skapats från tidigare dagar. Det första surreella talet skapades då från den första dagen, nämligen dag 0. Så de surreella talens skapelseberättelse börjar från den ”nollte dagen” och sen nästa dag, dag 1, så skapades talen – 1 och 1 och så vidare. Detta illustrerade Conway med ett talträd i *Numbers and Games (1976)* (se figur 1 nedan).[10]

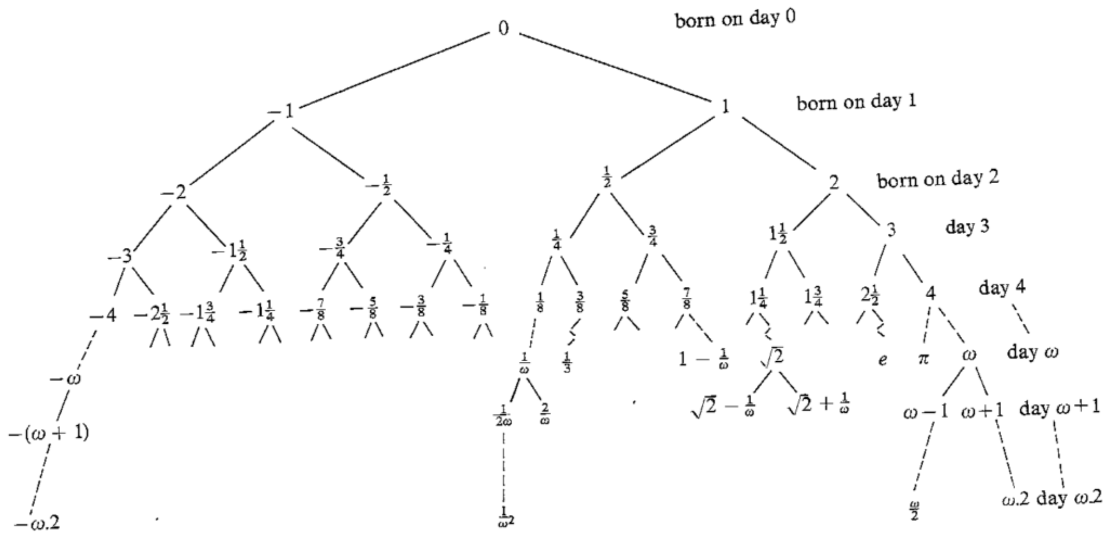
---

[7] Tøndering, 2005, s.8.

[8] Tøndering, 2005, s.15.

[9] Bela Bajnok, An Invitation to Abstract Mathematics, New York: Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013 s.343.

[10] Conway, 1977, s.10.



Figur 1. Conways representation av talträdet för surreella tal.
Källa: *Numbers and Games (1976).*

I Conways *Number and Games (1976)* så förklarar Conway innebörden av talträdet:

> *"Each node of the tree has two "children", namely the first later numbers born just to the left and right of it. We guess that on the n'th day the extreme numbers to be born are n and – n, and that each other number is the arithmetic mean of the numbers of the left and right of it. Happily, of course, this turns out to be the case. Supposing all this, we know all numbers born on finite days"*[11]

Conway använder sig av ordet "children" när han hänvisar till de tal som skapas åt vänster och höger om noderna i trädet. Vilket medför att alla element i den vänstra och högra mängden i ett surreellt tal är "föräldrar" till talet. För vilket surreellt tal som helst kan du gå tillbaka genom dess föräldrar, och genom dess föräldrars föräldrar och så vidare, tills du når det ursprungliga surreella talet 0.

2.1 Dag 0

Det första talet konstrueras genom att låta den vänstra mängden vara tom och högra mängden vara tom. Vi skriver den tomma mängden med beteckningen Ø, alltså det första surreella talet är {Ø | Ø}. En annan beteckning för tomma mängden är att skriva { } istället för Ø, vilket vi skriver det surreella talet som { | }. { | } upfyller *definition 1* då både den vänstra mängden och den högra mängden är tomma mängder. Alltså det finns inget element som kan strida emot definitionen.

[11] Conway, 1977, ss.11-12.

$\{ \mid \}$ är identiskt med noll och betecknas med 0:

$$\{ \mid \} \equiv 0 \tag{2.1}$$

När vi skriver ≡ för att beteckna att en relation mellan två tal så innebär att dessa är identiska. Alltså, att skriva 0 innebär att det är ett annat sätt att skriva $\{ \mid \}$.[12]

Vi bevisar att $\{ \mid \}$ uppfyller *definition 2*:

$$\{ \mid \} \leq \{ \mid \} \tag{2.2}$$

*Bevis***:** Enligt *definition 2* är (2.2) sant om följande påstående är sant:

$$\{ \mid \} \leq \{ \mid \} \Leftrightarrow \neg\exists\, x_L \in \emptyset : \{ \mid \} \leq x_L \wedge \neg\exists\, y_R \in \emptyset : y_R \leq \{ \mid \} \tag{2.3}$$

Påstående bevisar sig själv eftersom att det inte kan existera element i den tomma mängden. Med den meningen kan vi med all säkerhet säga att båda påståenden i (2.3) är sanna. Vi har alltså bevisat att $0 \leq 0$. [13] ☐

2.2 Dag 1

Från det första surreella talet så kan vi konstruera nya tal genom att låta 0 och Ø vara en del av mängden *L* eller *R* för de nya surreella talen. Vi får tre fall: $\{0 \mid \}$, $\{ \mid 0\}$ och $\{0 \mid 0\}$.

$\{0 \mid 0\}$ uppfyller inte *definition 1* eftersom $0 \leq 0$. Vilket medför att $\{0 \mid 0\}$ inte ett surreellt tal, det är ett så kallat pseudo-tal. $\{0 \mid \}$ och $\{ \mid 0\}$ så uppfyller definitionen då den tomma mängden har inga element som kan strida emot villkoret. $\{0 \mid \}$ och $\{ \mid 0\}$ är identiska med 1 och respektive – 1:[14]

$$\{0 \mid \} \equiv 1 \tag{2.4}$$

$$\{ \mid 0\} \equiv -1 \tag{2.5}$$

Vi visar att *definition 2* gäller för våra tal. Vi vill bevisa:

$$\{ \mid \} \leq \{0 \mid \} \tag{2.6}$$

Bevis: Enligt *definition 2* är (2.6) sant om följande påstående är sant:

---

[12] Tøndering, 2005, s.7.

[13] Tøndering, 2005, s.8.

[14] Conway, 1977, s.7.

$$\{\ |\ \} \leq \{0\ |\ \} \Leftrightarrow \neg\exists\ x_L \in \emptyset : \{0\ |\ \} \leq x_L \wedge \neg\exists\ y_R \in \emptyset : y_R \leq \{\ |\ \} \tag{2.7}$$

Enligt samma argument som tidigare så saknar den tomma mängden element. Så (2.7) är trivialt sant.[15] ☐

Vi vill även bevisa:

$$\{0\ |\ \} \nleq \{\ |\ \} \tag{2.8}$$

Bevis: Enligt *definition 2* är (2.8) sant om följande påstående är sant:

$$\{0\ |\ \} \nleq \{\ |\ \} \Leftrightarrow \exists\ x_L \in \{0\} : \{\ |\ \} \leq x_L \vee \exists\ y_R \in \emptyset : y_R \leq \{0\ |\ \} \tag{2.9}$$

$\exists\ x_L \in \{0\} : \{\ |\ \} \leq x_L$ är sant eftersom $\{\ |\ \} \leq 0$, vilket vi konstaterade i (1.4). ☐

Vi vill dessutom bevisa:

$$\{0\ |\ \} \leq \{0\ |\ \} \tag{2.10}$$

Bevis: Enligt *definition 2* är (2.10) är sant om följande påstående är sant:

$$\{0\ |\ \} \leq \{0\ |\ \} \Leftrightarrow \neg\exists\ x_L \in \{0\} : \{0\ |\ \} \leq x_L \wedge \neg\exists\ y_R \in \emptyset : y_R \leq \{0\ |\ \} \tag{2.11}$$

$\neg\exists\ x_L \in \{0\} : \{0\ |\ \} \leq x_L$ är sant eftersom vi bevisade tidigare att $\{0\ |\ \} \nleq 0$ är sant. $\neg\exists\ y_R \in \emptyset : y_R \leq \{0\ |\ \}$ är trivialt sant eftersom den tomma mängden saknar element.[16] ☐

Nu följer det att om x och y är surreella tal så medför det att om

$$x \leq y \wedge y \leq x \Leftrightarrow x = y \tag{2.12}$$

och om

$$x \leq y \wedge y \nleq x \Leftrightarrow x < y \tag{2.13}$$

Från det vi bevisade i (2.6), (2.8) och (2.10) så medför det att

$$\{\ |\ \} < \{0\ |\ \} \tag{2.14}$$

$$\{0\ |\ \} = \{0\ |\ \} \tag{2.15}$$

vilket är samma som att skriva (2.13) och (2.14) som

$$0 < 1 \tag{2.16}$$

---

15 Tøndering, 2005, s.8.

16 Tøndering, 2005, s.9.

$$1 = 1 \tag{2.17}$$

Genom samma metod, (1.15) och (1.16) kan vi bevisa de resterande relationerna mellan våra tre surreella tal:

$$\{\ |\ \} = \{\ |\ \} \tag{2.18}$$

$$\{\ |\ 0\} < \{\ |\ \} \tag{2.19}$$

$$\{\ |\ 0\} = \{\ |\ 0\} \tag{2.20}$$

$$\{\ |\ 0\} < \{0\ |\ \} \tag{2.21}$$

vilket är samma som att skriva (2.18), (2.19), (2.20) och (2.21) som [17]

$$0 = 0 \tag{2.22}$$

$$-1 < 0 \tag{2.23}$$

$$-1 = -1 \tag{2.24}$$

$$-1 < 1 \tag{2.25}$$

2.3 Dag 2

Utifrån talen – 1, 0 och 1 så har vi massor av olika mängder att arbeta med: { }, {-1}, {0} {1}, {-1,0}, {-1,1}, {0,1} och {-1,0,1}. Utgående från dessa kan vi konstruera totalt 18 välformade surreella tal. Nämligen: { | }, {-1 | }, { | -1}, {1 | }, { | 1}, {-1, 0 | }, {-1 | 0}, { | -1, 0}, {0, 1 | }, {0 | 1}, { | 0, 1}, {-1, 1 | }, {-1 | }, {-1, 1 | }, {-1, 0, 1 | }, {-1, 0 | 1}, {-1 | 0, 1 } och { | -1, 0, 1}.[18]

Genom att använda samma metod som tidigare kan vi bevisa att

$$\{0\ |\ \} < \{1\ |\ \} \tag{2.26}$$

$$\{\ |\ \} < \{0\ |\ 1\} \tag{2.27}$$

$$\{0\ |\ 1\} < \{0\ |\ \} \tag{2.28}$$

{1 | } och {0 | 1} är identiska med 2 och respektive $\frac{1}{2}$:

$$\{1\ |\ \} \equiv 2 \tag{2.29}$$

[17] Tøndering, 2005, s.10.

[18] Conway, 1977, s.8.

$$\{0 \mid 1\} \equiv \tfrac{1}{2} \tag{2.30}$$

Vi kan skriva (2.26), (2.27) och (2.28) som

$$1 < 2 \tag{2.31}$$

$$0 < \tfrac{1}{2} \tag{2.32}$$

$$\tfrac{1}{2} < 1 \tag{2.33}$$

Vi kan dessutom bevisa

$$\{\ \mid -1\} < \{0 \mid\ \} \tag{2.34}$$

$$\{-1 \mid 0\} < \{\ \mid\ \} \tag{2.35}$$

$$\{\ \mid 0\} < \{-1 \mid 0\} \tag{2.36}$$

Där $\{\ \mid -1\}$ och $\{-1 \mid 0\}$ är identiska med -2 och respektive $-\tfrac{1}{2}$:

$$\{\ \mid -1\} \equiv -2 \tag{2.37}$$

$$\{-1 \mid 0\} \equiv -\tfrac{1}{2} \tag{2.38}$$

Vi kan då skriva (2.34), (2.35) och (2.36) som

$$-2 < 1 \tag{2.39}$$

$$-\tfrac{1}{2} < 0 \tag{2.40}$$

$$-1 < -\tfrac{1}{2} \tag{2.41}$$

Nu finns det jämlikheter mellan dessa surreella tal. Vi undersöker följande påstående:

$$\{\ \mid\ \} \leq \{-1 \mid\ \} \tag{2.42}$$

Bevis: Enligt *definition 2* är (2.42) sant om följande påstående är sant:

$$\{\ \mid\ \} \leq \{-1 \mid\ \} \Leftrightarrow \neg\exists\ x_L \in \emptyset : \{-1 \mid\ \} \leq x_L \land \neg\exists\ y_R \in \emptyset : y_R \leq \{\ \mid\ \} \tag{2.43}$$

$\neg\exists\ x^L \in \emptyset : \{-1 \mid\ \}$ och $\neg\exists\ y_R \in \emptyset : y_R \leq \{\ \mid\ \}$ är trivialt sanna eftersom den tomma mängden saknar element. □

Vi undersöker följande påstående:

$$\{-1 \mid \} \leq \{ \mid \} \tag{2.44}$$

Bevis: Enligt *definition 2* är (2.44) sant om följande påstående är sant:

$$\{-1 \mid \} \leq \{ \mid \} \Leftrightarrow \neg\exists\, x_L \in \{-1\} : \{ \mid \} \leq x_L \wedge \neg\exists\, y_R \in \emptyset : y_R \leq \{-1 \mid \} \tag{2.45}$$

$\neg\exists\, x_L \in \{-1\} : \{ \mid \} \leq x_L$ är sant eftersom $0 \nleq -1$ och $y_R \in \emptyset : y_R \leq \{-1 \mid \}$ är trivialt sant eftersom den tomma mängden saknar element. □

Vi har bevisat att

$$\{ \mid \} = \{-1 \mid \} \tag{2.46}$$

$\{ \mid \}$ och $\{-1 \mid \}$ har samma värde, nämligen 0. Dock är det inkorrekt att använda ≡ för att förklara relationen mellan dessa två tal eftersom de inte är identiska. De är endast två olika representanter till talet 0.[19] Genom samma metod kan vi finna flera relationer mellan dessa tal.[20] Vi erhåller nämligen relationerna:

$$-2 \equiv \{ \mid -1\} = \{ \mid -1, 0\} = \{ \mid -1, 1\} = \{ \mid -1, 0, 1\} \tag{2.47}$$

$$-1 \equiv \{ \mid 0\} = \{ \mid 0, 1\} \tag{2.48}$$

$$-\tfrac{1}{2} \equiv \{-1 \mid 0\} = \{-1 \mid 0, 1\} \tag{2.49}$$

$$0 \equiv \{ \mid \} = \{-1 \mid \} = \{ \mid 1\} = \{-1 \mid 1\} \tag{2.50}$$

$$\tfrac{1}{2} \equiv \{0 \mid 1\} = \{-1, 0 \mid 1\} \tag{2.51}$$

$$1 \equiv \{0 \mid \} = \{-1, 0 \mid \} \tag{2.52}$$

$$2 \equiv \{1 \mid \} = \{0, 1 \mid \} = \{-1, 1 \mid \} = \{-1, 0, 1 \mid \} \tag{2.53}$$

2.4 Och så vidare

Vi känner nu till de surreella talen $-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ och 2. Som vi gjorde tidigare kan vi konstruera surreella tal utifrån dessa och sen flera surreella tal utifrån de nya och så vidare. Nu följer konstruktionen av surreella tal ett unikt mönster. Betrakta nu de första dagarna i surreella talens skapelseberättelse.

[19] Tøndering, 2005, s.11.

[20] Conway, 1977, s.8.

Under dag 0 skapades det första surreella talet 0:

$$0$$

Under dag 1 skapades talen – 1 och 1 och vi har talen:

$$-1, 0, 1$$

Under dag 2 skapades talen – 2, – $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ och 2 och vi har talen:

$$-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$$

Här ser vi mönstret. För varje dag så skapas nya tal som ligger mellan tidigare skapade tal, och ett nytt tal vänster om det minsta talet och ett nytt tal höger om det största talet. Genom att titta på mönstret kan vi då förutsäga att under dag 3 skulle följande surreella tal skapas: – 3, – $1\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$ och 3. Vilket skulle ge oss antalet tal under dag 3:[21]

$$-3, -2, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 3$$

3 Grundläggande satser för surreella tal

Sats 1: *Om x är ett surreellt tal så är $x \leq x$.*[22]

Bevis: Vi har tidigare visat att $0 \leq 0$ och vi gör antagandet att satsen är sann för föräldrarna till x, dvs. för alla element i X_L och X_R. Enligt *definition 2* är *sats 1* sant om följande påstående är sant:

$$x \leq x \Leftrightarrow \neg\exists\, x_L \in X_L : x \leq x_L \wedge \neg\exists\, x_R \in X_R : x_R \leq x \qquad (3.1)$$

$\neg\exists\, x_L \in X_L : x \leq x_L$ kräver att vi ska bevisa att $x \nleq x_L$, för något element x_L i X_L. Enligt *definition 2* ska vi bevisa:

$$x \nleq x_L \Leftrightarrow \exists\, x_L \in X_L : x_L \leq x_L' \vee \exists\, x_{LR} \in X_{LR} : x_{LR} \leq x \qquad (3.2)$$

Vi har antagit att satsen gäller för x föräldrar så om $x_L \equiv x_L'$ medför det att $x_L \leq x_L$ är sann och då är första halvan $\exists\, x_L \in X_L : x_L \leq x_L$ sann.

[21] Tøndering, 2005, s.22.

[22] Conway, 1977, s.16

Andra halvan av (3.1) kräver att vi ska bevisa $x_R \nleq x$, för något element x_R i X_R. Enligt *definition 2* ska vi bevisa

$$x_R \nleq x \Leftrightarrow \exists\ x_{RL} \in X_{RL} : x \leq x_{RL} \vee \exists\ x_R \in X_R : x_R' \leq x_R \qquad (3.3)$$

Som tidigare så hade vi antagit att satsen gäller för x föräldrar vilket medför att om $x_R' \equiv x_R$ så är $\exists\ x_R \in X_R : x_R \leq x_R$ sann.

Vi har nu bevisat att båda delarna av påståendet är sant.[23] ☐

Sats 2: *Låt A, A', B och B' vara mängder av surreella tal, låt a_1, a_2, a_3, … vara element till A, låt a_1', a_2', a_3', … vara element till A', låt b_1, b_2, b_3, … vara element till B och låt b_1', b_2', b_3', … vara element till B'. Om A och A' har samma antal element och $a_i \leq a_i'$, för alla i, och B och B' har samma antal element och $b_j \leq b_j'$, för alla j då gäller*

$$\{A \mid B\} \leq \{A' \mid B'\} \qquad (3.4)$$

[24]

*Bevis***:** Enligt *definition 2* så är (3.4) sant om följande påstående är sant

$$\{A \mid B\} \leq \{A' \mid B'\} \Leftrightarrow \neg\exists\ a \in A : \{A' \mid B'\} \leq a \wedge \neg\exists\ b' \in B' : b' \leq \{A \mid B\} \qquad (3.5)$$

För att bevisa $\neg\exists\ a \in A : \{A' \mid B'\}$ utför vi ett motsägelsebevis genom att bevisa att det motsatta är falsk. Vi antar att $\exists\ a \in A : \{A' \mid B'\} \leq a$. Enligt *definition 2* gäller det att:

$$\{A' \mid B'\} \leq a \Leftrightarrow \neg\exists\ a \in A' : a \leq a' \wedge \neg\exists\ a_R \in A_R : a_R \leq \{A' \mid B'\} \qquad (3.6)$$

där a_R är element av A_R vilket är den högra mängden av a som är i sin tur är ett element av A.

$\neg\exists\ a \in A' : a \leq a'$ är nu falsk eftersom oavsett vilket a vi väljer så säger definitionen för A och A' att $a \leq a'$, vilket detta då medför att (3.6) är falsk och
$\neg\exists\ a \in A : \{A' \mid B'\} \leq a$ i (3.5) är då sann.

På liknande sätt bevisar vi att den andra halvan av (3.5) är sann genom att bevisa att motsatsen är falsk. Vi antar att $\exists\ b' \in B' : b' \leq \{A \mid B\}$. Enligt *definition 2* gäller det att:

$$b' \leq \{A \mid B\} \Leftrightarrow \neg\exists\ b'_L \in B'_L : \{A \mid B\} \leq b'_L \wedge \neg\exists\ b \in B : b \leq b' \qquad (3.7)$$

där b'_L är element av B'_L vilket är den vänstra mängden av b' som i sin tur är ett element av B'.

[23] Tøndering, 2005, s.16.

[24] Tøndering, 2005, s.16.

Här är $\neg\exists\ b \in B : b \leq b'$ falsk eftersom oavsett vilket b vi väljer så säger definitionen för B och B' att $b \leq b'$.

Vilket detta medför att (3.5) är sann.[25] □

Sats 3: *Ett surrellt tal $\{A \mid B\}$ är större än alla element a i vänstra mängden A och mindre än alla element b av högra mängden B.*

$$\forall\ a \in A : a < \{A \mid B\} \wedge \forall\ b \in B : \{A \mid B\} < b \tag{3.8}$$[26]

*Bevis***:** Vi undersöker $\forall\ a \in A : a < \{A \mid B\}$.

Nu medför det att om

$$a \leq \{A \mid B\} \wedge \{A \mid B\} \nleq a \Leftrightarrow a < \{A \mid B\} \tag{3.9}$$

Vilket medför att $\forall\ a \in A : a < \{A \mid B\}$ är ekvivalent med

$$\forall\ a \in A : a \leq \{A \mid B\} \wedge \forall\ a \in A : \{A \mid B\} \nleq a \tag{3.10}$$

Vi vill visa att $\forall\ a \in A : a \leq \{A \mid B\}$. Enligt *definition 2* så medför det att $\forall\ a \in A : a \leq \{A \mid B\}$ är ekvivalent med

$$\neg\exists\ a_L \in A_L : \{A \mid B\} \leq a_L \wedge \neg\exists\ b \in B : b \leq a \tag{3.11}$$

a_L är element av A_L, vilket är den vänstra mängden av a vilket i sin tur är ett element av A.

Vi kan redan säga här att $\neg\exists\ b \in B : b \leq a$ är sann eftersom $\{A \mid \mathrm{B}\}$ är ett välformat surreellt tal så enligt *definition 1* så finns det inget element i B som är större eller lika med något element i A. Alltså, för att visa att (3.11) är sann behöver vi endast visa att $\neg\exists\ a_L \in A_L : \{A \mid B\} \leq a_L$

Som tur är $\neg\exists\ a_L \in A_L : \{A \mid B\} \leq a_L$ ekvivalent med

$$\forall\ a_L \in A_L : \{A \mid B\} \nleq a_L \tag{3.12}$$

Enligt motsatta definitionen till *definition 2* så är $\forall\ a_L \in A_L : \{A \mid B\} \nleq a_L$ ekvivalent med

$$\forall\ a_L \in A_L : (\exists\ a' \in A : a_L \leq a' \vee \exists\ a_{LR} \in A_{LR} : a_{LR} \leq \{A \mid B\}) \tag{3.13}$$

[25] Tøndering, 2005, ss.16-17.

[26] Tøndering, 2005, s.17.

Vi behöver endast visa att $\forall\, a_L \in A_L : (\exists\, a \in A : a_L \leq a)$ är sann och detta gör vi genom att låta $a' \equiv a$ vilket ger oss $\forall\, a_L \in A_L : (\exists\, a \in A : a_L \leq a)$. Detta är ett identiska påstående som vi angav i (3.8), nämligen $\forall\, a \in A : a \leq \{A \mid B\}$. Vad vi menar är att a_L är föräldrar till a och som i sin tur är föräldrar till $\{A \mid B\}$. Så i jämförelse mellan dessa är den enda skillnaden är att i det senare avseendet så har a bytts ut mot föräldern a_L. Genom induktion kan vi då dra slutsatsen att $\forall\, a \in A : a \leq \{A \mid B\}$ är sann om den är sann för ett surrellt tal vars vänstra mängd är den tomma mängden.

För att visa att $\forall\, a \in A : \{A \mid B\} \nleq a$ från (3.10) är sann så vet vi enligt *definition 2* att $\forall\, a \in A : \{A \mid B\} \nleq a$ är ekvivalent med

$$\exists\, a' \in A : a \leq a' \vee \exists\, a_R \in A_R : a_R \leq \{A \mid B\} \tag{3.14}$$

Vi behöver endast visa att $\exists\, a' \in A : a \leq a'$ och det gör vi genom att låta $a \equiv a'$, vilket medför att $\exists\, a \in A : a \leq a$ och som vi vet från *sats 1* är sann.

Vi har nu bevisat att (3.10) är sann vilket medför att $\forall\, a \in A : a < \{A \mid B\}$ är sann. $\forall\, b \in B : \{A \mid B\} < b$ bevisas på liknande sätt.[27] □

Nästa sats så kommer vi använda oss av booleska funktioner. En boolesk funktion är en funktion $f\,(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ av variablerna $x_1, x_2, x_3, \ldots$ som kan antingen anta värdet 1 eller 0 om de är sanna eller falska.[28]

Sats 4: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$[29]

Bevis: Vi gör antagandet att satsen är falsk. Alltså det existerar surreella tal sådan att

$$x \leq y \wedge y \leq z \wedge x \nleq z \tag{3.15}$$

Vi definierar vår booleska funktion som

$$f\,(x, y, z) \Leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq z \wedge x \nleq z \tag{3.16}$$

dvs. om $f\,(x, y, z)$ är sann så är (3.15) sann.

Från *definition 2* så vet vi att (3.15) är sann om följande påståenden är sanna:

$$\neg \exists\, x_L \in X_L : y \leq x_L \tag{3.17}$$

---

[27] Tøndering, 2005, ss.17-18.

[28] Anders Björner, Kimmo Eriksson, ”Boolesk Algebra och Booleska Funktioner” Tillgänglig: https://people.kth.se/~boij/5B1118/Material/Boole.pdf, 2010, (hämtad 2015-04-26)

[29] Conway, 1977, s.16.

$$\neg\exists\, y_L \in Y_L : z \leq y_L \tag{3.18}$$

$$\neg\exists\, y_R \in Y_R : y_R \leq x \tag{3.19}$$

$$\neg\exists\, z_R \in Z_R : z_R \leq y \tag{3.20}$$

$$\exists\, x_L \in X_L : z \leq x_L \vee \exists\, z_R \in Z_R : z_R \leq x \tag{3.21}$$

Enligt definition vet vi att (3.17) är ekvivalent med

$$\forall\, x_L \in X_L : y \not\leq x_L \tag{3.22}$$

Genom att anta att $\exists\, x_L \in X_L : z \leq x_L$ i (3.21) är sann så kan vi använda samma x_L i (3.22) med (3.21) vänstra halva och kombinera detta med $y \leq z$ från (3.15) får vi

$$y \leq z \wedge z \leq x_L \wedge y \not\leq x_L \tag{3.23}$$

Vilket är ekvivalent med den booleska funktionen $f\,(y, z, x_L)$

Vi vet att (3.20) är ekvivalent med

$$\forall\, z_R \in Z_R : z_R \not\leq y \tag{3.24}$$

Genom att anta att $\exists\, z_R \in Z_R : z_R \leq x$ i (3.21) är sann så kan vi använda samma z_R i (3.24) med (3.21) högra halva och kombinera detta med $x \leq y$ från (3.15) så får vi

$$z_R \leq x \wedge x \leq y \wedge z_R \not\leq y \tag{3.25}$$

vilket är ekvivalent med den booleska funktionen $f\,(z_R, x, y)$. Detta medför då att

$$f\,(x, y, z) \Rightarrow \exists\, x_L \in X_L : f\,(y, z, x_L) \vee \exists\, z_R \in Z_R : f\,(z_R, x, y) \tag{3.26}$$

Nu följer det att både x_L och z_R är föräldrar till x och respektive z. Vi kan alltså skriva om $f\,(x, y, z)$ med x och z föräldrar tills vi tillslut når { | }, vilket motsäger vårt påstående i (3.26) eftersom { | } saknar föräldrar. Alltså måste *sats 4* vara sann.[30] $\square$

Sats 5: $x \not\leq y \Rightarrow y \leq x$[31]

Bevis: Enligt *definition 2* så är $x \not\leq y$ sann om något av följande påståenden är sanna

$$\exists\, x_L \in X_L : y \leq x_L \tag{3.27}$$

$$\exists\, y_R \in Y_R : y_R \leq x \tag{3.28}$$

[30] Tøndering, 2005, ss.18-19.

[31] Tøndering, 2005, s.19.

Vi antar att (3.27) är sann och då kan vi hitta x_L sådan att $y \leq x_L$. Vi vet från *sats 2* att $x_L \leq x$ och med *sats 4* vet vi att $y \leq x$.

Vi antar att (3.28) är sann och då kan vi hitta y_R sådan att $y_R \leq x$. Vi vet från *sats 2* att $y \leq y_R$ och med *sats 4* vet vi att $y \leq x$.[32] □

Sats 6: $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$[33]

Bevis: Vi gör antagandet att satsen är falsk. Alltså det existerar surreella tal sådan att

$$x < y \wedge y < z \wedge x \nless z \tag{3.29}$$

vilket är ekvivalent med

$$y \nleq x \wedge z \nleq y \wedge z \leq x \tag{3.30}$$

Enligt *sats 5* vet vi att

$$y \nleq x \Rightarrow y \nleq z \vee z \nleq x \tag{3.31}$$

Insättning av (3.31) i (3.29) ger

$$(y \nleq z \vee z \nleq x) \wedge z \nleq y \wedge z \leq x \tag{3.32}$$

Vilket är en motsägelse eftersom det är omöjligt att $y \nleq z$ och $z \nleq y$. *Sats 6* måste vara sann.[34] □

Sats 7: *För ett surreellt tal* $x = \{X_L \mid X_R\}$ *kan vi eliminera vilken som helst av elementen i* X_L, *förutom det största elementet, utan att* x *ändrar värde. Likadant kan vi eliminera vilket element som helst i* X_R, *förutom det minsta elementet, utan att* x *ändrar värde.*[35]

Bevis: Vi bevisar först att vi kan eliminera element i X_L, förutom det största elementet, utan att x ändrar värde.

Vi antar att $x = \{x_1, x_2, x_3 \ldots \mid X_R\}$ och att $x_1 < x_2$. Vi vill bevisa att $\{x_2, x_3, x_4 \ldots \mid X_R\} = \{x_1, x_2, x_3 \ldots \mid X_R\}$. Alltså, enligt definition, vill vi bevisa:

$$\{x_2, x_3, x_4 \ldots \mid X_R\} \leq \{x_1, x_2, x_3 \ldots \mid X_R\} \tag{3.33}$$

[32] Tøndering, 2005, s.20.

[33] Tøndering, 2005, s.20.

[34] Tøndering, 2005, s.20.

[35] Tøndering, 2005, s.20.

$$\{x_1, x_2, x_3\dots \mid X_R\} \leq \{x_2, x_3, x_4 \dots \mid X_R\} \tag{3.34}$$

Vi låter nu a och a' vara ett element i X_L och b och b' element i X_R. Enligt *definition 2* för (3.33) och (3.34) ska vi alltså bevisa:

$$\neg\exists\, a \in \{x_1, x_2, x_3\dots\} : \{x_2, x_3, x_4 \dots \mid X_R\} \leq a \tag{3.35}$$

$$\neg\exists\, b \in X_R : b \leq \{x_1, x_2, x_3\dots \mid X_R\} \tag{3.36}$$

$$\neg\exists\, a' \in \{x_1, x_2, x_3\dots\} : \{x_1, x_2, x_3\dots \mid X_R\} \leq a' \tag{3.37}$$

$$\neg\exists\, b' \in X_R : b' \leq \{x_2, x_3, x_4 \dots \mid X_R\} \tag{3.38}$$

(3.36), (3.37) och (3.38) följer direkt från vad vi visade i *sats 3*.

(3.35) är ekvivalent med

$$\forall\, a \in \{x_1, x_2, x_3\dots\} : a < \{x_2, x_3, x_4 \dots \mid X_R\} \tag{3.39}$$

Endast det värde på x som vi vill undersöka är fallet då $x_1 = a$. Från *sats 3* vet vi att $x_2 < \{x_2, x_3, x_4 \dots \mid X_R\}$ och eftersom $x_1 = a < x_2$. Så enligt *sats 6*

$$x_1 < x_2 \wedge x_2 < \{x_2, x_3, x_4 \dots \mid X_R\} \Rightarrow x_1 < \{x_2, x_3, x_4 \dots \mid X_R\} \tag{3.40}$$

Vilket vi skulle bevisa. På liknande sätt kan vi bevisa att vi kan eliminera vilket element som helst i X_R, förutom det minsta elementet, utan att x ändrar värde.[36] □

Sats 8: *Om ett surrellt tal x är större än alla element i mängden A och mindre än alla element i mängden B då är* $x = \{X_L, A \mid X_R, B\}$:

$$A < x < B \Rightarrow x = \{X_L, A \mid X_R, B\} \tag{3.41}$$ [37]

Bevis: Enligt definition ska vi bevisa

$$x \leq \{X_L, A \mid X_R, B\} \tag{3.42}$$

$$\{X_L, A \mid X_R, B\} \leq x \tag{3.43}$$

Vilket innebär att vi ska bevisa följande fyra påståenden:

$$\neg\exists\, x_L \in X_L : \{X_L, A \mid X_R, B\} \leq x_L \tag{3.44}$$

$$\neg\exists\, \beta \in X_R \cup B : \beta \leq x \tag{3.45}$$

[36] Tøndering, 2005, s.20.

[37] Tøndering, 2005, s.21.

$$\neg\exists\, \alpha \in X_L \cup A : x \leq \alpha \tag{3.46}$$

$$\neg\exists\, x_R \in X_R : x_R \leq \{X_L, A \mid X_R, B\} \tag{3.47}$$

Nu följer det att (3.44), (3.45), (3.46) och (3.47) är sanna enligt *sats 3*.[38] ☐

Exempel: Vi vet sen tidigare att – 1 < 0 < 1 och att 0 = { | }, från *sats 8* (3.41) följer det att 0 = {– 1 | 1}.

4 Addition

Definition 3: *Om x och y är två surreella tal så är*

$$x + y = \{X_L + y, x + Y_L \mid X_R + y, x + Y_R\}^{39} \tag{4.1}$$

Exempel 2: Vi har de surreella talen {0 | } ≡ 1 och {1 | } ≡ 2 då är

$$1 + 2 = \{0 + 2, 1 + \emptyset \mid \emptyset + 2, 1 + \emptyset\} \tag{4.2}$$

Vi vet att { | } ≡ 0 och enligt definitionen så följer det att 0 + 2 i (4.2) vänstra mängd är

$$\begin{aligned} 0 + 2 &= \{\emptyset + 2, 0 + 1 \mid \emptyset + 2, 0 + \emptyset\} \\ &= \{0 + 1 \mid \} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Enligt definition följer det nu att 0 + 1 i (4.3) vänstra mängd är:

$$\begin{aligned} 0 + 1 &= \{\emptyset + 1, 0 + 0 \mid \emptyset + 1, 0 + \emptyset\} \\ &= \{0 \mid \} \equiv 1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Insättning av (4.4) i (4.3) ger oss:

$$0 + 2 = \{1 \mid \} \equiv 2 \tag{4.5}$$

Med insättning av (4.5) i (4.2) får vi:

$$1 + 2 = \{2 \mid \} \equiv 3 \tag{4.6}$$

Vi ser här att det är inga konstigheter för addition av surreella tal.

[38] Tøndering, 2005, s.22.

[39] Conway, 1977, s.5.

Observera att när vi utför aritmetiska operationer på den tomma mängden Ø så kommer inget hända eftersom det finns inga element att utföra operationen på.[40]

Innan vi berör nästa sats så ska vi titta på definitionen för två surreella tal som är identiska.

Definition 4: *Om x och y är två surreella tal så är de identiska om alla element i den vänstra och högra mängden av x är identiska med alla element i den vänstra och högra mängden av y:*[41]

$$
\begin{aligned}
x \equiv y \Leftrightarrow\ & \forall\, x_L \in X_L : x_L \in Y_L \wedge \\
& \forall\, x_R \in X_R : x_R \in Y_R \wedge \\
& \forall\, y_L \in Y_L : y_L \in X_L \wedge \\
& \forall\, y_R \in Y_R : y_R \in X_R
\end{aligned} \tag{4.7}
$$
[42]

Sats 9: *För ett surreellt tal x och elementet* 0 så är

$$x + 0 \equiv x \tag{4.8}$$
[43]

Bevis: Vi vet att { | } ≡ 0. Då följer det direkt från *definition 3* att:

$$
\begin{aligned}
x + 0 &= \{X_L + 0, x + \varnothing \mid X_R + 0, x + \varnothing\} \\
&= \{X_L + 0 \mid X_R + 0\}
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Nu följer det att (4.9) är sann om den är sann för x föräldrar. Genom induktion vet vi att (4.9) är sann och då är $x + 0 \equiv x$. På liknande sätt bevisas $0 + x \equiv x$.[44] □

Sats 10: *Den kommutativa lagen gäller för surreella tal:*

$$x + y \equiv y + x \tag{4.10}$$
[45]

Bevis: Nu följer samma resonemang som för (4.9). Kommutativa lagen gäller för $x + y$ om den gäller för x och y föräldrar. Vi visade att $0 + x \equiv x$ och $x + 0 \equiv x$ i förgående sats

---

[40] Tøndering, 2005, s.25.

[41] Conway, 1977, ss.15-16.

[42] Tøndering, 2005, s.15.

[43] Conway, 1977, s.17.

[44] Tøndering, 2005, s.31.

[45] Conway, 1977, s.17.

så det följer trivialt att $0 + x \equiv x + 0$. Alltså måste den kommutativa lagen gälla för surreella tal.[46] □

Sats 11: *Den associativa lagen gäller för surreella tal:*

$$(x + y) + z \equiv x + (y + z)^{47}$$

Bevis: Enligt *definition 3* så blir vänsterled:

$$(x + y) + z = \{(x + y)_L + z, (x + y) + Z_L \mid (x + y)_R + z, (x + y) + Z_R\}$$

$$= \{(X_L + y) + z, (x + Y_L) + z, (x + y) + Z_L \mid (X_R + y) + z, (x + Y_R) + z, (x + y) + Z_R \qquad (4.11)$$

Enligt *defintion 3* blir högerled:

$$x + (y + z) = \{X_L + (y + z), x + (y + z)_L \mid X_R + (y + z), x + (y + z)_R\}$$

$$= \{X_L + (y + z), x + (Y_L + z), x + (y + Z_L) \mid X_R + (y + z), x + (Y_R + z), x + (y + Z_R)\} \qquad (4.12)$$

Om vi jämför (4.11) och (4.12) så ser vi att den associativa lagen gäller för de surreella talen x, y, och z, om lagen gäller för deras föräldrar. Alltså, om ett av talen ersätts med 0 så är (4.11) och (4.12) identiska och den associativa lagen är sann för de surreella talen.[48] □

5 Subtraktion

Definition 5: *Om surreella talet* $x = \{X_L \mid X_R\}$ *så är dess invers*

$$-x = \{-X_R \mid -X_L\}^{49} \qquad (5.1)$$

Sats 12: *Med avseende på addition så har varje surreellt tal x en invers – x sådan att*

$$x + (-x) = 0^{50} \qquad (5.2)$$

Bevis: Vi behöver bevisa två saker: att $-x$ är ett välformat surreellt tal och att $x + (-x) = 0$.

För att bevisa att $-x$ är ett välformat surreellt tal så ska vi enligt definitionen bevisa:

---

[46] Tøndering, 2005, s.31.

[47] Conway, 1977, s.17.

[48] Tøndering, 2005, s.31.

[49] Conway, 1977, s.5.

[50] Conway, 1977, s.17.

$$- X_R < - X_L \tag{5.3}$$

För att bevisa (4.14) är sann så kan vi bevisa att de surreella talen a och b har förhållandet $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$, och sedan trivialt härleda att $a < b \Leftrightarrow -b < -a$ och $-x$ är då ett välformat surreellt tal.

Enligt definition så är $a \leq b$ ekvivalent med

$$\neg\exists\ \alpha \in A_L : b \leq \alpha \wedge \neg\exists\ \beta \in B_R : \beta \leq a \tag{5.4}$$

och enligt definition så är $-b \leq -a$ är ekvivalent med

$$\neg\exists\ \gamma \in -B_R : -a \leq \gamma \wedge \neg\exists\ \delta \in -A_L : \delta \leq -b \tag{5.5}$$

Vi låter $\alpha = -\delta$ och jämför (4.15) vänstra halva med (4.16) högra halva, och låter $\gamma = -\beta$ och jämför (4.15) högra halva med (4.16) vänstra halva så ser vi att $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$ är sann om det är sann för föräldrar till a och b. På liknade sätt kan vi bevisa $a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -a$ är sann för a föräldrar. Därmed, enligt induktion, har vi bevisat $-x$ är ett välformat surreellt tal.

Vi vill nu bevisa att $x + (-x) = 0$. Vi gör antagandet att satsen stämmer för x föräldrar och vi vill bevisa detta. Enligt definition är

$$x + (-x) = \{X_L + (-x), x + (-X_R) \mid X_R + (-x), x + (-X_L)\} \tag{5.6}$$

Vi börjar med att undersöka $X_L + (-x)$ i (5.5):

$$X_L + (-x) = \{X_{LL} + (-x), X_L + (-X_R) \mid X_{LR} + (-x), X_L + (-X_L)\} \tag{5.7}$$

där X_{LL} är unionen av vänstra mängden för alla element i den vänstra mängden av x, och X_{LR} är unionen av vänstra mängden för alla element i den högra mängden av x. Vi antog att satsen är sann för x föräldrar, detta medför då att $X_L + (-X_L) = 0$. Alltså är ett av elementen i den högra mängden 0. Så enligt *sats 3*, då vi sa att ett surrellt tal är större än alla element i vänstra mängden och mindre än alla element av högra mängden, så måste $X_L + (-x) < 0$.

Nu tar vi en titt på $x + (-X_R)$ i (5.5):

$$x + (-X_R) = \{X_L + (-X_R), x + (-X_{RR}) \mid X_R + (-X_R), x + (-X_{RL})\} \tag{5.8}$$

där X_{RR} är unionen av högra mängden för alla element i den högra mängden av x, och X_{RL} är unionen av höger a mängden för alla element i den vänstra mängden av x. Vi antog att satsen gäller för x föräldrar, alltså att $X_R + (-X_R) = 0$, och enligt *sats 3* så kan dra slutsatsen att $x + (-X_R) < 0$.

Med samma resonemang kan vi visa att $X_R + (-x) > 0$ och $x + (-X_L) > 0$. Alltså kan vi se att alla element i vänstra mängden av $x + (-x)$ är mindre än 0 och alla element i den högra mängden är större än 0. Så enligt definition måste $x + (-x) = 0$.[51] □

6 Multiplikation

Definition 6: *Produkten av två surreella tal, x och y, anges som*:

$$xy = \{X_Ly + xY_L - X_LY_L, X_Ry + xY_R - X_RY_R \mid X_Ly + xY_R - X_LY_R, X_Ry + xY_L - X_RY_L\} \quad (6.1)$$[52]

Sats 13: *För surreella tal så är*

$$x0 \equiv 0 \quad (6.2)$$[53]

Bevis: Vi vet att $0 \equiv \{\ \mid\ \}$ så enligt *definition 6* får vi

$$x0 = \{X_L0 + x\varnothing - X_L\varnothing, X_R0 + x\varnothing - X_R\varnothing \mid X_L0 + x\varnothing - X_L\varnothing, X_R0 + x\varnothing - X_R\varnothing\}$$

$$= \{\ \mid\ \} \quad (6.3)$$

Alltså vänster och den högra mängden är tomma mängder. Vilket medför att $x0 \equiv 0$. $0x \equiv 0$ kan bevisas på liknande sätt.[54] □

Sats 14: *För surreella tal så är*

$$1x \equiv x \quad (6.4)$$[55]

Bevis: Vi vet att $1 \equiv \{0 \mid\ \}$ så enligt *definition 6* får vi

$$x1 = \{X_L1 + x0 - X_L0, X_R1 + x\varnothing - X_R\varnothing \mid X_L1 + x\varnothing - X_L\varnothing, X_R1 + x0 - X_R0\}$$

$$= \{X_L1 \mid X_R1\} \quad (6.5)$$

Nu följer det att (4.25) är lika med x om det gäller för x föräldrar. Genom induktion så ser vi att satsen är sann om den är sann för $x = 0$, vilket är trivialt sann eftersom det var vad vi visade i förgående sats. Alltså måste $1x \equiv x$. $x1 \equiv x$ kan bevisas på liknande

[51] Tøndering, 2005, ss.31-32.
[52] Conway, 1977, s.5.
[53] Conway, 1977, s.19.
[54] Tøndering, 2005, s.37.
[55] Conway, 1977, s.19.

sätt.[56] $\square$

Sats 15: *Den kommutativa lagen gäller för surreella tal:*

$$xy \equiv yx^{57} \tag{6.6}$$

Bevis: Vad vi har sett i definitionen för multiplikation är att den kommutativa lagen är sann, om den är sann för x och y föräldrar. Alltså, vi behöver visa att $0x \equiv x0$ och detta följer trivialt från tidigare sats.[58] $\square$

7 Konvertering av reella till surreella tal

Vi har söker en funktion där vi kan konvertera de reella talen $\mathbb{R}$ till de surreella talen $\mathbb{S}$:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}$$

Funktionen[59] som avbildar reella tal till de surreella talen definieras som:

$$f(x) = \begin{cases} \{\ |\ \} & \text{om } x = 0 \\ \{f(x-1)\ |\ \} & \text{om } x \text{ är ett heltal och } x > 0 \\ \{\ |\ f(x+1)\} & \text{om } x \text{ är ett heltal och } x < 0 \\ \{f(\frac{i-1}{2^j})\ |\ f(\frac{i+1}{2^j})\} & \text{om } x \text{ kan skrivas som ett oreducerbar bråktal } \frac{i}{2^j}, \\ & \text{där } i \text{ och } j \text{ är heltal, och } j > 0 \end{cases}$$

Vi ser att om $x = 0$ så är $f(0) = \{\ |\ \} \equiv 0$, om $x = 1$ så är $f(1) = \{f(0)\ |\ \} = \{0\ |\ \} \equiv 1$, om $x = -1$ så är $f(-1) = \{\ |\ f(0)\} = \{\ |\ 0\} \equiv -1$ och om $x = -\frac{1}{2}$ så är $f(-\frac{1}{2}) = \{f(-1)\ |\ f(0)\} = \{-1\ |\ 0\} \equiv -\frac{1}{2}$.

Funktionen behandlar dock inte alla rationella tal, endast bråktal av formen $\frac{i}{2^j}$.[60] Hur är det med talen $\frac{1}{3}$ och π?

Om vi undersöker fallet då $x = \frac{1}{3}$ så börjar vi med att skriva en sekvens av dyadiska fraktioner i $\frac{1}{3}$ vänstra mängd som närmar sig $\frac{1}{3}$ från vänster och en sekvens av dyadiska

[56] Tøndering, 2005, s.38.

[57] Conway, 1977, s.19.

[58] Tøndering, 2005, s.38.

[59] Tøndering betecknar denna funktion med $\delta(x)$ och kallar denna funktion för "Dali funktion".

[60] Tøndering, 2005, s.24.

fraktioner i $\frac{1}{3}$ högra mängd som närmar sig $\frac{1}{3}$ från höger. Självklart får inget element i den vänstra mängden var större än något element i den högra mängden. Vi får:

$$\frac{1}{3} = \{\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{21}{64}, \ldots \mid \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{11}{32}, \ldots\}$$

För att verifiera vårt påstående så vi vill beräkna $3x$. Vi börjar med att beräkna $2x$. Enligt definition får vi:

$$2x = x + x = \{X_L + x \mid X_R + x\}$$

Och $3x$ ger oss:

$$3x = 2x + x = \{X_L + 2x, 2X_L + x \mid X_R + 2x, 2X_R + x\}$$

Då följer det att varje element i den vänstra mängden i $3x$ är ett positivt tal mindre än 1 och varje element i den högra mängden i $3x$ är ett positivt tal större än 1. Till exempel om vi undersöker det första elementet i den högra mängden i $3x$, nämligen $\frac{1}{2} + x + x$, så följer det att: $\frac{1}{2} + x + x > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$, eftersom $\frac{1}{4}$ är ett element i den vänstra mängden av x. Alltså måste $3x = 1$ vilket medför att $x = \frac{1}{3}$.[61]

Genom samma metod kan vi enkelt finna det surreella talet vars värde är π. Då skriver vi vänstra mängden som en mängd av dyadiska fraktioner mindre än π och högra mängden som en mängd av endast dyadiska fraktioner som är större än π, där inget element i den vänstra mängden är större eller lika med något element i den högra mängden:

$$\pi = \{\frac{3}{1}, \frac{25}{8}, \frac{201}{64}, \ldots \mid \frac{13}{4}, \frac{101}{32}, \frac{3217}{1024}, \ldots\}$$ [62]

8 Dag ω

Talet ω infördes av Cantor 1883 när han presenterade konceptet transfinita tal som hade syftet att bestämma storleken hos oändliga mängder. Talet var oändligt, men ändå det minsta talet som var större än alla ändliga tal. Genom denna definition av ω så kunde ytterligare definitioner av transfinita tal skrivas: $\omega + 1$, $\omega + 2$, …, 2ω, …, ω^2, …, ω^ω, … vilket gav ett oändliga antal oändliga tal. Om vi undersöker mängden alla heltal:

---

[61] Tøndering, 2005, ss.42-43.

[62] Tøndering, 2005, s.43.

$\mathbb{Z} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ så kan vi använda denna mängd och skapa det surreella talet $\{\mathbb{Z} \mid \}$, vilket är ett välformat surreellt tal. Nu medför det att värdet för $\{\mathbb{Z} \mid \}$ är större än alla dess heltal, så värdet är oändligt. Vi kan uttrycka det surreella talet som $\omega = \{\mathbb{Z} \mid \}$. Genom användningen av definitionen för subtraktion erhålls:

$$\omega - 1 = \{\mathbb{Z} - 1 | \omega - 0\} = \{\mathbb{Z} \mid \omega\}$$

$$\omega - 2 = \{\mathbb{Z} - 2 | \omega - 1\} = \{\mathbb{Z} \mid \omega - 1\}$$

$$\omega - 3 = \{\mathbb{Z} - 3 | \omega - 2\} = \{\mathbb{Z} \mid \omega - 2\}$$

I den vänstra mängden så subtraherar vi talen 1, 2 och 3, från mängden av alla heltal men det som blir kvar är fortfarande mängden av alla heltal.

Genom definitionen för addition erhålls:

$$\omega + 1 = \{\mathbb{Z} + 1,\ \omega + 0 \mid \} = \{\omega \mid \}$$

$$\omega + 2 = \{\mathbb{Z} + 2,\ \omega + 1 \mid \} = \{\omega + 1 \mid \}$$

$$\omega + 3 = \{\mathbb{Z} + 3,\ \omega + 2 \mid \} = \{\omega + 2 \mid \}$$

$$\omega + \omega = \{\mathbb{Z} + \omega,\ \omega + \mathbb{Z} \mid \} = \{\omega + \mathbb{Z} \mid \}$$

Eftersom ω är större än alla heltal så kan $\mathbb{Z}$ utelämnas i uttrycket. Men i det sista fallet så erhålls den vänstra mängden $\omega + \mathbb{Z}$, vilket är mängden utav alla värdena ... $\omega - 3$, $\omega - 2$, $\omega - 1$, ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, …

Genom definitionen för multiplikation kan vi beräkna:

$$3\omega = \{2\omega + \mathbb{Z} \mid \}$$

$$4\omega = \{3\omega + \mathbb{Z} \mid \}$$

$$\omega^2 = \{\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots \mid \}$$

$$\omega^\omega = \{\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots \mid \}$$

Vi har även talen:

$$\frac{\omega}{2} = \{\mathbb{Z} \mid \omega - \mathbb{Z}\}$$

$$\sqrt{\omega} = \{\mathbb{Z} \mid \omega, \tfrac{\omega}{2}, \tfrac{\omega}{3}, \ldots\}$$

$$-\omega = \{\ |\ \mathbb{Z}\}$$

Om vi undersöker $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$ vilket är ett infinitesimalt tal som är mindre än det minsta bråktalet, så får vi andra intressanta tal:

$$\varepsilon = \{0 \mid 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots\}$$

$$2\varepsilon = \{\varepsilon \mid 1 + \varepsilon, \tfrac{1}{2} + \varepsilon, \tfrac{1}{4} + \varepsilon, \tfrac{1}{8} + \varepsilon, \ldots\}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = \{0 \mid \varepsilon\}$$ [63]

$$\sqrt{\varepsilon} = \{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots \mid 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots\}$$ [64]

9 Surreella tal är ett verktyg inom spelteorin

Ett spel är vilket tal som helst vilket är definierat som

$$G = \{G_L \mid G_R\}$$

där elementen i mängden $G_L = \{a, b, c, \ldots\}$ representerar antal drag som en spelare kan göra och elementen i mängden $G_R = \{d, e, f, \ldots\}$ är antal drag som en annan spelare kan göra. Alltså om i något spel så kan den vänstra spelaren göra ett drag till något element i den mängden G_L från startpunkten G och den högra spelaren kan göra ett drag till något element i mängden G_R från startpunkten G. Om den vänstra spelaren börjar och flyttar till a då ändras representationen av spelet till $a = \{A, B, C, \ldots \mid D, E, F, \ldots\}$. Därefter kan den högra spelaren göra drag till något element i den högra mängden och får då en ny representation av spelet. Till exempel om högra spelaren gör drag till D så erhålls en ny representation av spelet: $D = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mid \delta, \varepsilon, \zeta, \ldots\}$. Spelet är över när en av spelaren inte kan göra flera drag. Exempel om det är vänstra spelarens tur att göra ett drag från positionen $\{\ \mid U, V, X, \ldots\}$ så kan vänstra spelaren inte göra något drag och högra spelaren vinner.[65]

Ett spel som surreella talen tillämpas till är spelet Blå-Röd Hackenbush. Blå-Röd Hackenbush är ett två spelare spel: vänstra och höger, där en bild av noder som är förenade med linjesegment, kant till kant, med färgerna blå och röd. Bilden är

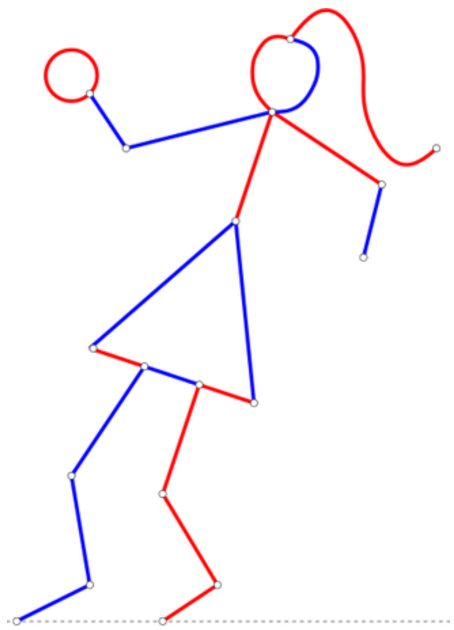
---

[63] Conway, 1976, ss.13-14.

[64] Tøndering, 2005, s.42.

[65] Conway, 1976, ss.71-72.

konstruerade så att man kan följa noderna ned till ”marken” av bilden, vilket är den streckade linjen längst ned i bilden. Vänster spelare gör sina drag genom att radera blåa linjesegment och den höger spelaren raderar röda linjesegment. Den spelare som inte har några drag kvar förlorar.[66]

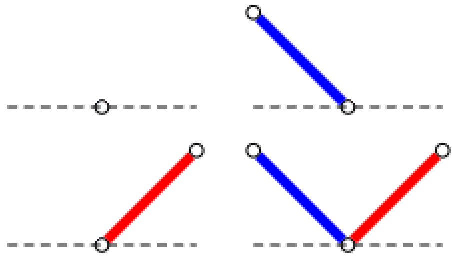


Figur 2. Blå-Röd Hackenbush spel.
Källa: *Winning Ways for Your Mathematical Plays, Volume 1 (2001)*.

[66] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays, Volume 1*, Wellesley, Massachusetts: A K Peters Ltd., 2001, s. 2.

9.1 Enkla spel

Figur 3 visar de fyra enklaste Hackenbush spelen.



Figur 3. Fyra av de enklaste spelen.

Källa: *Winning Ways for Your Mathematical Plays, Volume 1 (2001).*

I fallet där det inte finns röda eller blåa linjesegment så har ingen av spelarna något drag att göra, vilket innebär att spelet är $\{ \mid \} = 0$. Detta kallas för slutspel. Om det endast finns ett blått linjesegment så kan den vänster spelaren göra draget till 0, vilket medför att spelet är $\{0 \mid \} = 1$ och vänster spelaren vinner eftersom högern har inga röda linjesegment att radera. Om höger spelaren börjar så kommer vänster spelaren automatiskt vinna eftersom höger har inga röda linjesegment att radera. Om det endast finns ett rött linjesegment så kommer vänster spelaren inte ha något blått linjesegment att radera medan höger kan radera ett rött linjesegment och få göra draget till 0. Alltså är spelet $\{ \mid 0\} = -1$ och höger vinner.[67] Om det finns ett blått och ett rött linjesegment som kommer från samma nod så är spelet $\{-1 \mid 1\} = 0$.[68] Vi ser här att efter den andra spelaren gör sitt drag så kommer vi få slutspel, viket medför att den spelare som gör första draget kommer alltid att förlora.[69] Dess spel kallas för nollspel.[70]

Conway inför notationer om det finns vinnande strategi för vänster och höger spelaren. Dessa är:

- $G > 0$, det finns en vinnande strategi för den vänster spelaren
- $G < 0$, det finns en vinnande strategi för den höger spelaren
- $G = 0$, den andra spelaren har en vinnande strategi
- $G \parallel 0$ (*G* är ”luddig”), den första spelaren har en vinnande strategi.

[67] Conway, 1977, s. 72.

[68] Berlekamp, Conway och Guy, 2001, s. 17.

[69] Berlekamp, Conway och Guy, 2001, s. 3.

[70] Berlekamp, Conway och Guy, 2001, s. 6.

Att ett tal är luddigt innebär att spelet kan representeras som ett pseudo-tal. I Blå-Röd Hackenbush spel så kan existerar inga luddiga spel[71], men i Hackenbush Hotchpotch (Blå-Röd-Grön Hackenbush) så kan luddiga spel existera. Skillnaden mellan Blå-Röd Hackenbush och Hackenbush Hotchpotch så existerar gröna linjesegment som båda spelare kan radera.[72]

10 Slutsats

I denna introduktion till de surreella talen får vi en idé om vad de surreella talen är, men vi har knappt skrapat ytan. Vi berör inte områdena som till exempel egenskaperna för division mellan surreella tal, polynomekvationer med surreella koeficienter eller surreella komplexa tal. Dessutom så berör vi väldigt lite om hur de surreella talen tillämpas till spelteorin. I *Numbers and Games (1976)* så utforskar Conway dessa områden och i *Winning Ways for Your Mathmatical Plays, Volume 1 (2001)* så går Berlekamp, Conway och Guy djupt in i spelteorin och hur man kan tillämpa de surreella talen till olika spel.

Idag så används de surreella talen inom spelteorin, men det är ett relativt nytt område och i framtiden kan det visa sig att de surreella talen har flera användningsområden.

[71] Berlekamp, Conway och Guy, 2001, s. 29.

[72] Berlekamp, Conway och Guy, 2001, s. 29-30.

11 Referenser

Bajnok, Bela, *An Invitation to Abstract Mathematics*, New York: Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013

Berlekamp, Conway & Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays, Volume 1*, Massachusetts: A K Peters Ltd., 2001

Björner, Anders, *Boolesk Algebra och Booleska Funktioner*, Tillgänglig: https://people.kth.se/~boij/5B1118/Material/Boole.pdf, 2010, (Hämtad: 2015-04-26)

Conway, John H., *On Numbers and Games*, London: Academic Press Inc. Ltd., 1976

Knuth, Donald, *Surreal Numbers: How to ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness*, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974

Knuth, Donald, *Surreal Numbers: How to ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness*, Tillgänglig: http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/sn.html, (Hämtad: 2015-04-14)

Tøndering, Class, *Surreal Numbers – An Introduction*, Tillgänglig: http://www.tondering.dk/claus/sur16.pdf, 2013, (Hämtad 2015-04-14)