UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2016:2

Fysikaliska tillämpningar av tensorer och Young-tablåer

Fereshteh Ghaderi

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare och examinator: Veronica Crispin Quinonez
Februari 2016

Department of Mathematics
Uppsala University

Fysikaliska tillämpningar av tensorer och Young-tablåer

Fereshteh Ghaderi

Examensarbete C i matematik, 15 hp

Abstract

I denna uppsats ger vi en grundläggande introduktion till representation av grupper och ger några exempel på dessa. Vidare introducerar vi tensorer och operationer på dem. Tillämpningar av denna teori finner vi exempel på från kvantmekaniken och partikelfysiken. För att underlätta vissa beräkningar inför vi Young-tablåer, beskriver deras egenskaper och reglerna för räkneoperationer med den. Speciellt för det så viktiga fallet i $SU(n)$.

Tacksägelse

Jag skulle speciellt vilja tacka min make Hazhar Ghaderi för hans stöd och vägledning under och inför detta uppsatsskrivande. Jag vill också tacka min handledare Veronica Crispin Quinonez som har lärt mig väldigt mycket under den här uppsatsen.

Innehållsförteckning

1 Introduktion

Matematiken är det språk som enklast och bäst kan beskriva den fysikaliska verkligheten. Naturen och fysikaliska reaktioner och händelser har sin gång och vi försöker förstå oss på dem genom att modellera dem, till exempel genom integraler eller differentialekvationer.

I modern fysik, där vår intuition ej längre kan vägleda oss lika lätt som i klassisk fysik, speciellt sedan ankomsten av kvantmekaniken, så spelar symmetrier en stor roll. Av detta följer naturligen att gruppteori i allmänhet och representationsteori i synnerhet spelar en stor roll [1]. Därför är det av väldigt stor vikt att kunna förstå sig på denna del av matematik och kunna tillämpa den. Vår ambition i denna uppsats är att ge en introduktion till den matematiken.

Vi börjar med att definiera vad en *grupp* är och vilka egenskaper en grupp har. Sedan förklarar vi vad representation av grupp är, för enkelhetens skull tittar vi bara på ändliga grupper. Vi ger gott om exempel i hopp om att klargöra och förenkla begreppet för läsaren. Detta ges i avsnitt 2.

Hela avsnitt 3 handlar om tensorer. Vi introducerar Einsteinnotation samt kovarianta, kontravarianta och blandade tensorer. Tensoroperationer så som tensorprodukt och kontraktion behandlas också. $SU(n)$-tensorer som är viktiga för tillämpningar i partikelfysiken behandlas speciellt i delavsnitt 3.4.

Sista avsnittet handlar mera om beräkningar och tillämpningar. I delavsnitt 4.1 diskuteras ganska djupgående den kvantmekaniska egenskapen *spinn* som alla elementära partiklar (förutom Higgs-partikeln) innehar. Vi ger exempel på en tillämpning av direktprodukten genom att studera spinnet hos ett system av två partiklar med spinn $\frac{1}{2}$ (till exempel elektroner, protoner).

Till sist introducerar vi och ger ett flertal exempel på beräkningar av så kallade Young-tablåer. Dessa är väldigt användningsbara vid beräkningar av en direktprodukt i termer av en direktsumma av irreducibla representationer.

2 Grundläggande begrepp

I detta kapitel går vi igenom de begrepp som vi kommer att behöva framöver. Vi börjar med att definiera vad en grupp är och ger några exempel. Slutligen förklarar vi vad som menas med representation av en grupp och speciell en irreducibel sådan.

2.1 Grupper

Definition 2.1. En binär operation $*$ på en mängd G är en funktion från $G \times G$ till G. Med andra ord, för varje par av två element $a, b \in G$ så skall operationen $a * b$ tilldela ett element i G[2].

De vanligaste binära operationerna som vi använder är de fyra räknesätten: addition, multiplikation, subtraktion och division. Det finns även andra binära operationer som är mycket viktiga inom abstrakt algebra. Vi tar några exempel för att förstå begreppet bättre.

Exempel 1. Vi tar mängden $M(\mathbb{R})$ som består av alla matriser med reella element. Där är addition av två matriser, $A + B$, inte definierad för par av matriser av olika storlek, som till exempel

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \ ? \qquad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Däremot i mängden $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, bestående av alla 2×2-matriser med reella element, definierar vi additionen som en binär operation:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

där $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$.

Definition 2.2. En mängd G tillsammans med en binär operation $*$, kallas en grupp $(G, *)$, om den uppfyller följande egenskaper:

1. (Associativitet) För alla $a, b, c \in G$ gäller att $(a*b)*c = a*(b*c)$.
2. (Existens av identitet) Det finns ett unikt neutralt element $e \in G$ så att $e * a = a * e = a$ för alla $a \in G$.
3. (Existens av invers) För varje element $a \in G$ finns ett element som vi betecknar med $a^{-1} \in G$ sådant att $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Elementet a^{-1} kallas inversen till elementet a.

En ändlig grupp beskrivs av sin ”multiplikationstabell”, bestående av alla produkter $a * b$, där $a, b \in G$. Varje rad och kolumn i multiplikationstabellen innehåller varje element i gruppen exakt en gång och detta måste vara fallet eftersom inversen finns för varje element.

Exempel 2. Betrakta de två olika gruppstrukturerna av ordning 4, V och $\mathbb{Z}_4$.[1] Vi beskriver dem genom deras respektive multiplikationstabell. Med $\mathbb{Z}_4$ menar vi då gruppen $(\mathbb{Z}_4, +)$.

Tabell 1: Multiplikationstabellen för gruppen $\mathbb{Z}_4$.

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabell 2: Multiplikationstabellen för Kleins fyrgrupp V.

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Definition 2.3. Om en delmängd H av en grupp G är sluten under binära operationen på G och om H är en grupp, så kallas H för en delgrupp av G.

Exempel 3. Om vi går tillbaka till våra nyss nämnda grupper, $\mathbb{Z}_4$ och V, så gäller det att den enda icke triviala delgruppen av $\mathbb{Z}_4$ är $H_1 \equiv \{0, 2\}$. Notera att H_1 verkligen är en delgrupp till $\mathbb{Z}_4$, den uppfyller alla krav: att den är en delmängd är trivialt och att den är sluten under $+$ kan vi lätt kontrollera.

[1] Gruppen V kallas för Kleins fyrgrupp där V kommer från tyskans Vier (fyra).

Ett exempel på en delmängd till $\mathbb{Z}_4$ som icke är en delgrupp är $\{0, 3\}$ ty $\{0, 3\}$ ej är sluten under $+$, till exempel $3 + 3 = 2 \notin \{0, 3\}$.

Gruppen V har tre icke triviala delgrupper: $\{e, a\}$, $\{e, b\}$ och $\{e, c\}$. Ett exempel av en delmängd som ej är en delgrupp är i det här fallet $\{e, a, b\}$, ty $a * b = c$, $c \notin \{e, a, b\}$.

Definition 2.4. En avbildning ϕ från en grupp $(G, *)$ till en annan grupp $(G', \cdot)$ är en homomorfism om egenskapen

$$\phi(a * b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$$

är uppfylld för alla $a, b \in G$. Två mängder sägs ha samma algebraiska strukturer, om de skiljer sig endast i namnen på elementen. En 1-till-1-funktion mellan två mängder med samma algebraiska struktur kallas isomorfism. Med andra ord, en isomorfism är en homomorfism som är bijektiv. Två matematiska objekt kallas isomorfa om det finns en isomorfism mellan dem.

Exempel 4. Betrakta det komplexa talet $u = e^{2\pi i/3}$ som har egenskapen $u^3 = 1$. Vidare låt oss betrakta matriserna:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \quad \textit{och} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix}.$$

Vi undersöker egenskaperna hos mängden $S = \{I, A, B\}$ med avseende på vanlig matrismultiplikation. Vi ska visa att $(S, \cdot)$ är en grupp.

- Existens av identitet

  I fungerar som identitet.

- Slutenhet

  Vi har
  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{k+n} \end{bmatrix}$$
  och eftersom $u^3 = 1$, är mängden S sluten under multiplikation.

- Associativitet

  För att visa att associativitet gäller, skulle vi hypotetiskt behöva uträkna 27 möjliga kombinationer, men detta följer av att matris-multiplikation är associativ.

- Existens av invers

Nu visar vi att A^{-1} och B^{-1} finns i gruppen. Båda matriserna och deras invers är den matris som består av inverserna av deras diagonalelement:

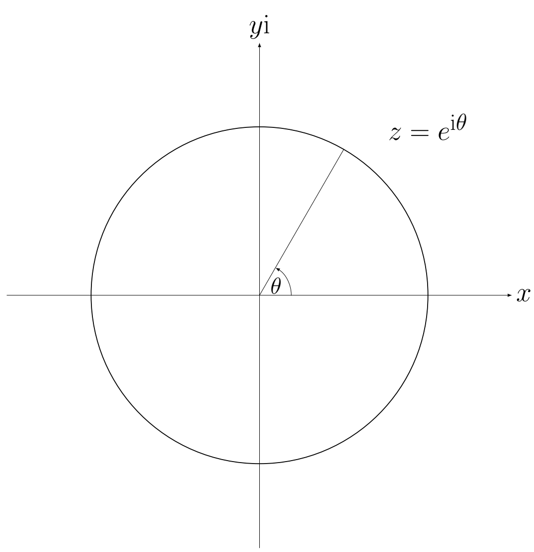
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/1 & 0 \\ 0 & 1/u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix} = B.$$

Vidare är $B^{-1} = A$.

Därmed har vi visat att $(S, \cdot)$ är en grupp.

Exempel 5. Betrakta mängden $U = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ bestående av alla komplexa tal z sådana att $|z| = 1$ tillsammans med vanlig multiplikation $\cdot$. Om vi låter $\mathbb{R}_{2\pi}$ beteckna det halvöppna intervallet $[0, 2\pi)$ och låter $+_{2\pi}$ stå för addition modulo 2π så är gruppen $(U, \cdot)$ isomorf med gruppen $(\mathbb{R}_{2\pi}, +_{2\pi})$. Bortsett från namnen på respektive operation och element så är de algebraiska strukturerna hos de två grupperna identiska. Detta är vad som menas med att två grupper är isomorfa.

Vi har alltså en naturlig 1-till-1-korrespondens mellan $z \in U$ och $\theta \in \mathbb{R}_{2\pi}$ ty $|z| = 1$ och för $z_1, z_2 \in U$ så har vi att $|z_1 z_2| = 1$ medan deras argument θ_1 och θ_2 adderas modulo 2π (se i Figur 1).



Figur 1: Enhetscirkeln i det komplexa talplanet.

Exempel 6. Vi kan lätt se att $U = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ och $U_n = \{z \in \mathbb{C} : \ z^n = 1\}$ är grupper. Multiplikation av komplexa tal är associativ och både U och U_n innehåller 1, identiteten för multiplikation. För $e^{i\theta} \in U$, är beräkningen som nedan:

$$e^{i\theta} \cdot e^{i(2\pi - \theta)} = e^{2\pi i} = 1$$

som visar att alla element i U har en invers. För $z \in U_n$ är beräkningen som nedan:

$$z \cdot z^{n-1} = z^n = 1$$

som visar att alla element i U_n har en invers. Vidare kan man visa att $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ är isomorf med $(U_n, \cdot)$ så att $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ är en grupp för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.

Definition 2.5. (Kommutativitet) En grupp $(G, *)$ kallas kommutativ eller abelsk om och endast om gruppoperationen är kommutativ, det vill säga $a * b = b * a$ för alla $a, b \in G$.

I abelska grupper använder man ofta additionstecknet som symbol för gruppoperationen, det neutrala elementet kallas 0 och man skriver inversen till a som $-a$. En sammanfattning av gruppegenskaperna i en abelsk grupp G är:

- $a + (b + c) = (a + b) + c$, för alla $a, b \in G$.
- Det finns $0 \in G$ så att $a + 0 = a$.
- För alla $a \in G$ finns a så att $a + (-a) = 0$.
- $a + b = b + a$ för alla $a \in G$.

Alla grupper i tidigare exempel är abelska.

Exempel 7. En mycket användbar grupp inom fysiken är $SU(n)$, *Special Unitary Group*, som består av alla unitära $n \times n$-matriser vars determinant är lika med $+1$. En unitär matris uppfyller villkoret $AA^\dagger = I$, där $A^\dagger = (\bar{A})^T$. Inom fysiken används $SU(2)$ för att beskriva en partikels *spinn*. Gruppen $SU(2)$ genereras av matriser på formen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Exempel 8. Mängden av alla ortogonala $n \times n$-matriser tillsammans med multiplikationen är en grupp $O(n)$, Orthogonal Group. Ortogonala matriser uppfyller villkoret $AA^T = I$. Determinanten av en ortogonal matris uppfyller följande:

$$\begin{aligned} 1 = \det(I) = \det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A) \\ \Leftrightarrow [\det(A)]^2 = 1 \Leftrightarrow \det(A) = \pm 1 \end{aligned}$$

där vi använt oss av $\det(A^T) = \det(A)$.

Exempel 9. Gruppen $SO(n)$, Special Orthogonal Group, består av alla ortogonala $n \times n$-matriser med determinanten lika med $+1$.

2.2 Representationer av grupper

I detta avsnitt pratar vi om grupprepresentationer och ger ett påstående om irreducibla sådana.

Definition 2.6. Gruppen $GL_n(V)$, General Linear Group, består av inverterbara $n \times n$-matriser över ett vektorrum V. $GL(n)$ kan ses som mängden av inverterbara avbildningar på V. Om vektorrummet är över $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, skriver man $GL_n(\mathbb{R})$ eller $GL_n(\mathbb{C})$. Om man vet vilket vektorrum som används så kan man skriva bara $GL(n)$ istället, där n är vektorrummets dimension.

En representation av en ändlig grupp $(G, *)$ på ett n-dimensionellt komplext vektorrum V är en grupphomomorfism $\rho : G \to GL(n)$ som uppfyller

$$\rho(g_1 * g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2) \quad \text{för alla } g_1, g_2 \in G.$$

Dimensionen av vektorrummet V kallas för graden av ρ.

En avbildning φ mellan två representationer ρ och σ av G är en vektorrumsavbildning $\varphi : \rho \to \sigma$ så att diagrammet i Figur 2 gäller för alla $g \in G$.

$$\begin{tikzcd}
\rho \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"] & \sigma \arrow[d, "g"] \\
\rho \arrow[r, "\varphi"] & \sigma
\end{tikzcd}$$

Figur 2: Representation av grupperna ρ och σ.

Definition 2.7. En representation ρ kallas irreducibel om det inte finns något äkta nollskilt invariant delrum σ av ρ.

Om $\rho : G \to GL(V)$ och $\sigma : G \to GL(W)$ är representationer, då är direktsumman $\rho \oplus \sigma$ också en representation. Vidare är även tensorprodukten $\rho \otimes \sigma$ en representation och den definieras via:

$$\rho(g)(v \otimes w) = \rho(g)(v) \otimes \rho(g)(w)$$

där $v \in V$ och $w \in W$ [3, 4].

2.3 Irreducibla representationer av grupper

Restriktionen av ρ på ett G-invariant delrum $W \subset V$ kallas för en delrepresentation. Litet förenklat kan man säga att en irreducibel representation av en algebraisk struktur är en nollskild representation som inte har en delrepresentation.

Sats 1. Varje representation av en ändlig grupp är fullständigt reducibel. Det vill säga varje representation av en ändlig grupp G kan skrivas som en direktsumma av irreducibla representationer [4].

3 Tensorer

Skalärer inom fysiken kan beskriva diverse storheter såsom farten eller längden av ett objekt. Vektorer, som har både storlek och riktning, beskriver bland annat hastighet. Det finns objekt vars mekaniska egenskaper beskrivs av så kallade tensorer, som när ett objekt blir påverkat av spänningskrafter i olika riktningar (se spänningstensorn [11]).

Komponenterna v^i i en vektor, koefficienterna för en linjär form, elementen i matrisen för en linjär operatör, alla dessa är exempel på en klass av geometriska objekt som kallas tensorer. Tensorer har mycket användning i beskrivning av flerdimensionella objekt.

Exempel 10. Här följer korta exempel på tensorer i $\mathbb{R}^3$

- Vektor v^j är en tensor av ordning 1 (ty den har endast ett index) med tre oberoende komponenter: v^1, v^2 och v^3.
- Matris M^{ij} är en tensor av ordning 2 med $3 \times 3 = 3^2$ oberoende komponenter.
- Tensor T^{ijk} är av ordning 3 med 3^3 oberoende komponenter.
- Tensor $T^{j_1 j_2 \cdots j_k}$ är av ordning k och har 3^k oberoende komponenter.

Exempel 11. Vi generaliserar det här ytterligare genom att arbeta i $\mathbb{R}^n$ och får då följande exempel.

- Vektor v^j är en tensor av ordning 1 med n oberoende komponenter; $v^1, v^2, \ldots, v^n$.
- Tensor $T^{j_1 j_2 \cdots j_k}$ är av ordning k och har n^k oberoende komponenter.

Vi kan säga att en tensor är en generaliserad vektor som kan ha t index uppe och h index nere, där talen t och h inte behöver vara samma. Ett exempel är

$$T^{ij}_{abc} = \vec{u^i}\vec{v^j}\vec{X_a}\vec{Y_b}\vec{Z_c}$$

där $\vec{u}, \vec{v}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ är alla vektorer.

3.1 Einsteins summationskonvention

År 1916 utvecklade Einstein den allmänna relativitetsteorin [5]. Under arbetet upptäckte han bland annat att det förekom väldigt många summationstecken. Ett vanligt uttryck skulle kunna se ut som

$$\sum_i \sum_j \sum_k a_i b^i c_j d^j e_k f^k. \tag{1}$$

Han märkte att väldigt ofta (om inte alltid) så summerade man över upprepade index och tyckte då att man lika gärna kan undvika skriva summationstecknet och att låta det vara underförstått över upprepade index. Vårt uttryck i (1) kan då skrivas som

$$a_i b^i c_j d^j e_k f^k. \tag{2}$$

Denna konvention som i princip alla inom fysik använder idag kallas Einsteins summationskonvention.

En vektor $\vec{x} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ med avseende på basvektorerna $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ skrivs då på formen

$$\vec{x} = \xi^i \vec{e_i}.$$

Om $c_1, \ldots, c_n$ är koefficienterna i uttrycket för en linjär form $f(\vec{x})$, då skriver vi $f(\vec{x}) = c_i \xi^i$. Resultatet av att tillämpa $A = a_i^j$ på en basvektor blir $A\vec{e_i} = a_i^j \vec{e_j}$. Det finns många liknande exempel.

3.2 Definition av tensorer via transformationer

Vi kan ge en mer exakt beskrivning av tensorer via deras transformationsegenskaper. Då betecknar vi kvantiteter med avseende på ett nytt koordinatsystem. Vi använder samma symboler som ovan men med primtecken för indexen. Elementen i transformationsmatrisen från basvektor $\vec{e}_i$ till basvektor $\vec{e}_{i'}$ kommer att betecknas med $p_{i'}^i$, så att

$$\vec{e}_{i'} = p_{i'}^i \vec{e}_i. \tag{3}$$

Elementen i matrisen av den inversa transformationen kommer att betecknas med $q_i^{i'}$ det vill säga $\vec{e}_i = q_i^{i'} \vec{e}_{i'}$.

Matrisen $q_i^{i'}$ är inversen till matrisen $p_{i'}^i$. Detta faktum kan uttryckas som

$$p_{i'}^i q_j^{i'} = \begin{cases} 1 & \text{för } i = j, \\ 0 & \text{för } i \neq j \end{cases} \quad \text{eller} \quad p_{i'}^i q_i^{j'} = \begin{cases} 1 & \text{för } i' = j', \\ 0 & \text{för } i' \neq j'. \end{cases}$$

Genom att använda Kronecker-delta $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j \end{cases}$ får vi $p^i_{i'} q^{i'}_j = \delta^i_j$ och $p^i_{i'} q^{j'}_i = \delta^{j'}_{i'}$ [9].

Tensorer kan man dela in i tre kategorier: kovarianta, kontravarianta och blandade. Varje tensor har en ändlig ordning.

3.2.1 Kovarianta tensorer

Vi börjar med kovarianta tensorer och tar som exempel en tensor av ordning tre.

Definition 3.1. Antag att det finns en regel som i varje koordinatsystem av ett n-dimensionellt rum V ger oss möjlighet att bygga n^3 tal (komponenter) T_{ijk}, vart och ett specificerat genom indexen $i, j, k = 1, \ldots, n$. Tensor T_{ijk} transformeras enligt följande vid övergången till en ny bas:

$$T_{i'j'k'} = p^i_{i'} p^j_{j'} p^k_{k'} T_{ijk}.$$

En kovariant tensor av valfri ordning definieras på liknande sätt. En tensor av ordning m har n^m komponenter och i transformationsformeln visas m faktorer istället för 3 som ovan.

3.2.2 Kontravarianta tensorer

Vi definierar nu en kontravariant tensor för specialfallet av ordning 3.

Definition 3.2. Anta att vi har en regel som i varje koordinatsystem låter oss att bygga n^3 tal T^{ijk}, där indexen $i, j, k = 1, \ldots, n$. Dessa siffror bildar en kontravariant tensor T^{ijk} av ordning 3, om den bildar en ny bas. Då transformeras T^{ijk} enligt:

$$T^{i'j'k'} = q^{i'}_i q^{j'}_j q^{k'}_k T^{ijk}.$$

En kontravariant tensor av ordning m definieras på motsvarande sätt med m istället för 3.

Kovariant innebär att transformation på samma sätt som basvektorer, det vill säga genom att använda koefficienterna $p^i_{i'}$. Kontravariant betyder transformation i motsatt riktning, det vill säga genom att använda koefficienterna $q^{i'}_i$.

3.2.3 Blandade tensorer

Den tredje kategorin av tensorer är de blandade. Även denna gång börjar vi med ett specialfall.

Definition 3.3. Låt n^3 tal bygga upp T_{ij}^k, som anges i varje koordinatsystem, alltså bilda en blandad tensor av ordning 3, med två kovarianta index och ett kontravariant index. Anta att T_{ij}^k bildar en ny bas, då transformeras den enligt följande:

$$T_{i'j'}^{k'} = p_{i'}^i p_{j'}^j q_k^{k'} T_{ij}^k.$$

En blandad tensor med l kovariant index och m kontravarianta index definieras på samma sätt. I praktiken är en matris en blandad tensor av ordning 2, med ett kovariant index och ett kontravariant index.

3.3 Tensoroperationer

Vi börjar med att beskriva två aritmetiska operationer och fortsätter med en mer specifik.

3.3.1 Addition av tensorer

Man kan addera två tensorer T_{ij}^k och S_{ij}^k med samma struktur. I det här fallet blir summan en tensor Q_{ij}^k. I varje koordinatsystem är varje komponent i Q_{ij}^k summan av motsvarande komponenter i T_{ij}^k och S_{ij}^k, där i, j, k är ett bestämt antal index.

Att denna summa Q_{ij}^k faktiskt bildar en tensor med samma struktur som T_{ij}^k och S_{ij}^k följer av likheten

$$\begin{aligned} Q_{i'j'}^{k'} = T_{i'j'}^{k'} + S_{i'j'}^{k'} &= p_{i'}^i p_{j'}^j q_k^{k'} T_{ij}^k + p_{i'}^i p_{j'}^j q_k^{k'} S_{ij}^k \\ &= p_{i'}^i p_{j'}^j q_k^{k'} (T_{ij}^k + S_{ij}^k) = p_{i'}^i p_{j'}^j q_k^{k'} Q_{ij}^k. \end{aligned}$$

3.3.2 Multiplikation av tensorer

Låt T_{ij} och S_k^l vara två tensorer som båda är av ordning två men med olika strukturer. I alla koordinatsystem är deras komponenter med indexen i, j, k, l definierade att vara lika med produkten av de motsvarande komponenterna hos faktorerna T_{ij} och S_k^l. Så tensorn Q_{ijk}^l kan verifieras enligt följande:

$$Q_{i'j'k'}^{l'} = T_{i'j'} S_{k'}^{l'} = p_{i'}^i p_{j'}^j T_{ij} p_{k'}^k q_l^{l'} S_k^l = p_{i'}^i p_{j'}^j p_{k'}^k q_l^{l'} T_{ij} S_k^l = p_{i'}^i p_{j'}^j p_{k'}^k q_l^{l'} Q_{ijk}^l.$$

3.3.3 Kontraktion av tensorer

Operationen kontraktion kan tillämpas på tensorer med minst ett kovariant och ett kontravariant index. Antag att vi har en tensor T_{ij}^k. Att kontrahera T_{ij}^k med avseende på det övre första indexet betyder att bilda en kvantitet T_{ij}^i i varje koordinatsystem. Kontraktion enligt ovan ger oss en annan tensor av ordning två i detta fall, det vill säga ordning 1 mindre än hos den ursprungliga tensorn. Beräkningen i exemplet blir som följer:

$$T'_j = T^{i'}_{i'j'} = p^i_{i'} p^j_{j'} q^{i'}_k T^k_{ij} = (p^i_{i'} q^{i'}_k) p^j_{j'} T^k_{ij} = \delta^i_k p^j_{j'} T^k_{ij}.$$

Summeringen över k reduceras till bara ett uttryck med $k = i$. Så erhåller vi

$$T_{j'} = p^j_{j'} T^i_{ij} = p^j_{j'} T_j.$$

3.4 $SU(n)$-tensorer

I $SO(n)$ spelar det ingen roll om indexen stå nere eller uppe, men i $SU(n)$ spelar det roll. De transformeras olika. Tensor T i $SU(n)$, transformeras då enligt:

$$T^{ijk}_{abc} \to T'^{ijk}_{abc} = A^{ii'} A^{jj'} A^{kk'} A_{aa'} A_{bb'} A_{cc'} T^{i'j'k'}_{a'b'c'} \tag{4}$$

där en transformationsmatris följer för varje index. På så sätt kan man se en tensor som en generaliserad vektor, jämför (4) med ($\xi_j \to {\xi_j}' = A_{jk}\xi_k$). Notera att antalet övre index inte behöver vara lika med antalet nedre index.

Dessa matriser kan ses som linjära transformationer i ett n-dimensionellt komplext vektorrum C_n, där varje vektor $\psi_i = (\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n)$ avbildas av en $SU(n)$-transformation U_{ij} via

$$\psi_i \to \psi'_i = U_{ij}\psi_i \in C_n.$$

Vidare kan vi definiera (den kovarianta) en inre produkt av två vektorer

$$(\psi, \phi) = \bar{\psi}_i \phi_i$$

som är kovariant under $SU(n)$- transformationer. Komplexa konjugatet av ψ följer transformationsregeln

$$\bar{\psi}_i \to \bar{\psi}'_i = \bar{U}_{ij}\bar{\psi}_j = \bar{\psi}_j U^\dagger_{ji}.$$

Som vi ser så transformeras $\bar{\psi}_i$ och ψ_i olika under unitära transformationer. Det kan vara bekvämt att införa notationen $\psi^i \equiv \bar{\psi}_i$ samt ${U_i}^j \equiv U_{ij}$ och ${U^i}_j \equiv \bar{U}_{ij}$.

Då kan vi skriva transformationsreglerna som $\psi_i \to \psi'_i = {U_i}^j \psi_j$ och $\psi^i \to \psi'^i = {U^i}_j \psi^j$.

Vektorer ψ_i utgör en bas för den fundamentala[2] representationen av $SU(n)$, medan ψ^i är en bas för konjugatrepresentationen. Tensorer av typ $SU(n)$ som har högre rang, definierar inte baser av irreducibla representationer i allmänhet. Av väldigt stor betydelse inom matematik, men speciellt för fysikaliska tillämpningar, är att kunna skriva en tensor som summa av irreducibla tensorer. En teknik för att underlätta detta är att använda sig av så kallade Young-tablåer. Detta blir temat för nästa avsnitt [6, 10].

[2] Den fundamentala representationen brukar också helt enkelt kallas för vektor-representationen.

4 Spinn och Young-tablåer

Vi har gett en introduktion till grupper och representationer av dessa, samt har vi infört och diskuterat tensorer. Mycket av det har tillämpningar inom teoretisk fysik och kemi. Vi kommer i denna avsnitt ge exempel på sådana tillämpningar.

Kvantmekaniken, använder sig väldigt mycket den teorin. Speciellt i beskrivningen av egenskapen som kallas spinn. Det tar vi upp i delavsnitt 4.1.

Enligt Sats 1 att för ändliga grupper kan man alltid skriva deras representationer som en direktsumma av irreducibla representationer. Ibland kan det vara så att man enbart är intresserad av dimensionerna hos de olika termerna i direktsumman. Ett väldigt effektivt verktyg för att ta reda på dessa är så kallade Young-tablåer. Dessa kommer vi att ta upp i delavsnitt 4.2. I delavsnitt 4.3 går vi igenom hur man kan 'multiplicera' två Young-tablåer.

4.1 Spinn inom partikelfysiken

Spinn är ett begrepp inom kvantmekanik och kvantfysik som beskriver en egenskap hos partiklar. Små partiklar såsom elektroner, protoner, neutroner, fotoner och även sammansatta partiklar, som molekyler och atomer, har spinn. Typen av spinn kan anges med s, som kan antingen vara heltal $(0, 1, 2, \dots)$ eller halvtal $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots)$. Antalet spinntillstånd ges av formeln $2s + 1$.

Man räknar spinn i enheter av Plancks konstant[3] $\hbar$ med avseende på en kvantisationsaxel, se Figur 3.

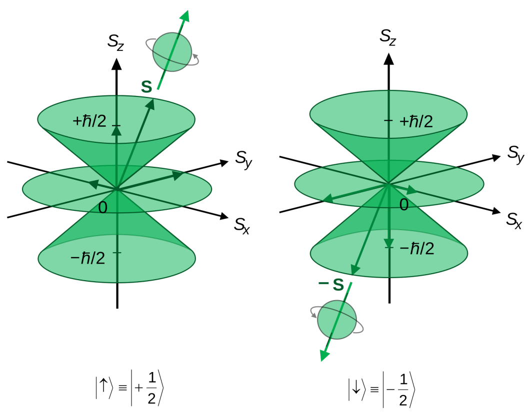
En partikel med spinn 0 har alltså en frihetsgrad med avseende på dess spinn, ett exempel på en sådan partikel är Higgs-partikeln. En partikel med spinn $\frac{1}{2}$ har två frihetsgrader: spinntillstånd $\frac{1}{2}$ och spinntillstånd $-\frac{1}{2}$. Till sist, har en massiv partikel med spinn 1, tre frihetsgrader: $-1, 0$ och 1 [13].

Vi tar elektroner som exempel för att beskriva spinn. En elektron har några egenskaper som vi kan mäta:[4] läge, rörelsemängd, massa och laddning, men de två sista är samma för alla elektroner så vi

[3] Egentligen kallas $\hbar$ för den reducerade Planck-konstanten. Plancks konstant ges av $h = \hbar \times 2\pi$ där $\hbar = 6,6261 \cdot 10^{-34}$[Js]. Ett annat namn för $\hbar$ är Diracs konstant.

[4] Notera att en partikel med massa m och rörelse mängd p har den relativistiska energin $E = \sqrt{c^2p^2 + c^4m^2}$. En partikel i vila $(p = 0)$ har alltså energin $E = mc^2$ vilket är en av Einsteins mer berömda formel.

bortser från dem i det som följer. Och om vi inte är intresserade av dess läge och rörelsemängd så finns enbart en egenskap hos elektronen som är av intresse, detta är elektronens spinn. En elektron är en partikel med spinn $\frac{1}{2}$ så den kan ha två olika tillstånd med avseende på kvantisationsaxeln (vilken nästan alltid väljs z-axeln): spinn upp ($\uparrow$) eller spinn ner ($\downarrow$)[5], som vi ser i Figur 3.



Figur 3: Spinnvektorn **S** pekar i godtycklig riktning medan kvantisationsaxeln har valts i z-riktningen. Vänstra bilden visar spinn upp ($+\frac{1}{2}$) och den högra spinn ned ($-\frac{1}{2}$).

[5] Detta är en ekvivalent beskrivning som det tidigare spinn $+\frac{1}{2}$ och spinn $-\frac{1}{2}$.

Mer rigoröst kan man beteckna elektronens spinntillstånd med tillståndsvektorn

$$|s, m\rangle,$$

där s är elektronens totala spinn och m refererar till projektionen av spinnet på z-axeln. Alltså gäller det för elektronen att

$$|s, m\rangle = \begin{cases} |1/2, +1/2\rangle = & \uparrow, \\ |1/2, -1/2\rangle = & \downarrow . \end{cases}$$

Vi kan också fråga oss vad spinnet hos ett system av partiklar är? Kan man addera dem som vanliga tal? Låt oss titta på ett system av två elektroner. Som vi redan nämnt så kan dessa elektroner ha spinn upp eller spinn ned med avseende på en given axel. Alltså har två-elektronsystemet fyra basvektorer.[6] Dessa är

$$\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow, \tag{5}$$

där första (andra) pilen refererar till elektron nummer ett (två). Spinnet av systemet $|s, m\rangle$ bestående av dessa två elektroner ges då av direktprodukten av de enskilda elektronernas spinntillstånd:

$$|s, m\rangle \propto |s_1, m_1\rangle \otimes |s_2, m_2\rangle \equiv |s_1, m_1\rangle|s_2, m_2\rangle. \tag{6}$$

Mer generellt så ges systemets spinn av en linjärkombination av dessa spinntillstånd [13]

$$|s, m\rangle = \sum_{m=m_1+m_2} C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m} |s_1, m_1\rangle|s_2, m_2\rangle \tag{7}$$

där $C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m}$ är Clebsch-Gordan koefficienter [12, 13]. Systemets bastillstånd (5) kan skrivas som följer:

$$\begin{aligned} (\uparrow\uparrow) &\equiv |1/2, +1/2\rangle\ |1/2, +1/2\rangle \\ (\uparrow\downarrow) &\equiv |1/2, +1/2\rangle\ |1/2, -1/2\rangle \\ (\downarrow\uparrow) &\equiv |1/2, -1/2\rangle\ |1/2, +1/2\rangle \\ (\downarrow\downarrow) &\equiv |1/2, -1/2\rangle\ |1/2, -1/2\rangle\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Med hjälp av en Clebsch-Gordan-tabell [12, 14] kan man hitta att tre kombinationer har totalt spinn 1, dessa är

$$\left.\begin{array}{ll} |1,1\rangle & = \uparrow\uparrow \\ |1,0\rangle & = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1,-1\rangle & = \downarrow\downarrow \end{array}\right\} \quad s = 1 \quad \text{(triplett)} \tag{9}$$

[6] Mer korrekt: bastillstånd.

och en kombination med totalt spinn lika med 0

$$|0,0\rangle = \left.\frac{(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)}{\sqrt{2}}\right\} \quad s = 0 \quad \text{(singlett)}. \tag{10}$$

Om vi uttrycker oss i termer av representationsteori så kan man säga att direktprodukten av två två-dimensionella representationer av spinngruppen $SU(2)$ bildar en fyr-dimensionell representation. Som vi har precis sett så består denna representation av en direktsumma av irreducibla representationer: Singletten som är den endimensionella representationen och tripletten som är den tredimensionella representationen. Alltså, i $SU(2)$ har vi

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1, \tag{11}$$

där siffrorna betecknar dimensionen av respektive representationen.

Det händer att man i fysikaliska tillämpningar av representationsteori bara är intresserad av att veta en representations uppdelning. Vi kunde till exempel bara vara intresserade av högerledet av (11) utan att behöva gå igenom beräkningarna innan den. Det finns ett bra verktyg till just detta och det kallas Young-tablåer, vilka vi kommer till härnäst.

4.2 Young-tablå

Young-tablå kan ses som den grafiska representationen av irreducibla representationer som motsvarar tensorer. Symmetriska tensorer [7]S^{ijk} skrivs som lådor på en rad:

$$\boxed{i}\boxed{j}\boxed{k},$$

medan antisymmetriska [8] A^{abc} skriver man som en kolumn

$$\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline \end{array}.$$

Blandade tensorer, som till exempel T^k_{ij} (det vill säga en tensor som är symmetrisk under $i \leftrightarrow j$ men antisymmetrisk under $i \leftrightarrow k$ eller $j \leftrightarrow k$) skrivs såsom

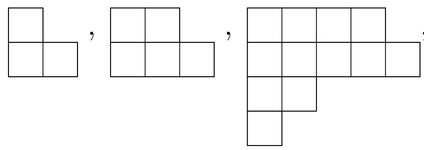
$$\begin{array}{|c|c|}\hline i & j \\ \hline k \\ \cline{1-1} \end{array}\ .$$

[7]Tensorer som uppfyller $T^{ijk} = T^{jik}$ kallas symmetriska.
[8]Tensorer som uppfyller $T^{ijk} = -T^{jik}$ är antisymmetriska.

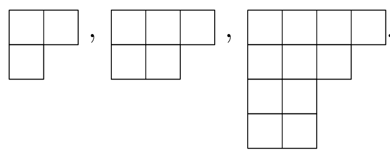
För $SU(n)$ gäller det att en Young-tablå kan bestå av hur många boxar som helst så länge följande är uppfyllt:[7]

- inte fler än n rutor i varje kolumn
- varje rad startar från vänster till höger
- ingen rad är längre än raderna ovanför den.

Följande diagram är otillåtna:



och nedanstående är tillåtna:



4.3 Multiplikation av Young-tablåer

Man kan multiplicera irreducibla representationer och skriva dem som en direktsumma av irreducibla representationer med hjälp av Young-tablåer. För att multiplicera två tablåer till exempel T_1 och T_2, så skall man lägga dem bredvid varandra i alla olika kombinationer sådana att följande regler följs [7, 8].

- Tilldela en unik bokstav till varje rad av T_1 till exempel $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a & a & a & a \\ \hline b & b \\ \cline{1-2} c \\ \cline{1-1}\end{array}$.
- Ta alla lådor märkta med första bokstaven, till exempel a, från T_1, och lägg dem till T_2 på alla möjliga vis men så att inga två lådor med a hamnar i samma kolumn och så att resultatet fortfarande är en Young-tablå.
- Upprepa proceduren med alla raderna/bokstäverna, det vill säga alla b, c och så vidare.
- Resultatet av proceduren är (direktsumman av) flera tablåer T_j. För varje sådan tablå, bilda en följd s_j genom att läsa av raderna från höger till vänster och uppifrån och ned. Till exempel ger $\begin{array}{|c|c|}\hline b & a \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array}$ följden $s = \{abc\}$.

- Varje följd läses nu av från vänster till höger. När du läser av följden så måste det vid varje given plats i följden finnas minst lika många a som b och b som c och så vidare. Bara sådana tablåer ska behållas.
- Om två eller flera tablåer har samma struktur och följder så betyder det att de är exakta kopior av varandra och då måste man enbart behålla ett exemplar av tablån och inte flera.

För att förtydliga det som vi nämnt ovan så ger vi här nedan några exempel på produkter av Young-tablåer:

Exempel 12.

$$\ytableaushort{a} \otimes \ydiagram{1} = \ytableaushort{{}a} \oplus \ytableaushort{{},a}.$$

Exempel 13.

$$\ytableaushort{a} \otimes \ydiagram{2} = \ytableaushort{{}{}a} \oplus \ytableaushort{{}{},a}.$$

Exempel 14. Härnäst tittar vi på produkten av två antisymmetriska tensorer T_1 och T_2,

$$\ytableaushort{a,b} \otimes \ydiagram{1,1}.$$

Vi delar upp beräkningen i två steg, först beräknar vi $\ytableaushort{a} \otimes \ydiagram{1,1}$

$$\ytableaushort{a} \otimes \ydiagram{1,1} = \ytableaushort{{},{},a} \oplus \ytableaushort{{}a,{}}.$$

Sedan lägger vi lådan $\ytableaushort{b}$ till föregående högerled:

$$\ytableaushort{a,b} \otimes \ydiagram{1,1} = \ytableaushort{{},{},a,b} \oplus \ytableaushort{{}b,{},a} \oplus \ytableaushort{{}ab,{}} \oplus \ytableaushort{{}a,{}b} \oplus \ytableaushort{{}a,{},b}.$$

Dessa tablåer har respektive följder

$$\{ab\}, \{ba\}, \{ba\}, \{ab\} \text{ och } \{ab\}.$$

Enligt reglerna så är $\{ba\}$ ej tillåten, så vi måste slänga andra och tredje tablåen. Alltså har vi

$$\ytableaushort{a,b} \otimes \ydiagram{1,1} = \ytableaushort{{}a,{}b} \oplus \ytableaushort{{}a,{},b} \oplus \ytableaushort{{},{},a,b}.$$

Exempel 15. Vi avslutar med ett längre exempel det vill säga $\ytableaushort{aa,b} \otimes \ydiagram{2,1}$. Vi delar upp beräkningen i flera steg. Vi börjar med att namnge lådorna och lägga till första a till högra tablån.

$$\text{Steg 1: } \ytableaushort{a} \otimes \ydiagram{2,1} = \ytableaushort{{}{}a,{}} \oplus \ytableaushort{{}{},{}a} \oplus \ytableaushort{{}{},{},a}.$$

Nu lägger vi a på högerledet i steg 1.

$$\text{Steg 2: } \ytableaushort{aa} \otimes \ydiagram{2,1} = \ytableaushort{{}{}aa,{}} \oplus \ytableaushort{{}{}a,{}a} \oplus \ytableaushort{{}{}a,{},a} \oplus \ytableaushort{{}{},{}a,a} \oplus \ytableaushort{{}{},{},a,a},$$

där femte tablån är otillåten, för att två lådor med samma bokstav får inte hamna i samma kolumn enligt reglerna.

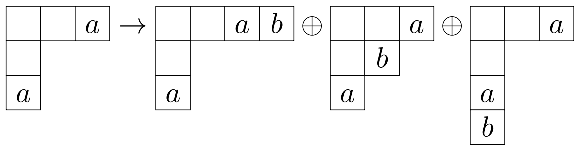
Nu upprepas proceduren med b.

$$\text{Steg 3: } \ytableaushort{{}{}aa,{}} \to \ytableaushort{{}{}aab,{}} \oplus \ytableaushort{{}{}aa,{}b} \oplus \ytableaushort{{}{}aa,{},b}$$

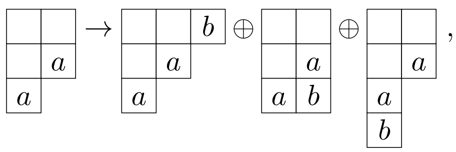
vi får följderna $\{baa\}$, $\{aab\}$ och $\{aab\}$ där $\{baa\}$ är otillåten enligt reglerna.

$$\ytableaushort{{}{}a,{}a} \to \ytableaushort{{}{}ab,{}a} \oplus \ytableaushort{{}{}a,{}ab} \oplus \ytableaushort{{}{}a,{}a,b}$$

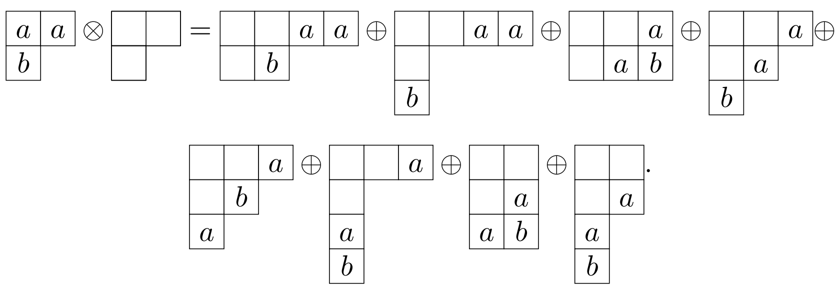
där första tablån är otillåten.



här första tablån är otillåten igen.


, där första är otillåten.

Så resultatet blir som nedan:



I följande avsnitt går vi igenom hur man kan räkna dimensionen av en Young-tablå.

4.4 Dimensionen av en Young-tablå i $SU(n)$

Dimensionen av en irreducibel representation av $SU(n)$ ges av formeln:

$$D = \prod_{\text{lådor}} \frac{n + d_{\text{låda}}}{h_{\text{låda}}}, \tag{12}$$

där produkten är över alla lådor i en given tablå.

$d_{\text{låda}}$ är ett tal som ges av regeln

0	1	2	3	...
−1	0	1	2	...
−2	−1	0	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

.

I ord kan man säga att d-värdet för en given låda i en tablå är lika med 0 för första lådan (läst från vänster till höger och uppifrån till ned).

Sedan ökar d-värdet med en enhet för varje steg till höger medan den minskar med en enhet för varje steg ned i tablån.

Vidare kallas $h_{\text{låda}}$ för *krok-längden* (hook på engelska) och motsvarar antalet lådor till höger om given låda adderat till antalet lådor under och därefter plus ett.

För att förtydliga ger vi två exempel med tabl\aa er inklusive deras krok-längder och deras d-värde.

Exempel 16. Låt Young-tablån vara $\ydiagram{3,1}$.

$$d\text{-värdena är:} \quad \begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ -1 \end{ytableau} \text{ och krok-värdena är } \begin{ytableau} 4 & 2 & 1 \\ 1 \end{ytableau}$$

$$D = \frac{n+0}{4} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{1} \cdot \frac{n-1}{1}.$$

Exempel 17. Vi tittar på Young-tablån $\ydiagram{4,3,2}$.

$$d\text{-värdena är } \begin{ytableau} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 \end{ytableau} \text{ och krok-värdena är } \begin{ytableau} 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 \end{ytableau}.$$

$$\text{och} \quad D = \frac{n+0}{6} \cdot \frac{n+1}{4} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot \frac{n+3}{1} \cdot \frac{n-1}{4} \cdot \frac{n+0}{2} \cdot \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n-2}{1}.$$

Nu kommer vi att skriva direktprodukten av representationer som en direksumma av irreducibla representationer. Vi gör det för $SU(2)$ och $SU(3)$. Notera att i varje $SU(n)$ så har en ruta $\ydiagram{1}$ dimensionen n. Vi börjar med våra gamla exempel.

Exempel 18. I det här exemplet beräknar vi dimensionen av tablåerna

$$\ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} = \ydiagram{2} \oplus \ydiagram{1,1} \quad \text{i } SU(2).$$

Vi har

$$D\left(\ydiagram{1}\right) = \frac{2+0}{1} = 2$$

så i vänsterledet har vi $2 \otimes 2$.

Högerledet blir

$$D\left(\ydiagram{2}\right) = \frac{2+0}{2} \cdot \frac{2+1}{1} = 3$$

och

$$D\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}\right) = \frac{2+0}{2} \cdot \frac{2-1}{1} = 1.$$

Alltså $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$ i $SU(2)$. Detta är precis vad vi kom fram till i (11) via en annan metod. Kom ihåg den fysikaliska tolkningen av detta resultat. Det säger oss att spinnet hos två partiklar med spinn $\frac{1}{2}$, till exempel elektroner, kan kombineras så att deras spinn blir 1 (vars representation har dimension 3) eller 0 (vars representation har dimension 1).

Exempel 19. Nu beräknar vi dimensionen i $SU(2)$ för samma tablåer i exempel 14.

$$\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline b \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline & a \\ \hline & b \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline & a \\ \hline \\ \cline{1-1} b \\ \cline{1-1}\end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline\end{array}.$$

där dimensionen i vänster och högerled blir

$$D\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}\right) = \frac{2+0}{2} \cdot \frac{2-1}{1} = 1$$

$$D\left(\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline\end{array}\right) = \frac{2+0}{3} \cdot \frac{2+1}{2} \cdot \frac{2-1}{2} \cdot \frac{2+0}{1} = 1$$

$$D\left(\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \\ \cline{1-1}\end{array}\right) = \frac{2+0}{4} \cdot \frac{2+1}{1} \cdot \frac{2-1}{2} \cdot \frac{2-2}{1} = 0$$

$$D\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline\end{array}\right) = \frac{2+0}{4} \cdot \frac{2-1}{3} \cdot \frac{2-2}{2} \cdot \frac{2-3}{1} = 0$$

På så sätt får vi $1 \otimes 1 = 1$.

Exempel 20. Låt oss beräkna

$$\ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} = \ydiagram{2} \oplus \ydiagram{1,1} \text{ i } SU(3).$$

$$D\left(\ydiagram{1}\right) = \frac{3+0}{1} = 3$$

så vänsterledet är $3 \otimes 3$ som förväntat. Då får vi i högerledet

$$D\left(\ydiagram{2}\right) = \frac{3+0}{2} \cdot \frac{3+1}{1} = 6$$

och

$$D\left(\ydiagram{1,1}\right) = \frac{3+0}{2} \cdot \frac{3-1}{1} = 3$$

det vill säga $3 \otimes 3 = 6 \oplus 3$ i $SU(3)$.[9]

Exempel 21. I $SU(3)$ blir dimensionerna av

$$\ydiagram{1} \otimes \ydiagram{2} = \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{2,1} :$$

$$D\left(\ydiagram{3}\right) = \frac{3+0}{3} \cdot \frac{3+1}{2} \cdot \frac{3+2}{1} = 10$$

och

$$D\left(\ydiagram{2,1}\right) = \frac{3+0}{3} \cdot \frac{3+1}{1} \cdot \frac{3-1}{1} = 8,$$

Det säger att $3 \otimes 6 = 10 \oplus 8$ i $SU(3)$.

Exempel 22. Slutligen går vi tillbaka till vårt sista exempel från förra avsnittet. I $SU(3)$ får vi:

$$D\left(\ydiagram{2,1}\right) = \frac{3+0}{3} \cdot \frac{3+1}{1} \cdot \frac{3-1}{1} = 8$$

$$D\left(\ydiagram{4,2}\right) = 27$$

[9] För att vara korrekta så är $3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$ i $SU(3)$ där 3^* är dimensionen av konjugatrepresentationen. Vi går inte in på det mer i denna uppsats.

$$D\left(\ydiagram{4,1,1}\right) = 10$$

$$D\left(\ydiagram{3,3}\right) = 10$$

$$D\left(\ydiagram{3,2,1}\right) = 8$$

$$D\left(\ydiagram{3,2,1}\right) = 8$$

$$D\left(\ydiagram{3,1,1,1}\right) = 0.$$

$$D\left(\ydiagram{2,2,2}\right) = 1$$

$$D\left(\ydiagram{2,2,1,1}\right) = 0.$$

Alltså har vi för

$$\begin{ytableau} a & a \\ b \end{ytableau} \otimes \ydiagram{2,1} = \ydiagram{4,1,1} \oplus \ydiagram{3,3} \oplus \ydiagram{2,2,2} \oplus \ydiagram{4,2} \oplus \ydiagram{3,2,1}$$

i $SU(3)$

$$8 \otimes 8 = 10 \oplus 10 \oplus 1 \oplus 27 \oplus 8 \oplus 8.$$

Det är enkelt att härleda följande mer allmänna formler för dimensionen av en tablå i $SU(n)$ (resultatet för $SU(3)$ ges inom paranteser):

$$D\left(\yng(1)\right) = n \ (= 3)$$

$$D\left(\yng(2,1)\right) = \frac{1}{3}n(n+1)(n-1) \ (= 8)$$

$$D\left(\yng(4,2)\right) = \frac{1}{80}n^2(n^2-1)(n+2)(n+3) \ (= 27).$$

References

[1] Hugh D. Young, Roger A. Freedman, *University Physics*, Tenth Edition, Addison Wesley Longman, 2000.

[2] John B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*, Seventh Edition, Pearson Education Limited, 2014.

[3] William Fulton, Joe Harris, *Representation Theory A First Course*, Springer-Verlag New York, Inc 1991.

[4] "Representations of finite groups". `http://www.math.harvard.edu/~elkies/M250.04/rep.pdf`.

[5] Einstein, Albert. "The Foundation of the General Theory of Relativity". `http://web.archive.org/web/20060829045130/http://www.alberteinstein.info/gallery/gtext3.html`, Annalen der Physik, 1916.

[6] Pilaftsis, Apostolos "Lectures on Symmetries in Physics". `http://www.hep.man.ac.uk/u/pilaftsi/SYM/sym.pdf`, Department of Physics and Astronomy, University of Manchester.

[7] "Young Tableaux". `http://fafnir.phyast.pitt.edu/py3766/tableaux.pdf`

[8] Howard Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Second Edition, Howard Georgi,1999.

[9] "Tensor Method in SU(n)". `http://www.phys.nthu.edu.tw/~class/group_theory2012fall/doc/tensor.pdf`, December 2012.

[10] Georgi E. Shilov, *An introduction to the theory of linear spaces*, Richard A. Silverman, Richard A. Silverman 1961, 1981, Dover Publications, Inc 1974.

[11] Johansson, Lars. "IEI/Mekanik och hållfasthetslära". `http://www.solidmechanics.iei.liu.se/Examiners/Courses/Bachelor_Level/TMHL24/tensor.pdf`

[12] "Table of Clebsch–Gordan coefficients". `https://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_Clebsch%E2%80%93Gordan_coefficients`

[13] J.J Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Second Edition, Pearson, 2011

[14] "Particle Data Group". `http://pdg.lbl.gov/2002/clebrpp.pdf`