UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2016:15

Imitativt, kreativt eller något däremellan?
– en analys av matematiskt resonemang i två läroböcker på universitetet

Christina Fredriksson och Johanna Johansson

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare: Anders Öberg
Examinator: Veronica Crispin Quinonez
Juni 2016

Department of Mathematics
Uppsala University

Imitativt, kreativit eller något däremellan?

- en analys av matematiskt resonemang i två läroböcker på universitetet

Christina Fredriksson och Johanna Johansson

8 juni 2016

Innehåll

Sammanfattning

I den här uppsatsen studerades hur gränsvärden och linjära avbildningars övningsuppgifter behandlas i läroböcker tänkta för högskolestudier. Det undersöktes vilken typ av resonerande som behövdes för att lösa uppgifterna, i ljuset av Johan Lithners teorier.

I första delen av texten analyseras exemplen och övningsuppgifterna i kapitlet som berör gränsvärden i Adams och Essex *Calculus* [1]. I den andra delen kommer boken *Elementary Linear Algebra* [3] av Anton och Rorres behandlas på samma sätt. I texten kommer även förslag på övningsuppgifter tas fram som syftar till att överbygga glappet mellan de enkla procedurella övningsuppgifterna, och de mer avancerade som kräver en välutvecklad matematisk resonemangsförmåga, och framför allt till att öka studentens förståelse för metoderna som hon får lära sig att använda genom böckerna.

Centrala begrepp: Resonemangsförmåga, imitativt resonemang, kreativt resonemang, verifikation, argumentation, verifierande algoritmsikt resonemang, lösningsmanual.

1 Inledning

Genom hela vår skolgång, ända från grundskola upp till universitet har matematikundervisningen sett ut på i princip samma sätt. Detta beror troligtvis på att läroböckerna har haft i princip samma struktur. De presenterar kortfattat ett nytt begrepp eller nytt sätt att räkna, och sedan följer en rad exempel då olika metoder används för att lösa olika problem. Efter det används metoderna för att lösa övningsuppgifter av samma typ. Uppgifterna löstes genom att härma exemplen och efter en snabb kontroll i facit för att kontrollera att svaret stämde gick man utan reflektion hastigt vidare till nästa uppgift.

På senare tid har den matematikdidaktiska forskningen pekat på att det kan finnas problem med detta sätt att lära ut matematik. Johan Lithner menar att studenterna bara lär sig härma metoder istället för att förstå dem, och anser att övningsuppgifterna istället måste bemötas på ett kreativt och nyskapande sätt, där eleverna inte har fått metoderna serverade utan måste upptäcka dem själva [4].

I denna uppsats utgår vi dock ifrån att det finns en mellanväg att ta. För att en student själv ska kunna utforska och upptäcka sina egna lösningsmetoder krävs stort engagemang och matematiskt kunnande från hennes sida. De allra flesta som någon gång har stött på ett matematiskt problem till vilket ingen lösning är tydlig kan nog känna igen sig i frustrationen som uppstår i samband med detta. Att försvåra matematiken för mycket kommer nog tyvärr få som följd att fler och fler bestämmer sig för att det inte ens är värt att försöka lära sig. De som med goda avsikter var menat som en utmaning blir istället ett hinder för lärande.

För att motverka detta menar vi att det visst är möjligt att fortsätta att arbeta med givna metoder, och exempel som visar hur de används, så länge som stort fokus också hamnar på varför metoderna fungerar.

2 Tidigare forskning

Allt sedan den nya läroplanen för gymnasiet, Lgy 11, togs i bruk, har ett större fokus inom matematikundervisning i gymnasieskolan lagts på att elever ska utveckla ett antal olika förmågor genom matematikundervisningen. En av dessa förmågor handlar om att kunna resonera med och kring matematik [9]. Detta nya tankesätt, att eleverna behöver utveckla en förmåga att tänka och resonera matematiskt, snarare än att kunna utföra beräkningar verkar dock inte ha följt med upp på högskolenivå.

Bråting och Österman anser att förmågorna som nu bedöms och fokuseras på i gymnasieskolan inte egentligen berör själva räknandet, utan snarare fokuserar på att eleverna ska kunna tänka, och förklara sitt tänkande kring matematik [11].

I denna text används ordet student då vi talar om den som ställs inför problem och uppgifter och löser dem.

Lithner definierar resonemang som det tänkande som krävs för att komma med påståenden och nå slutsatser för att lösa uppgifter [6]. Lithner såväl som skolverket ser resonemang som en följd av processer som utifrån en uppgift leder fram till en lösning och sedan ett svar, som dock inte nödvändigtvis behöver vara korrekt, så länge det finns rimliga anledningar till svaret för studenten [10].

Lösningen av en uppgift sker enligt Lithner genom 4 steg [6]:

1. Problemlösning: Studenten ställs inför ett problem där lösningsmetoden varken är känd eller given.
2. Metodval och argumenterande förutsägelse: En lösningsmetod konstrueras och understödjes.
3. Utförande och verifikation: Metoden används och lösningen kontrolleras.
4. Slutsats: En lösning på problemet är funnen.

I denna text är det argumentation och verifikation som kommer stå i fokus. När en student står inför en av de första uppgifterna i kapitlet om antingen gränsvärden eller linjära transformationer kan oftast metoden väljas utifrån en lösning som betraktats tidigare i texten i något av exemplen. När däremot en av de sista uppgifterna i kapitlet ska lösas är det mycket troligt att man kommer få gissa sig till en metod. Uppgifterna som erbjuds kan alltså lösas antingen genom ett imitativt resonemang, eller så är de av så hög svårighetsgrad att inga resonemang alls kan formuleras. I denna text kommer uppgifter förslås där studenten får utveckla sin kreativitet trots att kända lösningsmetoder kan användas.

2.1 Kreativt resonemang

Ordet ”kreativitet” har olika betydelser inom vetenskapen. Det kan antingen betyda divergent tänkande som går bortom fixering eller tänkande bakom en storslagen produkt inom exempelvis konst [5]. För att ens resonerande ska betraktas som kreativt, ska det enligt Lithner uppfylla följande kriterier:

Nyskapande: En ny för studenten lösning skapas, eller så återskapas en glömd lösning. Att imitera ett gammalt svar är inte nyskapande. Kreativt resonerande används alltså när det inte redan finns en rutin för att lösa ett problem, utan studenten måste konstruera sin egen lösning.

Flexibelt: Resonerandet anpassar sig efter situationen och kan anta många skepnader. Resonerandet begränsas inte till fixeringar, varken till innehållsfixeringar eller algoritmfixeringar. Enligt Silver är det vanligt att studenter inte associerar kreativitet med matematik, något som kan ge konsekvenser inom utbildningen [5]. Antingen fixeras en algoritm som till början fungerar men slutar göra detta, eller så fixeras innehållet så att ett visst element bara anses vara användbart inom ett visst specifikt område. Detta är något som kan leda till att främst imitativt resonemang används av studenter.[5]

Rimlighet: Det finns argument som resonerandet grundar sig på som är rimliga i den givna situationen.

Matematisk grund: Argumentationen är grundad på matematiska egenskaper hos de olika komponenterna i situationen. Det finns ett par sätt som detta kan ske genom bevis. Det första handlar om pragmatiska bevis som betyder att nånting visas stämma genom att bevisa att det fungerar. Detta behöver dock inte nödvändigtvis bevisa en sanning. Konceptuella bevis etablerar en sanning genom att komma med anledningar till varför nåt är sant. Några vanliga anledningar till att studenter misslyckas med matematiska problem är att de grundar sina resonemang på ytlig matematisk grund.

Sammanfattningsvis kan vi säga att om ett resonemang är kreativt eller inte beror helt på nivån hos studenten. Det som är kreativt och nyskapande hos en student kan vara gammal rutin hos en annan, enligt både Lithner och Skolverket [10].

2.2 Imitativt resonemang

Lithner skiljer på ett antal olika typer när han talar om den imitativa resonemangsförmågan [5].

Memorerat resonemang. En lösningsmetod kopieras i sin helhet från en lösning man sett tidigare, och utförandet är i princip bara att man skriver av lösningen. Denna typ av resonemang kan oftast inte användas när uppgifter som kräver uträkningar ska lösas, men däremot används det när studenten exempelvis ska definiera ett begrepp eller bevisa något.

Algoritmiskt resonemang. En algoritm är ett antal regler som används i en specifik ordning för att lösa en viss typ av problem. Med algoritmiskt resonemang menas att en algoritm som studenten sedan tidigare känner till väljs för att lösa problemet. Studenten måste dock fortfarande kunna använda algoritmen på rätt sätt, och förstå i vilka situationer den är användbar. Att en student väljer att lösa en uppgift med hjälp av algoritmiskt resonemang behöver inte betyda att hon enbart använder reglerna, det kan definitivt finnas en bakomliggande förståelse. Det är dock svårt att se exakt vilken förståelse studenten har om lösningen är enbart algoritmisk.

Bekant memoriserat/algoritmiskt resonemang. Studenten känner igen uppgiften genom att koppla ihop den med andra uppgifter av liknande typ, som alla kan lösas på samma sätt. Valet av lösningsmetod baseras alltså inte på innebörden i frågan utan snarare på frågans utseende.

Begränsande resonemang. Uppgiften är inte tillräckligt bekant för att studenten direkt ska veta vilken algoritm som löser den. Studenten får istället välja en algoritm genom att utesluta de som verkar minst sannolika. Om algoritmen inte leder till ett trovärdigt svar lämnas den, och en annan testas.

Text-guidat resonemang. Lösningsmetoden väljs genom att studenten hittar likheter mellan uppgiften och exempelvis ett exempel eller en regel som finns med i en lärobok eller i någon annan textkälla. Lösningen eller definitionen skrivs sedan av direkt från texten. Lithner har visat på att det är denna typ av resonemang som dominerar bland studenter [5].

Person-guidat resonemang. Någon annan visar eller gör de svårare eller mer krävande stegen i lösningen, studenten behöver bara genomföra de simpla räkneoperaationerna.

Genom hela skolan, ändå från grundskola upp till universitet framställs den procedurella övningen av regler och typuppgifter som viktigare än tränandet av det kreativa tänkandet och resonerandet [5], men varför är det så? Lithner menar att det har blivit en ond cirkel inom undervisningen. Om studenterna har svårt att förstå de fundamentala begreppen läggs istället fokus på enklare aritmetiska räkneregler, och examinationerna anpassas sedan enligt detta.

2.3 Verifikation och argumentation

Lithner använder sig av begreppet ”validation”, som vi har valt att översätta till validering, och menar att detta är en social process. Genom validering kontrollerar studenten att svaret stämmer. Dock anser Lithner inte att det är en accepterbar validering att enbart jämföra sitt svar med bokens facit eller få svaret från läraren. Resonemanget ska istället ha en matematisk grund som ligger bakom [6].

Enligt Skolverket så är resonemangsförmågan avgörande när studenten verifierar sina påsåenden och strategier [10].

2.3.1 Ett alternativt synsätt

Vi kommer i den här uppsatsen utgå ifrån ett mellanting mellan kreativt och imitativt lärande. Om man utgår från ett algoritmsikt resonemang, men även får med rimlighetstänkandet från det kreativa resonemanget anser vi att man använder sig av en annan typ av resonemang som vi väljer att kalla argumentativt verifierande resonemang.

Ett nyckelord är ”varför”. En student som använder sig av en utantill-inlärd metod eller algortim, men som kan besvara frågor som ”varför fungerar den här metoden i det här sammanhanget?” och ”varför är svaret som metoden ger rimligt och korrekt?", har använt sig av något mycket djupare än bara ett memoriserat resonemang fritt från tankeverksamhet. Förmågan att kunna besvara dessa frågor då man löser en uppgift tyder på att en förståelse finns hos studenten. Lithner har visat på att om en student vet vad en sats säger eller hur en metod fungerar, men inte vet varför, så kommer studenten kanske inte att våga använda satsen eller metoden alls [4].

Vi menar att genom räkning och utantilllärning av många matematiska koncept uppstår insikt och förståelse; det finns inte genvägar till sann matematisk insikt. Precis som i språk där glosor måste nötas måste räkning, begrepp och procedurer nötas inom matematik. Inom språk behöver vissa kanske bara öva på ett ord två -tre gånger innan det sitter och andra behöver snarare 20 gångers repetition, men principen är densamma. Liksom språk är matematik ingenting som "den smarta" bara klarar av utan är något som alla kan göra, så länge man övar tillräckligt. Vi vill inte lägga några negativa värderingar i imitativt/algoritmiskt lärande utan menar att förståelse ofta uppstår som ett resultat av mycket räknande.

2.4 Syfte och frågeställning

Syftet med denna uppsats är att besvara följande frågor:

1. Vilken typ av resonemangsförmåga får man möjlighet att utveckla i de valda böckerna?

2. Vilka möjligheter finns i böckerna för en student att verifiera och argumentera för sina resonemang? Hur bör det utvecklas?

3 Gränsvärden i lärobok

Här undersöks hur gränsvärden presenteras i en lärobok för högskolan, genom att kapitel 1, gränsvärden, i Adams och Essex Calculus, analyseras.

Denna bok valdes ut för analys av två orsaker. Dels har den återkommit som kurslitteratur i många av de matematikkurser som jag själv har läst på universitetet, och jag har därför mött den fler gånger än någon annan kurslitteratur. Den andra orsaken är att den används som kurslitteratur till kursen envariabelsanalys, som är en obligatorisk kurs inom många naturvetenskapligt och teknologiskt inriktade program. Antalet studenter som har arbetat och lärt sig genom denna bok är stort, vilket gör det motiverat att analysera den.

3.1 Första delen, några exempel

Första delen består av tre exempel som löses med hjälp av gränsvärden. Det första exemplet handlar om en fallande sten. En ekvation presenteras med vilken stenens hastighet kan beräknas i varje utvalt tidsintervall [1]:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9t_2^2 - 4,9_1^2}{t_2 - t_1} \tag{1}$$

Ordet gränsvärde nämns inte i exemplet.

I nästa exempel efterfrågas istället stenens hastighet i en bestämd tidpunkt. En formel som liknar den första anges. I detta fall är vi dock inte intresserade av en formel som ger stenens hastighet i ett intervall mellan $t_1$och t_2. t_2 byts istället ut mot $t_1 + h$ och h får bli mindre och mindre. Det poängteras dock att vi inte får sätta h till 0, eftersom vi i formeln i så fall skulle få 0 i nämnaren. En tabell presenteras där $\Delta y/\Delta t$-värden anges för mindre och mindre värden på h [1]. Fortfarande nämns inte ordet gränsvärde, men en generell formel presenteras för att beräkna hastigheten vid varje tidpunkt. Efter exemplet talas det om att vi nu har hittat gränsvärdet för medelhastigheten, när h går mot 0.

I nästa exempel utvidgas kvadrattermen $(t_1 + h)^2$ så att vi efter en del räknande inte längre behöver dividera med h. Då kan h-termen "sättas till" 0 och vi får hastigheten då h går mot 0 [1].

Följande exempel visar en graf där en area hos en bakterieodling har plottats mot tiden då odlingen växer. Termerna sekant och tangent introduceras i samband med detta.

I sista exemplet ställs frågan hur man kan härleda areaformeln för en cirkel, med hjälp av dess omkretsformel. Det föreslås att en månghörning med n sidor ska skrivas in i cirkeln. När n växer kommer månghörningens omkrets och area att närma sig cirkelns. n-hörningar är uppbyggda av n st likbenta trianglar. Trigonometri används för att bestämma bas och area för varje triangel. Månghörningens omkrets och area är då n gånger så stor som dessa. Genom att sätta in uttrycket för omkretsen hos månghörningen i areaformeln, och låta n gå mot oändligheten, erhålles formeln för cirkelns area [1].

Första delen av gränsvärdeskapitlet ger ingen definition på gränsvärde, utan det utgås helt från exempel. Med dessa exempel får studenten möjlighet att se hur och i vilka sammanhang gränsvärden behöver användas. Att på detta vis börja med något väldigt konkret innan det teoretiska behandlas kan både väcka intresse hos studenten, konkretisera och framför allt öka studentens förståelse för i vilka sammanhang som metoden att undersöka ett gränsvärde kan användas. Studenten får lära sig se att problem som kan lösas med hjälp av gränsvärden inte behöver se ut på ett visst sätt, och att de kan handla om väldigt olika saker. Det är kanske inte helt lätt att säga om det här sättet att inleda ett kapitel omedelbart kommer stimulera kreativiteten, men det ökar i alla fall på studentens samling av algoritmer, och en student som använder sig av ett argumentativt verifierande resonemang, kan göra detta på ett mer välgrundat sätt.

3.2 Andra delen, funktioners gränsvärden

Nästa delkapitel inleds med två exempel där studenten ombeds undersöka funktioners beteenden i närheten av vissa x-värden. Ett ganska långt stycke förklarar varför man, när gränsvärden hanteras, inte kan förlita sig på datorer och miniräknare enbart. Det talas mycket om att det kan ske avrundningsfel och liknande som gör att uträkningen inte blir korrekt. Med en miniräknare kan man exempelvis aldrig komma oändligt nära ett visst x-värde för en funktion, eftersom den är begränsad till att bara kunna uttrycka tal av en viss storlek, eller med ett visst antal decimaler [1].

Att detta alls diskuteras i boken kan tyckas vara ett sidospår, men det fyller ändå en funktion. I ett exempel ställs nämligen frågan vad som händer med funktionen $g(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ då x går mot 0. Som lösningsförslag föreslås då att man helt enkelt kan göra en tabell med miniräknaren och låta x-värdena bli mindre och mindre, och på det viset till slut avläsa ett gränsvärde. När denna tabell görs kommer dock avrundningsfel ske då x blir "för litet" [1]. Eftersom en metod presenteras som kan, om den används oförsiktigt, ge ett felaktigt svar, är det bra att i följande stycke ägna lite tid åt att diskutera detta. På det här viset får studenten möjlighet att använda sig av metoden på ett säkrare sätt, och tankar väcks även till att det är viktigt att vara kritisk till metoderna som används.

Genom enbart exempel kan inte så mycket annat än ett imitativt algoritmsikt resonemang utvecklas. När studenten får möta exempel och se lösningsmetoder som sedan också utvärderas, kan mycket mer hända. Studenten får verktyg för att argumentera både för och emot valda lösningsmetoder, och hon blir uppmärksammad på vikten av att verifiera sina lösningar och fundera kring rimligheten i sina svar, något som tidigare nämnts tyder på ett kreativt sätt att resonera.

3.2.1 Första definitionen av gränsvärde

Efter dessa exempel följer bokens första definition av gränsvärden. Denna sägs dock var informell. Den lyder: " Om $f(x)$ existerar för alla x nära a, utom möjligen i själva a, och om vi kan vara säkra på att $f(x)$ är tillräckligt nära L

genom att välja x tillräckligt nära a, men inte lika med a säger vi att funktionen närmar sig gränsvärdet L då x går mot a " [1].

Trots att denna definition är informell känns den ändå väldigt abstrakt och kanske lite svårtolkad för någon som är ny till begreppet. Hur stor nytta en student egentligen kan ha av denna definition är svårt att säga. Den erbjuder ingen entydig metod eller sätt att tänka, och den talar inte om hur den ska tolkas i specifika situationer. Den blir svåranvänd eftersom den innehåller många laddade värdeord. Vad menas egentligen med "tillräckligt nära"? Det kan få väldigt olika betydelse beroende på situation. Detta är dock något som de uppmärksammar även i boken, och de hänvisar också till en mer precis och formell definition som följer i den sista delen av gränsvärdeskapitlet [1]. För kreativt resonemang krävs att alla antaganden kan grundas i matematik. En sådan svårtolkad definition blir svår att använda då studenten ska argumentera för sina lösningar, den erbjuder väldigt lite möjlighet till verifikation och argumentation.

Det kan ses som intressant att den formella definitionen dyker upp så sent i kapitlet, och att kapitlet börjar så praktiskt och blir mer och mer formellt. Både fördelar och nackdelar kan läsas in i detta, men den största fördelen ligger i att man på detta sätt, genom att visa hur gränsvärdesbegreppet kan användas innan man går in för mycket på vad det egentligen betyder, kan väcka ett intresse hos studenten, och kanske förmedla ett syfte med det kommande arbetet. Fokuset hamnar direkt på metoder och algoritmer, som kan fungera som verktyg för studenten. Detta tillåter studenten att omedelbart sätta igång och lösa uppgifter. Trots att definitionen i sig inte erbjuder möjligheter för studenten att argumentera och utveckla djupare förståelse, innebär inte det att studenten enbart får utveckla ett imitativt resonemang. Övning ger färdighet, och genom att tidigt komma in i själva räknandet, istället för att för länge fastna i svåra definitioner och satser, har studenten möjlighet att själv hitta vägar för verifikation och argumentation.

3.2.2 Hur beräknas gränsvärden?

Ett exempel följer där det visas att om vi vill bestämma gränsvärdet för en funktion $f(x)$ då x närmar sig a, och a finns med i funktionens definitionsmängd är gränsvärdet helt enkelt lika med funktionsvärdet för a, $f(a)$. Detta gäller dock endast om funktionens graf är "obruten" då den passerar genom punkten $(a, f(a))$, alltså att man kan följa grafen med en penna genom den punkten, utan att behöva lyfta pennan [1]. Det presenteras alltså en metod som kan användas, och det specificeras även i vilka situationer metoden kommer att fungera. Det inbjuds alltså till algoritmsikt resonemang.

I följande exempel efterfrågas gränsvärdet för ett rationellt uttryck då x närmar sig ett värde som inte finns med i definitionsmängden. Då går det inte att bara ta funktionsvärdet för det x-värdet för att få gränsvärdet. Det föreslås här tre olika metoder med vilka uttrycken kan förenklas. När nämnaren nu ser annorlunda ut är det möjligt att beräkna funktionsvärdet för det x-värde som vi vill närma oss, och detta funktionsvärde kommer vara lika med gränsvärdet [1]. Här handlar det alltså fortfarande om att använda samma metod för att bestämma gränsvärdet som i exemplet innan, men studenten uppmärksammas på att det kan vara nödvändigt att göra visa manipulationer med uttrycket innan metoden kan appliceras. Fortfarande är det dock i hög grad ett imitativt algoritmiskt resonemang som tränas.

3.2.3 Vänster- och högergränsvärden

Efter exemplen följer ännu en definition, denna gång av vänster- och högergränsvärden. Då vi undersöker ett vänstergränsvärde väljer vi helt enkelt att enbart närma oss ett visst x-värde från vänster. Då vi undersöker ett högergränsvärde närmar vi oss x-värdet från höger. Dessa två kan vara samma, men de kan även skilja sig åt. I boken tas som exempel funktionen $sgn(x) = \frac{x}{|x|}$ då x går mot 0 [1]. Vänstergränsvärdet blir i detta fall -1 och detta skriver vi

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x}{|x|} = -1 \tag{2}$$

Högergränsvärdet blir 1 och detta skrivs

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x}{|x|} = 1 \tag{3}$$

Den första satsen i kapitlet följer nu, och den säger att om höger- och vänstergränsvärdet för en funktion $f(x)$ då x närmar sig a är lika, så betyder det att ett gränsvärde existerar för funktionen då x går mot a. Om de inte är lika existerar inget gränsvärde [1]. Detta skrivs i boken som

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = L \tag{4}$$

Följande sats listar sedan sju stycken räkneregler för gränsvärden. Alla dessa uttrycks med symboler men två av dem förklaras också i ord. Studenten uppmanas uttrycka även de andra med egna ord. En sats följer sedan som definierar gränsvärden för polynom och rationella uttryck. Denna defintion kan härledas från räknereglerna, vilket studenten uppmärksammas på [1].

Sista satsen i kapitlet benämns ”instängningssatsen” och lyder: ”Antag att $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ för alla x i något öppet intervall som innehåller a, utom möjligtvis för $x = a$. Antag också att $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$. Då är även $\lim_{x \to a} g(x) = L$” [1]. Satsen kan förklaras med ord på följande sätt: Säg till exempel att vi har ett uttryck $k(x)$ för vilket vi vill ta reda på gränsvärdet då x går mot 0. Vi kanske inte känner till någon metod för att ta reda på detta gränsvärde. Om vi då kan hitta två andra funktioner som vi kan använda för att ”stänga in” $k(x)$, för vilka vi kan bestämma gränsvärdet då x går mot 0, och detta gränsvärde är samma för båda funktioner, så betyder det att även $k(x)$ har samma gränsvärde då x går mot 0.

3.3 Tredje delen, gränsvärden vid oändligheten och oändliga gränser

Det är faktiskt möjligt att bestämma ett gränsvärde för en funktion då x närmar sig ett godtyckligt stort (eller litet) värde. Detta får vi veta i början av det tredje delkapitlet. Det är även möjligt att gränsvärdet i sig blir godtyckligt stort eller litet då vi närmar oss ett visst x-värde. Ett gränsvärde kan ju dock inte vara "lika med" oändligheten, eftersom detta inte är ett värde, men att uttrycka att gränsvärdet är oändligt är ändå ett bra sätt att beskriva hur en funktion ser ut [1].

I boken visas nu grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \tag{5}$$

Ett antal funktionsvärden listas, för olika x-värden mellan -1000 och 1000. Från denna tabell kan det avläsas att ju mindre x blir desto närmare kommer funktionsvärdet till -1, det blir dock aldrig exakt -1. På samma sätt ser man att ju större x blir desto mer närmar sig funktionsvärdet 1. Linjerna $y = 1$ och $y = -1$ är markerade i grafen för att visa att kurvan närmar sig dessa två linjer, och är begränsad av dem. Man kallar då linjerna för horisontella asymptoter till kurvan. Det påpekas även att räknereglerna som listades i föregående delkapitel gäller på samma sätt även då man bestämmer ett gränsvärde för en funktion då x går mot positiva eller negativa oändligheten [1].

Ett exempel följer där gränsvärdena då x går mot $+\infty$ och $-\infty$ ska beräknas för funktionen i exemplet ovan (5). Funktionen skrivs om så att den innehåller signumfunktionen, som dök upp i förra delkapitlet. I många av exemplen i boken återkommer samma funktioner. Det är oftast en fördel för studenten att få arbeta med välkända funktioner, och att bli tvingad till att tänka tillbaka på det som gjorts tidigare, så att arbetet inte sker i lösryckta delar. Ett sammanhang bör ju alltid finns till allt och att göra på detta sätt kan kanske ge ett starkare intryck av att allt hänger ihop. Dock måste det också nämnas att det inte alltid är fördelaktigt att gå tillbaka till samma funktioner. Det kan bjuda in till användandet av ett bekant algoritmiskt resonemang.

3.3.1 Rationella uttryck

I detta delkapitel arbetas främst med rationella uttryck, inte med polynom. Orsaken till detta är att de enda polynom som har gränsvärden då x går mot oändligheten är de konstanta, dvs de som kan skrivas på formen $f(x) = c$ [1]. Hur dessa gränsvärden bestäms sägs det inget om, men det behövs inte heller, det kan nog anses vara trivialt.

Rationella uttryck kan ha gränsvärden då x går mot oändligheten [1]. I ett exempel visas en tydlig metod för hur man tar reda på dessa. Räknereglerna som används summeras i en liten ruta brevid exemplet. De säger att om två polynom $P_m(x) = a_m x^m + ... + a_0$ och $Q_n(x) = b_n x^n + ... + b_0$ är ett rationellt uttryck på formen $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ så är dess gränsvärde då x går mot positiva eller negativa oändligheten [1]:

- 0 om $m < n$
- $\frac{a_m}{b_n}$ om $m = n$

- existerar ej om $m > n$

Det är alltså polynomens grad som påverkar gränsvärdet. För att formulera med ord så lyder reglerna:

- Om polynomet i täljaren är av lägre grad än det i nämnaren, så är uttryckets gränsvärde då x går mot oändligheten lika med 0.
- Om polynomen i nämnaren och täljaren är av samma grad så är uttryckets gränsvärde då x går mot oändligheten lika med högstagradskoefficienten från täljaren dividerat med högstagradskoefficienten från nämnaren.
- Om polynomet i täljaren är av högre grad än det i nämnaren så existerar inget gränsvärde då x går mot oändligheten.

Här har studenten fått en gåva i form av tydliga metoder, och specifika situationer i vilka metoderna fungerar. Uppgiftslösandet förenklas mycket tack vare sådana regler, och metoderna kan verifieras lättare då studenten fått se när de gäller. Man kan fråga sig om författarna i boken erbjuder lite för mycket hjälp för att ett kreativit resonemang ska kunna utvecklas, tydliga regler bjuder ju onekligen in till användandet av algoritmsikt resonemang. Man kan dock också ställa sig på andra sidan och fråga sig: om all denna hjälpen inte hade erbjudits, varifrån skulle kunskapen då utvecklas? Det är möjligt att, om dessa tydliga metoder och regler inte hade presenterats i kapitlet, skulle vissa elever inte ens kunna lösa enkla gränsvärdesproblem. Tack vare reglerna kan studenterna från ett tidigt skede själva arbeta med uppgifter, och genom övning lära sig att argumentera och verifiera sig igenom sina lösningar, och på det sättet utveckla ett resonemang som kan anses vara kreativt i alla aspekter utom den nyskapande.

3.3.2 Oändliga gränser

Nu presenteras några fall där gränsvärdet går mot oändligheten. Att säga att ett gränsvärde är lika med ∞ är inte korrekt. Som tidigare nämnts är oändligheten inte ett värde som kan antas, men genom att säga att gränsvärdet är oändligt beskriver vi att funktionsvärdet blir godtyckligt stort eller litet. Som exempel visas grafen till funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Y-axeln är en vertikal asymptot till denna kurva [1]. Om en kurva har en (eller flera) horisontella asymptoter kan funktionen till kurvan ha ett gränsvärde då x går mot oändligheten. Om den däremot har en vertikal asymptot kan gränsvärdet för funktionen bli oändligt för ett visst x-värde. Här hittar vi alltså ännu en metod för att lösa problem av detta slag, nämligen att studera grafen. Det uttrycks dock inte lika tydligt som exempelvis räknereglerna, utan denna metod är mer för studenten att själv upptäcka.

I nästa exempel visas istället grafen till funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$. Även för denna kurva kommer y-axeln vara en vertikal asymptot, men då vi låter x gå mot 0 från vänster och från höger kommer vi inte få samma gränsvärde. Vänster- och högergränsvärdena är alltså inte lika. Då säger vi bara att gränsvärdet inte existerar [1].

Delen avslutas med några exempel till. I ett av dessa får vi se att ett polynoms gränsvärde, då x går mot oändligheten, enbart beror på högstagradstermen, eftersom denna kommer att öka mest i värde då x går mot oändligheten [1]. Denna typ av resonemang hänvisar alltså till studentens tidigare kunskaper, rörande aritmetik och potenser. Att knyta ihop kunskaperna på detta sätt, och att koppla till sådant som för studenten är självklart, gör att studenten kan använda sig av metoder som hon vet fungerar och varför de gör det. Hon får möjlighet att genom sin egen matematiska grund argumentera för och verifiera sina antaganden. Detta kräver dock att studenten som läser detta faktiskt stannar upp, tänker efter, och själv också inser varför det är som de uttrycker i exemplet, istället för att bara acceptera det som en sanning som kan användas vid behov. Nyckelordet är återigen ”varför?”. Hur pass mycket förståelse studenten utvecklar handlar egentligen helt om hur ofta hon stannar upp och funderar på denna fråga.

3.4 Fjärde delen, kontinuitet

När de allra flesta hör ordet funktion tänker de nog troligtvis på en kontinuerlig kurva. Funktioner kan även vara icke-kontinuerliga. För att visualisera detta tas exemplet upp med en bil som står parkerad på en avgiftslagd parkering. Parkeringskostnaden ökar med en viss summa varje timme. Om parkeringskostnaden skulle plottas mot tid skulle vi då få en kurva som är konstant vid samma kostnad under hela första timmen, och sedan gör ett plötsligt hopp vid nästa timme. Denna funktion är inte kontinuerlig [1].

3.4.1 Kontinuitet i en inre punkt

För att förklara när en funktion sägs vara kontinuerlig börjar man med att beskriva när en funktion är kontinuerlig i en punkt. En funktion har alltid en definitionsmängd, alltså en mängd av värden som x kan anta för vilken funktionen är definierad. Definitionsmängden till de flesta funktioner är oftast ett öppet eller ett slutet intervall. Är intervallet öppet så innehåller det enbart inre punkter, är det slutet innehåller det både inre punkter och ändpunkter. Definitionsmängden kan även vara en union av intervall. Som exempel tas här funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$. Denna funktion är inte definierad för $x = 0$, vilket betyder att definitionsmängden är unionen av de två öppna intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$ [1]. Med detta sagt är det nu möjligt att definiera kontinuitet i en inre punkt.

Bokens definition säger att en funktion är kontinuerlig vid den inre punkt c i dess definitionsmängd om

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \tag{6}$$

Detta innebär att det rent grafiskt går att kontrollera om en funktion är kontinuerlig. Om funktionen är kontinuerlig i en inre punkt betyder det att man kan följa dess graf med en penna genom den punkten utan att behöva lyfta pennan

[1]. Tre grafer visas nu som exempel, i vilka alla har samma punkt c utmärkt. Två av dessa är inte kontinuerliga i punkten c, men den tredje är det. Detta kan lätt bekräftas genom att låta en penna löpa genom punkten c i varje graf. Det kan också ses i graferna. De två som inte är kontinuerliga har ett hopp i grafen vid punkten c. Den som är kontinuerlig är slät genom punkten c.

3.4.2 Kontinuitet i en ändpunkt

Det följer nu ännu en definition, nämligen av höger- och vänsterkontinuitet. En funktion kan inte ha ett gränsvärde då x närmar sig någon av definitionsmängdens ändpunkter, men den kan ändå ha ett höger- eller vänstergränsvärde. I likhet med att det tidigare definierades höger- och vänstergränsvärden så kan vi alltså också definiera höger-, och vänsterkontinuitet. Denna definition säger att om höger- eller vänstergränsvärdet i en punkt är lika med funktionsvärdet, så är funktionen är höger- eller vänsterkontinuerlig i den punkten [1].

En sats följer som presenterar en liknande slutsats som för gränsvärden. För att en funktion ska sägas vara kontinuerlig i en inre punkt, måste den vara både höger- och vänsterkontinuerlig i den punkten [1].

Som tidigare nämnts kan en funktions definitionsmängd bestå av både inre punkter och ändpunkter. Därför följer nu en definition även av kontinuitet i en ändpunkt. Den säger att en funktion sägs vara kontinuerlig i sin vänstra ändpunkt om den är högerkontinuerlig i den punkten. Funktionen sägs vara kontinuerlig i sin högra ändpunkt om den är vänsterkontinuerlig i den punkten [1]. I och med detta har vi nu all information som krävs för att avgöra kontinuitet i varje punkt i en funktions definitionsmängd.

3.4.3 Kontinuitet på ett intervall

Nu följer det som presenteras som den viktigare definitionen av kontinuitet, nämligen kontinuitet på ett intervall. Definitionen säger att en funktion är kontinuerlig på ett intervall I om den är kontinuerlig i varje punkt i I. Detta innebär att en funktion är kontinuerlig om den är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd [1].

Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ tas som exempel. Den är kontinuerlig i varje punkt av sin definitionsmängd $[0, \infty)$, och är alltså en kontinuerlig funktion. I nästa exempel visas istället funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$. Försöker man följa grafen till funktionen med en penna inser man att pennan kommer behöva flyttas då $x = 0$. Man är kanske då benägen att tycka att funktionen inte är kontinuerlig. Studeras definitionen noga inser man dock att en funktion bara behövde vara kontinuerlig i varje punkt i dess definitionsmängd för att den ska sägas vara kontinuerlig. Eftersom punkten $x = 0$ inte finns med i definitionsmängden, kan vi ändå säga att $g(x)$ är en kontinuerlig funktion. Detta tycks dock vara en definition som just Adams och Essex väljer att hålla sig till, för de påpekar att det finns andra författare som skulle säga att funktionen är icke-kontinuerlig vid $x = 0$ [1].

3.4.4 Kontinuerliga funktioner

En lista följer med funktioner som alltid är kontinuerliga där de är definierade, till exempel polynom och rationella uttryck. En sats talar om att två kontinuerliga funktioner, som kombinerats på något sätt, kommer att resultera i en ny funktion, som även den är kontinuerlig [1]. I ett exempel presenteras sex stycken till synes ganska olika funktioner som alla säges vara kontinuerliga, på grund av det som sägs i satsen, nämligen att de är kombinationer av kontinuerliga funktioner.

3.4.5 Utvidgning av funktioner

Ett rationellt uttryck är inte definierat för x-värden som ger nämnaren lika med 0, men det kan ändå existera ett gränsvärde för dessa x-värden. Om man då skapar en ny funktion, som är lika med gränsvärdet för det x-värdet i den tidigare odefinierade punkten, och lika med den första funktionen i övrigt har man fått en kontinuerlig utvidgning. Dessa kontinuerliga utvidgningar kan oftast tas fram genom förenkling av det rationella uttrycket [1].

Som exempel tas funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \tag{7}$$

Denna funktion är inte definierad för $x = 1$. Om funktionen däremot förenklas till

$$F(x) = \frac{x}{x + 1} \tag{8}$$

så är den nu definierad (och därav kontinuerlig) även då $x = 1$. Vi har alltså funnit den kontinuerliga utvidgningen till $f(x)$ [1].

Funktioner behöver inte alltid vara kontinuerliga i hela sin definitionsmängd. Om en funktion $f(x)$ inte är kontinuerlig i någon punkt $(a, f(a))$, men vi genom att omdefiniera funktionen kan göra den kontinuerlig, så säger vi att funktionen har en borttagbar diskontinuitet i a. I det föregående exemplet (7) hade alltså funktionen en borttagbar diskontinuitet i $x = 1$, och denna togs bort genom att funktionen utvidgades [1].

I detta stycke tycks fokuset ligga på begreppen. Inget matematiskt som presenteras är särskilt nytt, en student vet redan vid det här laget att ett rationellt uttryck kan förenklas. Genom att träna begrepp kan studenten sedan med större säkerhet föra argument som är grundade korrekt i matematik.

3.4.6 Egenskaper hos kontinuerliga funktioner

Nu när begreppet kontinuitet noggrant har definierats listas några egenskaper som följer av att en funktion är kontinuerlig. Nu får studenten veta syftet med alla dessa begrepp som har definierats, de görs konkreta genom att de får komma till användning.

Den första egenskapen som nämns kallas max-min satsen. Den säger att en funktion som är kontinuerlig på ett slutet och ändligt intervall måste anta ett största och ett minsta värde på intervallet. Författarna poängterar att detta är viktig information, eftersom många matematiska problem ofta kan lösas genom att det största eller det minsta värdet hos en funktion hittas. Ett exempel följer som demonsterar detta [1].

I exemplet efterfrågas största möjliga arean av en rektangel med omkretsen $200m$. Detta löses med hjälp av kvadratkomplettering, en metod som troligtvis antas vara känd för studenten sedan tidigare. Här får studenten ett väldigt tydligt varför, en orsak med arbetet, ett syfte med att lära sig. Dock används inte satsen alls i exemplet, vilket en student kanske skulle reagera på och finna underligt. Men satsen talar ju faktiskt inte om för oss hur största och minsta värdet hos en funktion kan hittas, den talar bara om när sådana värden existerar.

Nästa sats som presenteras är satsen om mellanliggande värden. Den säger: ”Om $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och s är ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$, existerar det ett tal c i $[a, b]$ så att $f(c) = s$” [1]. Satsen säger alltså att alla värden mellan funktionens största och minsta värde kommer att antas [1]. Ett exempel följer som visar vad detta kan användas till.

I exemplet undersöks när funktionen $f(x) = x^3 - 4x$ är positiv respektive negativ. En metod presenteras för hur detta problem kan lösas, och det framgår tydligt hur metoden följer av satsen. Här blir studenten tilldelad en sats, och får direkt se en tillämpning och ett syfte med satsen. Att på detta vis presentera matematiken och dess användning tillsammans kommer att göra det lättare för en student som sedan löser egna problem att komma ihåg och förstå vilken information som kan vara till nytta.

Ännu ett exempel följer som visar att satsen är användbar även för att bevisa att en ekvation har en rot i ett visst intervall. En metod presenteras för att ta reda på roten till en ekvation, genom att dela in intervallet i vilket vi hoppas hitta roten i mindre och mindre delar [1]. Metoden presenteras på ett lite rörigt sätt som inte är helt lätt att följa, och förklaringar får inte så mycket fokus. Detta försvaras med att metoden är långsam, och betydligt effektivare metoder kommer presenteras i senare kapitel. Det poängteras även att man kan använda en grafräknare för att hitta en rot.

3.4.7 Varför existenssatser?

Kapitlet avslutas med några kanske rent didaktiska rader. Det uppmärksammas att de två satserna som just har presenterats är så kallade existenssatser, det vill säga de ger inga metoder för att räkna ut eller bestämma något, utan de talar bara om när något existerar. Hur kan man försvara för studenter att det faktiskt är meningsfullt att lära sig sådana satser om de inte direkt erbjuder lösningar på problem? Där poängteras det faktum att man kan kontrollera om ett problem faktiskt är lösbart innan man sätter igång och försöker lösa det, vilket kan bespara en student både tid och möda.

Här uppmanas alltså studenten att resonera och tänka. En student som läser detta kommer kanske ihåg nästa gång hon jobbar med ett problem som tycks vara omöjligt, att svaret inte nödvändigtvis ligger i att testa en annan algoritm. Svaret kanske snarare ligger i att komma ihåg eller leta upp en existenssats och se hur problemet i fråga passar in i kriterierna för att en lösning alls ska existera. Om det då visar sig att en lösning existerar får studenten sedan gå tillbaka till att leta efter en lämplig algoritm, men denna kanske blir lättare att hitta nu när problemet har studerats grundligare. En student som testar denna metod uppvisar en djupare försåelse för vad problemet egentligen handlar om än någon som bara testar algoritmer på måfå. Här uppmanar alltså boken studenten att gå ifrån det enbart imitativa algoritmsika resonerandet. De två satserna kan användas för att argumentera och verifiera, och studenten kan med dessa utveckla ett resonemang som än en gång passar väl in på definitionen av det kreativa resonemanget, så när som på den nyskapande aspekten.

Det är viktigt att verkligen ta till vara dessa små stycken som inte bara definierar utan som även förklarar varför något ska läras. De har tyvärr en tendens att förbises i matematisk kurslitteratur, trots att de är så otroligt viktiga. Det bästa som kan göras för att väcka intresse hos en student, och utveckla förståelser bortom mekanisk utantill-inlärning, är att ge ett syfte till matematiken.

3.5 Formell definition av gränsvärden

Kapitlet inleds med en kommentar från författarna som talar om att det är valbart att läsa kapitlet. Detta indikerar att det är fullt möjligt och till och med att föredra att enbart använda den informella definitionen för gränsvärden, och räknereglerna som presenterades i samband med denna, för att arbeta vidare med kommande kapitel.

Det talas om att det vi egentligen menar när vi säger att en funktion $f(x)$ har gränsvärdet L då x går mot a, är att vi kan vara säkra på att skillnaden mellan funktionsvärdet och gränsvärdet, $|f(x) - L|$, alltid kan göras mindre än vilken tillåten gräns som helst, genom att välja x-värdet tillräckligt nära a [1]. Med dessa ord har nu den informella definitionen från andra delkapitlet blivit aningen tydligare. Om man betraktar gränsvärde utifrån detta finns inte längre samma utrymme för olika tolkningar.

Den formella definitionen följer, och den lyder: ” Vi säger att $f(x)$ går mot gränsvärdet L då x går mot a, och vi skriver

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{9}$$

om följande villkor är uppfyllt: för varje tal $\epsilon > 0$ så finns ett tal $\delta > 0$, som möjligen beror på ϵ, så att om $0 < |x-a| < \delta$, så tillhör x definitionsmängden till f och $|f(x)-L| < \epsilon$” [1]. Här är det intressant att man väljer att använda ordet ”möjligen” i den formella definitionen. Orsaken till att den tidigare definitionen sades vara informell var att den innehöll ord som kunde tolkas olika i olika situationer. Denna definition sades då vara lite svåranvänd. En definition som innehåller ordet ”möjligen” måste ju då vara ännu mer svåranvänd. De talar inte ens om när det gäller och när det inte gäller, och vad det beror på. Läser man texten ovanför definitionen är det dock uttryckt annorlunda. Där står det att δ ska bero på ϵ, inte att det möjligen kan göra det. Det kan alltså helt enkelt vara så att det är ett skrivfel i boken, men det kan onekligen skapa förvirring för studenten. Att definitionen är uttryckt på detta sätt kan leda till att studenten kanske inte kan ha så stor användning för den då hon ska argumentera och verifiera. Om hon inte vet exakt vad definitionen säger kan hon inte heller med säkerhet grunda ett argument på den.

3.5.1 Bevisa gränsvärden

Efter definitionen följer ett exempel som visar hur definitionen kan användas för att bevisa två av de gränsvärden som vi fick givna i det andra delkapitlet, nämligen

$$\lim_{x \to a} x = a \tag{10}$$

och

$$\lim_{x \to a} k = k \tag{11}$$

Med hjälp av enbart den informella definitionen var det inte möjligt att bevisa dessa två gränsvärden, utan de presenterades snarare för studenten som två räkneregler, något som bara fick accepteras som sant [1]. Här finns det alltså en poäng med att läsa kapitlet med den formella definitionen också, trots att den sägs vara valbar. Den formella definitionen erbjuder en möjlighet till verifikation som inte ges från enbart den informella definitionen, och studentens resonemang kan utvecklas från det rent algoritmsika till att få ett kreativt inslag. Studenten kan med hjälp av den formella definitionen få en starkare matematisk grund att stå på.

I boken nämns dock att det är lite överkurs att bevisa att varje enskilt gränsvärde stämmer med hjälp av den formella definitionen, istället uppmanas det till att använda den för att bevisa räknereglerna som presenteras i andra delkapitlet. En tydlig metod presenteras som visar hur man kan bevisa regeln för en summas gränsvärde. Studenten kan sedan utnyttja samma metod för att bevisa de övriga räknereglerna.

Vid första anblicken kan det kanske se ut som att studenten här får träna ett kreativt resonemang då räkenreglerna ska bevisas, men metoden för hur det kan gå till är tydligt beskriven, och studenten kan följa instruktionerna utan vidare egen eftertanke. Hur pass mycket kreativitet som ligger i studentens resonerande avgörs igen av om hon förstår varför beviset ser ut som det gör, eller om hon bara följer instruktioner.

3.5.2 Definitioner av andra gränsvärden

Boken arbetar sig nu igenom de andra gränsvärden som vi stött på i tidigare kapitel, i samma ordning som de dykt upp, och definierar dessa.

Först definieras högergränsvärden på följande sätt: ”Vi säger att $f(x)$ har högergränsvärdet L vid a, och vi skriver

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \tag{12}$$

om följande villkor är uppfyllt: för varje tal $\epsilon > 0$ så finns ett tal $\delta > 0$, som möjligen beror på ϵ, så att om $a < x < a + \delta$ så tillhör x definitionsmängden till f och $|f(x) - L| < \epsilon$" [1]. Studenten uppmanas själv formulera definitionen för vänstergränsvärde. Definitionen används sedan för att i ett exempel bevisa att $\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$.

Sedan definieras gränsvärde då x går mot oändligheten på följande sätt: "Vi säger att $f(x)$ går mot gränsvärdet L då x går mot oändligheten, och vi skriver

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \tag{13}$$

om följande villkor är uppfyllt: för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett tal R, som möjligen beror på ϵ, så att om $x > R$, så tillhör x definitionsmängden till f och $|f(x) - L| < \epsilon$" [1]. Likadant som tidigare uppmanas nu studenten uttrycka definitionen för gränsvärde då x går mot negativa oändligheten, och definitionen används i ett exempel.

Den allra sista definitionen för kapitlet gäller oändliga gränsvärden. Den lyder: " Vi säger att $f(x)$ går mot oändligheten då x går mot a och vi skriver

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \tag{14}$$

om vi för varje positivt tal B kan hitta ett positivt tal δ, som möjligen beror på B, så att om $0 < |x - a| < \delta$, så tillhör x definitionsmängden till f och $f(x) > B$" [1]. Även här uppmanas studenten formulera en definition för när gränsvärdet blir negativa oändligheten, och definitionen används i ett exempel.

De tre sista definitionerna skyndas fort igenom, och studenten får bara se ett ganska kort exempel efter varje definition. Det är tydligt att detta inte är något som författarna anser är viktigt för studenten att få med sig i det framtida arbetet. Att använda sig av räknereglerna istället för de formella definitionerna tycks vara något som föredras, trots att de formella definitionerna medför fler möjligheter för studenten att grunda sina argument i matematik.

3.6 Analys av övningsuppgifter

Efter varje delkapitel i boken följer ett antal övningsuppgifter. Svar till de udda uppgifterna finns längst bak i boken, och svar och mycket kortfattade lösningsförslag till de jämna uppgifterna finns i en separat lösningsmanual. Denna lösningsmanual säljes separat och det förutsätts i många universitetskurser att man inte ska behöva den. Den är därför svår att få tag på och säljs inte alltid på samma bokhandlar som säljer boken.

Här kommer övningsuppgifterna som hör till kapitel 1.2, "Funktioners gränsvärden", att studeras. Till kapitlet hör 79 stycken uppgifter av varierande längd och svårighetsgrad.

De två första uppgifterna löses grafiskt. Två olika grafer visas, för vilka gränsvärden för några olika x-värden efterfrågas. Ingen formel anges för funktionerna, och inget exempel har presenterat en uppgift av denna typ. För att förstå att gränsvärdet kan avläsas genom att bara studera grafen får studenten istället använda sig av den informella definitionen som presenterades i 2.2.1, och även av den första satsen, ekvation (4) som presenterades i 2.2.3. I uppgift 3-6 efterfrågas höger-och vänstergränsvärden vid olika x-värden i en av graferna som visades. Återigen måste studenten själv förstå att dessa kan avläsas enbart genom att studera grafen. Dessa uppgifter har en kreativ karaktär, eftersom det inte finns någon tydligt presenterad lösningsmetod. Studenterna måste vara säkra i sina argument och kunna verifiera sig själva genom matematik snarare än genom kontroll i facit eller lösningsmanual, då lösningsförslagen som erbjuds i lösningsmanualen är mycket korta och inte innehåller förklaringar alls angående varför slutsatser dras.

3.6.1 Uppgifter som liknar exempel

Ett av de vanligaste, och kanske det mest användbara, sätten som används när matematikuppgifter som tränar nytt material ska lösas är att studenten får se ett exempel, för att sedan lösa uppgifter som är formulerade på samma sätt och som kan lösas med samma typ av metod. Denna typ av uppgiftslösning är nödvändig för att studenten ska kunna få en känsla för metoden, och utveckla en förståelse för hur den fungerar. I kapitlet visas 11 olika exempel. I uppgift 7-36 ska studenten beräkna gränsvärden för olika funktioner då x går mot en konstant, eller förklara varför dessa gränsvärden inte existerar. I uppgifterna ges en funktion eller ett rationellt uttryck som studenten uppmanas ange ett gränsvärde för då x närmar sig ett visst värde.

I till exempel uppgift 18 ska studenten beräkna $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$. För att göra detta kan studenten använda samma metod som presenteras i exempel 4c, nämligen förenkla uttrycket genom att multiplicera både nämnare och täljare med konjugatet till täljaren. Då fås uttrycket $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$. I detta uttryck kan nu h-termen få gå mot 0, och gränsvärdet blir $\frac{1}{4}$. I lösningsförslaget till denna uppgfit visas de olika stegen i förenklingen, men inga kommentarer görs angående vad som har hänt mellan varje steg. En liten kommentar i marginalen i stil med ”multiplicera med täljarens konjugat” hade varit till stor hjälp.

30 av kapitlets uppgifter är av denna typ. I dessa uppgifter handlar det främst om algebra, och förenkling av uttryck, som studenten sedan tidigare antas behärska. Dessa förenklingar är dock inte helt triviala, och utförligare förklaringar, antingen i kapitlet eller i lösningsmanualen, vore på sin plats.

Till exempel uppgift 16 är till synes mycket lika den föregående, och en student skulle kunna luras till att tro att de kan lösas på samma sätt, men det är inte möjligt. I denna uppgift ska studenten beräkna $\lim_{h\to 0} \frac{3h+4h^2}{h^2-h^3}$. Detta uttryck kan förenklas till $\lim_{h\to 0} \frac{3+4h}{h-h^2}$. Detta uttryck har inget gränsvärde då h går mot 0, eftersom nämnaren går mot 0 men täljaren går mot 3. Detta presenteras relativt tydligt i lösningsmanualen. Inget direkt exempel förekommer i boken som studenten kan utnyttja, men i texten nämns att funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ inte har något gränsvärde då x går mot 0, och att detta kan ses genom att studera funktionens graf.

Efter dessa mycket procedurella uppgifter som är av en ganska imitativ typ följer sex stycken uppgifter med lite annan formulering. Följande gränsvärde presenteras:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{15}$$

I de följande 6 uppgifterna ska studenten beräkna detta gränsvärde för 6 olika funktioner. Något exempel för hur studenten här kan gå tillväga förekommer egentligen inte i kapitlet. Metoden som används är ju än en gång den att förenkla uttrycket, så att nämnaren inte blir lika med 0, så studenten kan använda sig av samma exempel (3 och 4), som löste föregående uppgifter. Dessa är dock inte riktigt lika formulerade, så för att inse att samma metod fungerar krävs en del förståelse och eftertanke från studenten. Studenten kan även ta hjälp av exempel 3 från föregående kapitel.

I uppgift 49-60 ska studenten bestämma ett antal höger-och vänstergränsvärden för olika funktioner då x går mot olika konstanta värden, eller förklara varför dessa inte existerar. Metoden från kapitlets exempel 7 och 8 kan användas för att lösa uppgifterna, och exemplen erbjuder även en förklaring för varför gränsvärdet ibland inte existerar. Denna förklaring uttrycks dock inte i lösningsmanualen, där nöjer man sig med att säga att gränsvärdet inte existerar.

I tre av uppgifterna kan studenten använda sig av räknereglerna som presenterades i kapitlets andra sats.

3.6.2 Uppgifter med given metod

I uppgift 43-46 uppmanas studenten gå tillbaka till ett tidigare kapitel och studera graferna för funktionerna $f(x) = \sin x$ och $g(x) = \cos x$. Med hjälp av dessa grafer uppmanas studenten bestämma två gränsvärden vardera för dessa två funktioner, när de närmar sig olika x-värden. Här blir studenten alltså uppmanad att använda en viss metod, även om det finns andra.

Det hade nog i det här fallet varit mer fördelaktigt att ställa en öppen fråga, som studenten för lösa på något av de sätt som hon känner till, och på det viset låta studenten reflektera över vilken metod som kan lösa problemet, och att det kan finnas flera. Detta eftersom att i lösningsmanualen har inte den föreslagna lösningsmetoden använts, vilket definitivt kan skapa förvirring för studenten. Självklart kan det vara nyttigt för studenten att bli tvingad till att använda en annan metod, som kanske inte är lika bekväm, men då är det nödvändigt att lösningsförslag finns där denna metod har tillämpats som studenten kan använda för att verifiera sin egen lösning.

Två av uppgifterna är markerade med en symbol som indikerar att miniräknare behövs för att lösa problemen. I dessa två uppgifter uppmanas studenten använda exakt samma metod som i kapitlets exempel 2 för att undersöka gränsvärdet då x går mot 0 för två olika funktioner. I dessa uppgifter är det mer rimligt att en metod är föreslagen, och att studenten uppmanas öva på just den metoden. För en av dessa uppgifter finns nämligen ett lösningsförslag där samma metod har använts, så studenten kan lätt verifiera att hon har använt metoden på rätt sätt.

Fem av kapitlets uppgifter har fått en egen rubrik. Denna talar om att dessa uppgifter ska lösas med hjälp av grafräknare eller annat grafritande program. Till två av dessa finns graferna uppritade även i lösningsmanualen, och studenten kan på det viset verifiera att hon använt metoden på rätt sätt.

De sista uppgifterna i kapitlet har också en egen rubrik. Det talas om att dessa uppgifter ska lösas med hjälp av instängningssatsen. För att lösa dessa uppgifter krävs en hel del kreativitet från studenten. Två exempel förekommer visserligen som visar användningen av instängningssatsen, men dessa är mycket kortfattade, och inte alls lika svåra som övningsuppgifterna. Kapitlets sista två uppgifter är till och med markerade med en symbol som indikerar att de är mer krävande än övriga uppgifter.

3.6.3 Förslag till egen uppgift

Uppgifterna i boken är utformade på ett sådant sätt att studenten effektivt genom repetition får nöta in metoderna som presenterats i kapitlet. Det som definitivt lyser med sin frånvaro när man tittar på övningsuppgifterna är dock förklaringar av metoderna. Studenten behöver inte bara få nöta in metodernas olika steg, hon behöver även få förklaringar till varför metoderna ser ut som de gör, och metoderna bör bevisas eller förklaras med bas i den grundläggande matematiken som studenten redan känner till och behärskar. Så länge detta inte erbjuds kan inte studenten utveckla förståelse för metoderna, och hon har ingen möjlighet att verifiera sina resonemang matematiskt. Jag föreslår därför följande uppgift:

Följande funktion är given:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{om } x < 1 \\ x+1 & \text{om} x \geq 1 \end{cases} \tag{16}$$

1. Pelle beräknar $\lim_{x \to -2} f(x)$ och får svaret -4. Svaret är korrekt. Visa hur Pelles lösning kan ha sett ut och förklara med ord hur Pelle kan ha resonerat.

2. Stina har beräknat $\lim_{x \to 1} f(x)$ på följande sätt:

   ”I exempel 3a visas att man kan bestämma gränsvärdet då x närmar sig ett visst värde, genom att beräkna funktionsvärdet för det x-värdet. Om vi vill bestämma gränsvärdet då x närmar sig 1 kan vi därför beräkna $f(1)$.

   $f(1) = 1 + 1 = 2$ alltså är $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$”.

   Stinas lösning och svar är inte korrekta, förklara varför. Vilka felaktiga slutsatser har Stina dragit, och vilka villkor har hon missat?

3. Bestäm $\lim_{x \to 1} f(x)$. Motivera varje steg i lösningen.

Eftersom denna uppgift frågar efter tydliga motiveringar uttryckta i ord bör ett ganska tydligt lösningsförslag presenteras i samband med uppgiften. Här följer ett förslag på hur uppgiften kan lösas (flera lösningar kan självklart förekomma):

1. I exempel 3a i kapitlet får vi veta att om vi vill bestämma ett gränsvärdet för en funktion då x går mot a, och funktionen är definierad på ett öppet

intervall som innehåller $x = a$ så är gränsvärdet lika med funktionsvärdet för det x-värde, $f(a)$. Detta gäller dock enbart om grafen till funktionen går obruten genom punkten $(a, f(a))$.

I vårt fall, då vi vill bestämma $\lim_{x\to -2} f(x)$ kan vi inte använda den metoden, eftersom $f(x)$ inte är definierad då $x = -2$.

Vi kan istället använda metoden som presenteras i exempel 4a, nämligen att förenkla uttrycket för hitta ett nytt uttryck som är definierat för $x = -2$.

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$ kan förenklas. Vi skriver om täljaren med hjälp av konjugatregeln och låter gemensamma faktorer ta ut varandra:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} x - 2 \tag{17}$$

Nu kan vi använda metoden från exempel 3a. Vi beräknar funktionsvärdet då $x = -2$.

$$f(-2) = -2 - 2 = -4 \tag{18}$$

Detta medför att även $\lim_{x\to -2} f(x) = -4$.

2. Stina utgår ifrån att samma metod som i exempel 3a hade löst uppgiften. I exemplet bestäms gränsvärdet för $f(x)$ då x går mot a genom att funktionsvärdet,$f(a)$, beräknas och gränsvärdet är lika med funktionsvärdet. Stina missar dock villkoren som gäller för att denna metod ska fungera.

   I boken talas det efter exemplet om att denna metod endast fungerar om $f(x)$ är definierad på ett öppet intervall som innehåller $x = a$, och grafen till $f(x)$ går obruten genom punkten $(a, f(a))$.

   Grafen till vår funktion gör ett hopp då $x = 1$. Funktionen är inte heller definierad i något öppet intervall som innehåller $x = 1$. Funktionen uppfyller alltså inte något av de två villkoren som krävs för att Stinas metod ska fungera.

3. Vi undersöker vänster- och högergränsvärdet för funktionen.

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{1^2-4}{1+2} = \frac{-3}{3} = -1 \tag{19}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} x + 1 = 1 + 1 = 2 \tag{20}$$

   Nu använder vi bokens sats 1 som säger:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = L \tag{21}$$

Eftersom $\lim_{x \to 1-} f(x) \neq \lim_{x \to 1+} f(x)$ så innebär det att $\lim_{x \to 1} f(x)$ inte existerar.

Själva beräkningarna i den här uppgiften är relativt simpla. Detta är ett medvetet val. Det här är en uppgift som en student tidigt in i gränsvärdeskapitlet kan ställas inför och lösa. Genom att hålla beräkningarna simpla lyfts uppgiftens egentliga syfte fram ännu mer. Syftet med uppgiften är ju som tidigare nämnts inte att studenten ska räkna och komma fram till ett svar som är korrekt. Syftet är att studenten ska reflektera över och värdera olika lösningsmetoder, och fundera kring i vilka situationer som metoderna fungerar och i vilka de inte gör det, och varför.

3.7 Slutsats

Sammanfattningsvis kan sägas att det resonemang som främst kan utvecklas då gränsvärden studeras med hjälp av denna lärobok är ett imitativt algoritmiskt resonemang. Det kreativa resonemanget uteblir främst på grund av kravet att det ska vara nyskapande, vilket tycks vara svårt att uppnå. En del av övningsuppgifterna skulle kanske kunna tänkas träna ett kreativt resonemang, men på grund av deras höga svårighetsgrad i relation till de andra, och avsaknaden av tydliga och förklarande lösningsförslag, tror jag inte att de kommer ha önskad effekt. Det är mer troligt att dessa uppgifter kommer att avfärdas som överkurs och hoppas över, eftersom inte tillräcklig hjälp erbjuds.

Mycket av det som uttrycks i bokens definitioner och exempel kan hjälpa en student vid verifiering och argumentation. Trots att det kanske inte är möjligt att genom boken utveckla en kreativ resonemangsförmåga, kan det vara mycket möjligt att studier av kapitlet kan leda till att studenten lär sig resonera på ett argumentativt verifierande sätt. En del förbättringar kan dock göras, och dessa presenteras utförligare i del 5.

4 Linjär algebra och linjära avbildningar

Den här delen inleds med en beskrivning av vad linjära avbildningar är och dess historia. Exempel kommer behandla speglingar i plan och linjer, rotationer kring en axel eller en linje samt projektioner på plan och linjer. Materialet som ligger till grund för arbetet är Elementary Linear Algebra 11th edition av Howard och Rorres, här förkortad ELA.

Nyckelord: vektorrum, linjär avbildning, projektion, spegling, rotation, egenvärde, egenvektor, inverterbarhet

4.1 Kort historia om linjär algebra

Linjära ekvationssytem har behandlats i flera tusen år. I Kina användes en metod för att lösa linjära ekvationssystem som vi idag känner igen som Gausseliminering [7]. Arbetet med linjär algebra i modern tid byggde på Leibniz arbete med determinanter. Senare myntade Gauss ett sätt att arbeta med linjära ekvationssystem som är väldigt likt det arbetssätt som användes i Kina. Linjär algebra började undervisas i skolan under 1940-1950-tal [8].

4.2 Förkunskaper inom linjär algebra

Innan vi kan börja tala om linjära avbildningar krävs en hel del grundläggande förkunskaper inom just linjär algebra. Studenten måste utöver grundläggande matematiska kunskaper inom algebra, trigonometri och geometri, veta vad som menas med ett linjärt ekvationssystem, matriser och determinanter. Eftersom linjära avbildningar främst behandlar vektorers egenskaper följer en kort sammanfattning över de kunskaper som presenteras i boken ELA innan man kommer in på linjära avbildningar.

4.2.1 Egenskaper hos vektorer

Vektorer är geometriska och algebraiska objekt som består av en längd och en riktning som uttrycks i komponenter. De skrivs i denna text med fet stil och har ingen fixerad position i rummet, men komponenterna skrivs räknat med startpunkt i origo och betecknas $\mathbf{v} = v_1, v_2, ..., v_n$. Två vektorer är likvärdiga om de har samma komponenter.

Vektorer besitter följande egenskaper:

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

d) $\mathbf{u} + -\mathbf{u} = \mathbf{0}$

e) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

f) $(k+m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$

g) $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$

h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

i) $0\mathbf{v} = 0$

j) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

k) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

Där **u**, **v**, och **w** är vektorer och k och m är skalärer.

Om **w** är en vektor i R^n så är **w** en linjär kombination av vektorn $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ i R^n på formen $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + ... + k_n\mathbf{v}_n$

4.2.2 Vektorrum

Ett vektorrum V är en icke-tom mängd tillsammans med operationerna addition och multiplikation med skalärer. Dess objekt kan adderas med varandra och multipliceras med skalärer och har samma egenskaper som vektorer. De vektorrum oftast arbetas med inom linjär algebra är R^n och $R^{n\times m}$. Ett delrum U till ett vektorrum V är en delmängd där

a) $0 \subset U$

b) $\mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ (Sluten under addition)

c) $c \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in U \Rightarrow c\mathbf{v} \in U$ (Sluten under skalärmultiplikation)

4.2.3 Spann

Spannet till ett vektorrum är ett delrum som består av linjära kombinationer av en given uppsättning vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$

$span\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\} := \{c_1 v_1 + ... + c_n v_n \mid c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}\}$

4.2.4 Bas

En uppsättning vektorer $\mathbf{v}_1 ... \mathbf{v}_l$ i ett vektorrum V kallas en bas om de delvis spänner upp hela V samt är linjärt oberoende av varandra (det vill säga att ingen vektor kan skrivas som en linjär kombination av någon eller några av de andra vektorerna i uppsättningen). Standardbasen i R^n kallas $\underline{e}$ och skrivs som $\underline{e} = (e_1, e_2 ..., e_n)$, i kolonnform som

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ... e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2.5 Skalärprodukt och vinkel

Skalärprodukten mellan två vektorer $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i standardbasen $\underline{e} = (e_1, e_2 ..., e_n)$ definieras som

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + ... + v_n w_n$$

Allmänt ses en skalärprodukt som projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{w}$ multiplicerad med längden av $\mathbf{v}$ och skrivs

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}||||\mathbf{w}|| \cos \theta$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Vinkeln θ mellan två vektorer v och w kan således definieras till

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$$

eller till $\frac{\pi}{2}$ om $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$

4.2.6 Ortogonalitet och kryssprodukt

Två vektorer $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ kallas ortogonala, dvs rätvinkliga, om $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Kryssprodukten av två linjärt oberoende vektorer $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i R^3 är en ny vektor $\mathbf{u}$ som är ortogonal mot både $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Kryssprodukten är antikommutativ, dvs $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ samt distributiv över addition: $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ Kryssprodukten beräknas genom utveckling av determinanten för

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

med $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i standardbasen $\underline{e}$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

$=$

$$\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) = v_2 v_3 - v_3 w_2, -v_1 w_3 + v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1$$

Kombination av skalärprodukt och kryssprodukt kallas skalärtrippelprodukten och har de utmärkande egenskaperna att

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = 0 \tag{22}$$

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = 0 \tag{23}$$

4.2.7 Projektionssatsen

Givet två vektorer **u** och **a**, så kan u uttryckas som summan av två vektorer **w** + **v** där **v** är en skalärmultipel av **a** och **w** är ortogonal mot **a**. Det vill säga

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

$$\mathbf{v} = c\mathbf{a}, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$$

u:s ortogonala projektion på **a** skrivs då som $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ och definieras som

$$\mathbf{v} = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$$

u:s ortogonala komplement mot **a** definieras som

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$$

Allmänt så gäller formeln

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}|}{||\mathbf{a}||}$$

4.2.8 Linjär avbildning

För att förstå innebörden av begreppet ”linjär avbildning” måste både termen ”linjär” och ”avbildning” förstås. En avbildning kan jämställas med en funktion f som kartlägger en oberoende variabel x till en beroende variabel y. En funktion är alltså ett samband och kan uttryckas som $y = ax$. De variabler som först behandlas inom linjär algebra är vektorer. ”Med en avbildning (eller funktion) från R^n till R^m menas en regel som till varje vektor **x** i R^n tillordnar precis en vektor **y** i R^m. Vektorn **y** sägs därvid vara en ”bild” av **x**.” [2, s.140]. En avbildning är alltså ett samband.

Hur avgör man om en avbildning är linjär? Om alla funktioner i avbildningen ges av linjära ekvationer så är den linjär. Det vill säga om

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & \cdots & a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & \cdots & a_{mn}X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{24}$$

En linjär avbildning som betecknas $A = [f]$ kan beskrivas som $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ där **y** och **x** är vektorer och A är en matris med egenskaperna additiviet och homogenitet.

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \tag{25}$$

$$f(c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{v}) \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \tag{26}$$

En avbildnings standardmatris Standardmatrisen till en linjär avbildning A definieras generellt som

$$A = \left[T_A(\mathbf{e}_1) \quad | \quad T_A(\mathbf{e}_2) \quad | \quad \cdots \quad | \quad T_A(\mathbf{e}_n)\right]$$

där T_A är en avbildning i en kolonn med e_1 som första kolonnen i standardbasen.

4.3 Linjära avbildningar i lärobok

Här undersöks hur linjära avbildningar och egenvärden presenteras i en lärobok för högskolan genom analys av kapitel 4.9 och 5.1 i *Elementary Linear Algebra* av Anton och Rorres

4.3.1 Bokens upplägg

Boken är indelad i 10 kapitel där kapitel 1-9 går igenom grundläggande koncept inom linjär algebra. Kapitel 10 handlar helt om olika applikationer som linjär algebra används på. Förkunskaperna som krävs är samma som för andra nybörjarkurser på universitetet. Envariabelanalys är inte nödvändigt men det finns uppgifter anpassade för dem som har tagit den kursen. Författarna skriver att "Its aim is to present the fundamentals of linear algebra in the clearest possible way – sound pedagogy is the main consideration" [3, s. vii].

Innehållet i boken byggs upp genom successiva ökningar av likvärdiga påståenden som byggs upp när nya idéer presenteras. Detta är för att underlätta för studenten att se samband mellan de olika koncepten inom ämnet. I första kapitlet introduceras system av linjära ekvationer som går vidare in på matriser och grunderna för matrisräkning. Kapitel två behandlar determinanter, kapitel tre vektorer och kapitel fyra kommer in på vektorrum. I slutet av kapitel fyra inleds delen om linjära avbildningar vilket ligger i fokus i den här delen av uppsatsen.

Författarna medger att det finns svårigheter för många studenter att tillägna sig abstrakta koncept och förlitar sig därför på ”helping the student ”visualize” abstract ideas by drawing analogies to familiar geometric ideas”. [3, s. viii]

En ändring från tidigare upplagor av boken är att varje delkapitel avslutas med några sant eller falskt-påståenden och sedan kommer alla räkneuppgifter i slutet av hela kapitlet. Svar till udda uppgifter finns i slutet av boken. Mer utförliga lösningar på udda uppgifter finns i en separat bok *Student Solutions Guide*.

4.3.2 Kapitel 4.9 ”Matrix transformations from R^n to R^m”

Innan man kommer in på avbildningar har studenten nu fått lära sig räkneregler för matriser och vektorer, determinanter, vektorrum, baser, spann och basbyten och blivit introducerade till projektionsformeln samt ortogonalitet. Detta är väldigt procidurell kunskap och lärs ut genom imitativt samt algoritmiskt resonerande. Hur kryssprodukt beräknas till exempel räcker det med att memorisera en formel, och det är inte nädvändigt att förstå varför.

Kapitlet inleds med en definition av begreppet funktion och leds in på speciallfallet matristransformation. En matristransformation T_A ses som en multiplikation med en matris A där T_A avbildar $\mathbf{x}$ på $\mathbf{w}$.

I första exemplet går boken igenom en matristransformation från R^4 till R^3. Den är definierad av tre ekvationer med fyra variabler. Boken förklarar hur dess standardmatris ser ut och att bilden av en punkt i R^4 kan beräknas direkt genom matrismultiplikation. Boken räknar sedan igenom ett rent numeriskt exempel så att studenten i praktiken kan få en första inblick i matristransformation.

Efter följer sats 4.9.1 med linjära avbildningars additivitet (25) och homogenitet (26) tillsammans med

$$T_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{27}$$

$$T_A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u}) - T_A(\mathbf{v}) \tag{28}$$

En avbildning avbildar alltså en linjär kombination av vektorer i R^n till motsvarande linjär kombination till vektorer i R^m. Dvs som

$$T_A(k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + ... + k_r\mathbf{u}_r) = k_1T_A(\mathbf{u}_1) + k_2T_A(\mathbf{u}_2) + ... + k_rT_A(\mathbf{u}_r) \tag{29}$$

Än så länge kan uppställningen av beviset till avbildningar te sig väldigt abstrakt för den oerfarne studenten. Även om definitionen följer direkt efter ett exempel med enkel uträkning uttalas det inget explicit om exakt hur denna definition hör ihop med exemplet.

Sats 4.9.2 säger att om $T_A : R^n \to R^m$ och $T_B : R^n \to R^m$ är matristransformationer och om $T_A(\mathbf{x}) = T_B(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in R^n, \Rightarrow A = B$. Dock visar de inget exempel på vad detta innebär i praktiken, även om det kan verka tämligen simpelt att förstå.

Sedan följer vad boken kallar två exempel över noll-transformation och identietsoperator. Dock ska påpekas att även om det kallas exempel är det snarare definitioner på vad som menas med de koncepten då ingen egentlig räkning förekommer. "Definition" torde vara en bättre benämning.

Det som är huvudfokus för grundläggande problemlösning inom linjära avbildningar är att finna standardmatrisen för en matristransformation. Boken listar upp en procedur i två tydliga steg. Steg 1 är att hitta bilden för standardmatrisen $e_1, e_2, ..., e_n$ för R^n i kolonnform. Steg två är att konstruera matrisen så att bilden från steg 1 har successiva kolonner. Detta är nu standardmatrisen i formen

$$A = \left[T_A(\mathbf{e}_1) \quad | \quad T_A(\mathbf{e}_2) \quad | \quad \cdots \quad | \quad T_A(\mathbf{e}_n)\right] \tag{30}$$

Speglingar i R^2 och R^3 Speglingar presenteras i tabellform där standardmatriserna listas upp. De specifika speglingar som tas upp är just spegling kring y- och x-axeln samt lingen $y = x$ i R^2 samt spegling i $xy-, xz-$, och yz-planet i R^3.

Ortogonala projektioner i R^2 och R^3 Ortogonala projektioner listas upp i tabellform på samma sätt som speglingar. Först listas ortogonal projektion på x- och y- axeln i R^2 sedan på $xy-, xz-$, och yz-planet i R^3. Både speglingar och projektioner kan alltså läras in med hjälp av rent imitativa resonemang.

Rotationsoperatorer i R^2 och R^3 Rotationsoperatorer är något som de lägger större vikt på i boken. De inleder med att beskriva standardmatrisen på rotation kring en vinkel i R^2 där $T(\mathbf{e}_1) = T(1,0) = (\cos\theta, \sin\theta)$ och $T(\mathbf{e}_2) = T(0,1) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Här tar exempel 4 upp hur man finner bilden av $x = (1,1)$ under en rotation av $\pi/6$ radianer runt origo.

Boken förklarar en rotation i R^3 som en stråle som utmynnar från origo som kallas rotationsaxel. När vektorn roterar runt strålen bildas en del av en kon. En rotationsoperator är en matrisoperator som roterar varje vektor i R^3 kring en axel med vinkeln θ. Här anger de standardmatrisen till en motsols rotation med vinkel θ runt en axel i R^3 som bestäms av en enhetsvektor $\mathbf{u} = (a,b,c)$ med startpunkt i origo. Denna standardmatris förväntas studenten använda sig av senare i övningsuppgifterna.

$$\begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta) \\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix} \tag{31}$$

Skalning av vektorer Efter rotationer kommer boken in på förlängning och förkortning av vektorer. Dessa operatorer visas även här i tabellform.

Avslutande exempel Kapitlet avslutas med tre räkneexempel på vanliga matrisoperationer i R^2 som betecknas som "optional", frivilliga. I exempel 5 består lösningen av att rita matriserna och se geometriskt vilka förändringar som har angivits. Visualisering av operationer inom linjär algebra kan ofta vara knepigt, så uppgiften ämnar att lära ut koppling mellan geometri och algebra.

Boken går nu tillbaka till begreppen ortogonal projektion på koordinataxlar. De skriver att tabellen tidigare i kapitlet endast är ett specialfall av en generell operator för $T : R^2 \to T^2$. Nu anges standardmatrisen för projektioner på en linje L genom origo med vinkel θ med den positiva x-axeln, nämligen

$$P_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{32}$$

Exempel 6 går igenom en ortogonal projektion på en linje genom origo. Linjen här har en vinkel på $\pi/6$ med x-axeln. De använder sig av formel (32). Sista exemplet, exempel 7, går igenom spegling i linjer genom origo. De poängterar även här att tabellen som angavs tidigare bara är specialfall och att även här bör formel (32) användas och att svaret erhålls genom $H_\theta = 2P_\theta - I$, så att

$$H_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \tag{33}$$

4.3.3 Kapitel 5.1 ”Eigenvalues and Eigenvectors”

Kapitlet inleds med en definition på egenvärden och egenvektorer som lyder: Om A är en $n \times n$ matris, då kallas en nollskiljd vektor, $\mathbf{x}$ i R^n för en egenvektor till A om A$\mathbf{x}$ är en skalärmultipel till $\mathbf{x}$; nämligen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ för någon skalär λ. Skalären λ kallas för egenvärde till A och $\mathbf{x}$ kallas för egenvektor som hör till λ. Hur kan detta nu förstås? Egenvektorer behåller alltså sin riktning efter att en matristransformation har förekommit. Om egenvektorns egenvärde därtill är 1 har den inte heller ändrat längd. T.ex. är alla vektorer i en $n \times n$ matris egenvektorer då man multiplicerar dem med identitetsmatrisen då alla vektorer är likadana i både riktning och längd efteråt.

I exempel 1 tar boken upp att $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ med egenvärde $\lambda = 3$ då $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$. Med hjälp av en figur där en vektor blivit tre gånger längre har nu studenten fått möjlighet till både en geometrisk och algebraisk tolkning av vad en egenvektor är.

Beräkning av egenvektorer och egenvärden Boken går direkt in på en sats som ämnar att beräkna egenvärden. De går in på att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ kan skrivas om som $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} = (\lambda I - A)\mathbf{x}$ och att för att λ ska kunna vara ett egenvärde måste ekvationen ha en lösning som inte är lika med noll för $\mathbf{x}$. Detta gäller som bekant endast när dess determinant är 0. Dock talar inte boken om varför detta fungerar. De hänvisar visserligen till en tidigare sats men studenten får inte svar på hur detta leder till ett egenvärde. Detta är ett bra exempel på algoritmiskt resonemang i ren Lithner-bemärkelse. Det finns inget krav på att resonera sig fram till om svaret är rimligt än, utan det räcker med att kunna räkna fram ett svar. I exempel 2 och 3 går boken igenom hur egenvärden till en matris i 2×2- och 3×3-matriser erhålls med hjälp av det karakteristiska polynomet. De kommer också in på att det är mycket svårt att beräkna egenvärden till större matriser och att metoder för att finna dessa kommer i kapitel 9 senare i boken.

Exempel 4 behandlar en övertriangulär matris. Sats 5.1.2 säger att egenvärden till A finns längs diagonalen till över- och undertriangulära matriser. Detta går implicit ihop med beräkningen av determinanter, vilket boken dock inte påpekar utan det är upp till studenten själv att inse kopplingen. De infogar även en kommentar om att ifall vi hade vetat denna regel tidigare hade det varit lättare att ta reda på egenvärderna till exempel 2. I och med detta får studenten lära sig åtminstone två sätt att finna egenvärden på.

Med sats 5.1.3 sammanfattas likvärdiga påståenden om egenvärden. Om A är en $n \times n$-matris så stämmer följande

a) λ är ett egenvärde till A.

b) System av ekvationer $(\lambda I - A\mathbf{x}) = 0$ har icketriviala lösningar

c) Det finns en nollskiljd vektor $\mathbf{x}$ så att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

d) λ är en lösning till den karakteristiska ekvationen $\det(\lambda I - A) = 0$.

Med det sagt går boken vidare till att finna baser för vektorrum och med det finna egenvektorer. De säger detta på två sätt: delvis att eftersom egenvärden till en matris är nollskiljda vektorer som uppfyller ekvationen $(\lambda I - A\mathbf{x}) = 0$ så är dessa egenvektorer nollskiljda egenvektorer i nollrummet till matrisen $\lambda I - A$. Detta nollrum kallas för egenrummet till A. Det andra sättet förklarar de med att egenrummet till A motsvarande till egenvärdet λ är lösningsmängden till det homogena systemet $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$.

Sedan följer exempel 6 där de finner egenbas till samma matris som i exempel 1 och 2. Eftersom matrisen hade två egenvärden har den alltså två egenbaser. Enligt definiton är $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ egenvektor till om och endast om $\mathbf{x}$ är en icketrivial lösning till $(\lambda I - A\mathbf{x}) = 0$.

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De sätter in $\lambda = 3$ och får fram svaret $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

I exempel 7 går de igenom hur man finner egenvektor och bas för egenrum i en 3×3-matris med hjälp av samma metod. De fann två egenvärden och kan därför finna två egenvektorer. De ber studenten löpande verifiera sina beräkningar och kommer fram till att egenvektorerna är linjärt oberoende. De ställer visserligen frågan "varför?" efter detta konstaterande men besvarar den inte. Detta lämnas till studenten själv. En anledning till detta kan vara att eftersom det är mycket räknande i just denna del av boken bör studenten inleda med att räkna exempel och sedan få större insikter. Dock kan det anses vara svårt för en student att vid ett sådan tidigt skede kunna besvara frågan varför. Även om alla inte gör det är det ingen fara; huvudfokus är fortfarande räkningen.

Exempel 8 i kapitlet behandlar matriser av formen A^k. Sats 5.1.4 säger att om k är ett positivt heltal, λ är ett egenvärde till en matris A och $\mathbf{x}$ en motsvarande egenvektor, då är λ^k egenvärde till A^k och $\mathbf{x}$ är motsvarande egenvektor.

Sats 5.1.5 säger att en kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om $\lambda = 0$ inte är ett egenvärde till A. De följer med ett bevis och påpekar i exempel 9 att matrisen A i exempel 7 är inverterbar eftersom egenvärderna var 1 och 2. De ber studenten att verifiera att determinanten för denna inte är noll.

Kapitlet avslutas genom att de fyller på sin lista med likvärdiga påståenden som de har byggt upp genom bokens gång.

4.4 Analys av linjära avbildningar och egenvärden

4.4.1 Övningsuppgifterna till 4.9

Övningsuppgifterna till kapitel 4.9 kommer som tidigare nämnts i slutet på hela kapitel 4. De består av 34 uppgifter med stigande svårighet, numrerade 165 - 199. Svar till alla udda uppgifter finns i slutet av boken (dock står det ingenstans om var svar till de jämna uppgifterna finns). Jag kommer här överskådligt sammanfatta uppgifterna för att sedan särskilt fokusera på de uppgifter som ämnar öka förståelse för ortogonala projektioner.

De första sju uppgifterna ämnar att befästa innebörderna av orden värdemängd, definitionsmängd, bild samt matristransformation. Sedan följer ett antal uppgifter där kunskaper från exempel och tabeller från kapitlet används. Övningsuppgifterna avslutas med ett antal uppgifter där studenten ska beskriva standardmatrisers geometriska effekter (det vill säga ”gå åt andra hållet”).

Uppgifter liknande exempel i kapitlet

Med hjälp av exempel 1 i kapitlet får studenten hjälp med ett flertal uppgifter i början som behandlar simpel uträkning av en avbildning. Till exempel ber uppgift 174 a studenten att finna standardmatrisen för operatorn T deinierad av $T(x_1, X_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ för vilket svaret är $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Målet med uppgiften är alltså att endast lära in hur en linjär avbildning ställs upp i dess enklaste form.

I uppgift 176 och 177 ska sedan en vektor transformeras med hjälp av en given standardmatris, även här likt exempel 1 i kapitlet.

I uppgifterna 178 - 185 ska tabellen användas för att spegla, projicera och rotera vektorer.

Med hjälp av ekvation (24) ska studenten konstruera standarmatriser för olika sorters rotation.

Kreativt eller algoritmiskt resonerande?

Av de uppgifter som finns i kapitel 4.9 är majoriteten av den sort som kräver algoritmiskt resonerande. Mot slutet av kapitlet finns det dock uppgifter där studenten måste använda sig av resonerande av mer kreativ karaktär. Ett exempel är uppgift 193: ”Beskriv de geometriska effekterna av att multiplicera en vektor $\mathbf{x}$ med matrisen A, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$”. Än så länge har studenten bara råkat ut för den motsatta situationen: få en given geometrisk effekt och sedan räkna ut matrisen; nu är det tvärtom. Nu måste sann förståelse för sambandet mellan geometri och avbildningar användas för att lösa uppgiften. Eftersom svaret är en ortogonal projektion *samt* en förlängning tränas även studenten på att analysera kombinering av olika operationer, något som inte gås igenom explicit förrän i nästa kapitel.

4.4.2 Student solutions manual

Tillhörande textboken finns även en lösningsmanual till alla de udda uppgifterna. Lösningarna är mer utförliga än de som finns i slutet av boken, och förklarar vad som krävs för att lösa en uppgift, men inte särskilt tydligt *varför* man gör som man gör.

4.4.3 Olika sätt att förstå projektioner och speglingar

Boken ger studenten ett par verktyg med vilka ortogonala projektioner och speglingarkan förstås: antingen kan man använda sig av tabellen för de specialfall som angets, eller så kan man använda sig av en standardmatris när projektionen/spegligen avser en linje med en given vinkel. Denna standardmatris grundar sig på projektionsformeln för u:s ortogonala projektion på a (dvs $\mathbf{v} = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$).

Genom att ge studenten flera olika sätt att lösa samma uppgift på, t.ex. en ortogonal projektion, kan det förhindra att studenten endast mekaniskt lär in en algoritm och återkommer till samma hela tiden. De uppgifter i ELA som behandlar ortogonala projektioner är 180, 181 och 186. I 180 och 181 ber de studenten att använda matrismultiplikation för att finna den ortogonala projektionen på axlar eller plan. Det är inte explicit givet att standardmatrisen från tabellen tidigare i kapitlet ska användas, men det är implicit menat. I uppgift 186 ska studenten behandla bevis gällande ortogonal projektion på axlar i R^3. Hur kan nu en student gå vidare och applicera sina kunskaper om ortogonala projektioner för att involvera projektioner på annat än x-axel, y-axel, xy-, xz- och yz-plan? Sedan tidigare är ju projektionsformeln känd och i kapitel 4.9 introduceras en ny standardmatris (på sid 245) för projektioner. Varför ombeds inte studenten lösa uppgifter på detta sätt?

4.4.4 Förslag till nya uppgifter

Mina egna förslag till nya uppgifter är att betrakta samma problem ur flera olika synvinklar. Studenten måste använda sig av olika lösningsmetoder för att uppnå samma resultat och på så sätt, genom räkning, få fördjupad förståelse för hur avbildningar fungerar och att det inte bara är ett sätt som är det rätta. Det är tänkt att dessa uppgifter ska ha en utförlig lösningsguide i en lösningsmanual så att studenten kan få hjälp om denne fastnar i problemet. Studenten bes även att efter uppgiften resonera över sitt resultat och dra slutsatser.

Uppgift 1a Bestäm standardmatrisen för spegling i linjen $L = t(1,1)$ eller $x - y = 0$. Använd dig av 3-4 olika metoder:

(i) Använd matris H_θ (33)

(ii) utgå ifrån definitionen av en matristransformation, och transformera e_1 samt e_2

(iii) Projektionsformeln $I - 2Q$ där $Q = \frac{1}{n^T n} nn^T$

(iv) Kan du komma på en till metod? Ledning: utgå ifrån normalen till L samt en punkt på linjen; hur transformeras de? Kan du utgå ifrån svaret på en transformation och arbeta dig ”baklänges”?

Uppgift 1b Transformera i) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ samt ii) $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ med hjälp av standardmatrisen du fann i **1a**. Vilka slutsatser kan du dra utifrån dina resultat?

Lösningar **1a i**: För att kunna lösa uppgiften med denna metod måste vinkeln beräknas som L skapar med x-axeln. Med hjälp av definitionen av vinkeln mellan två vektorer beräknas

$$\theta = \cos^{-1}\frac{(1,1)\cdot(1,0)}{||(1,1)|| \quad ||(1,0)||} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Insättning av $\frac{\pi}{4}$ i $H_\theta = \begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$ ger matrisen $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

1aii: Här ska vi bilda en matris enligt $\left[T_A(\mathbf{e}_1) \quad | \quad T_A(\mathbf{e}_2) \quad | \quad \cdots \quad | \quad T_A(\mathbf{e}_n)\right]$
En spegling av $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ i diagonalen ger $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ och en spegling av $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ i diagonalen ger $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ som tillsammans bildar matrisen $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

1aiii: Linjens normal är (1, -1), insättning i $Q = \frac{1}{n^T n}nn^T$ ger $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$.
$2Q = \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$. $I - 2Q = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$.

1a iv: Här ombeds studenten att själv hitta på ett sätt att bestämma standardmatrisen A. De har fått en ledning i uppgiften som frågar hur normalen samt punkter på linjen transformeras samt att de ska utgå ifrån svaret på en transformation och arbeta ”baklänges”.

En normal till en linje speglas genom att (1, -1) blir (-1, 1) och en punkt på linjen speglas inte alls. Vi utgår därför ifrån linjens normal (1, -1) samt punkten (2, 2) (som ju ligger på linjen). Skulle man alltså transformera dessa två punkter som beskrivs med matrisen $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}$ med hjälp av en hittills okänd standardmatris A erhålls svaret $C = \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$. Alltså $AB = C$. Nu måste studenten använda sig av kunskaper från tidigare i boken om matrisekvationer.

$$AB = C = ABB^{-1} = CB^{-1} = A = CB^{-1}$$

Determinanten till en matris $S = \begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix} = ad - bc$.

Inversen till en matris $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{det(S)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

$\det(B) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot -1 = 2 \cdot 2 = 4$

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \square$$

1b: i)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ii)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Slutsatsen blir att en spegling i diagonalen byter plats på koordinaterna i vektorn i kolonnform, precis vilket erhölls i uppgift **1a ii**.

Uppgift 2a Bestäm standardmatrisen för ortogonal projektion på linjen $L = t(1,1)$ eller $x - y = 0$. Använd dig av 3-4 olika metoder:

(i) Använd matris P_θ (32)

(ii) utgå ifrån definitionen av en matristransformation, och transformera e_1 samt e_2

(iii) Projektionsformeln $I - Q$ där $Q = \frac{1}{n^T n} nn^T$

(iv) Kan du använda dig av samma metod som i lösningsmanualen för uppgift **1a iv**)? Varför/varför inte?

Uppgift 1b Transformera i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ samt ii) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ med hjälp av standardmatrisen du fann i **1a**. Vilka slutsatser kan du dra utifrån dina resultat?

Lösningar **2a i:** Likt uppgift **1a i** ska vinkeln mellan L och x-axeln beräknas. Den är tidigare beräknad till $\frac{\pi}{4}$.

Insättning av $\frac{\pi}{4}$ i $P_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & sin^2\theta \end{bmatrix}$ ger matrisen $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2a ii: Vi projicerar $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ var för sig på $\mathbf{a} = (1,1)$ enligt projektionssatsen.

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{e}_1 = \frac{(1,0)\cdot(1,1)}{||(1,1)||^2}(1,1) = \frac{1}{2}(1,1)$$

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{e}_2 = \frac{(0,1)\cdot(1,1)}{||(1,1)||^2}(1,1) = \frac{1}{2}(1,1)$$

som tillsammans i kolonnform ger matrisen $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

2a iii: Linjens normal är (1, -1), insättning i $Q = \frac{1}{n^T n} nn^T$ ger $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.
$I - Q = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

2a iv: Här får studenten komma fram till att metoden inte fungerar för projektioner då en projektions standardmatris inte har en invers. Då en spegling har en rak motsatt punkt för varje respektiv punkt går det att skapa en inverterbar $n \times n$-matris. Detta är inte möjligt med en projektion.

2b: i)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$$

ii)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$$

Slutsats: Om två motsatta punkter projiceras på en linje genom diagonalen blir resultatet samma punkt.

4.4.5 Övningsuppgifterna till 5.1

Övningsuppgiftern till delkapitlet är främst av räknemässig karaktär. Kapitlet har 29 övningsuppgifter där majoriteten av uppgifterna går ut på att finna egenvärden eller egenvektorer med hjälp av det räknesätt som presenterats i kapitlet. Även de uppgifter mot slutet som går ut på att bevisa olika satser begränsas till algoritmisk resonemang. Ett exempel är uppgift 23 som lyder "Bevisa att om A är en kvadratisk matris så har A och A^T samma karakteristiska polynom." De kunskaper som används är att komma ihåg hur A^T ser ut och hur man beräknar det karakteristiska polynomet som lärdes ut i kapitlet. Ett stort hinder för inlärning här är att det inte finns något svar i facit i boken *eller* i lösningsmanualen.

4.4.6 Egenvärden och linjära avbildningar

I kursen linjär algebra och geometri I på Uppsala universitet behandlas linjära aviblldningar främst genom att finna en standardmatris utefter att avbildningens typ är given i uppgiften. Under Linjär algebra II däremot handlar det om snarare att en standardmatris är given och att därefter avgöra vilken sorts avbildning det handlar om, samt att bevisa att avbildningen är linjär. Där används egenvektorer och egenvärden som ett hjälpmedel medan på Linjär algebra I är inte egenvärden nödvändiga för att lösa uppgifter involverande linjära avbildningar utan de hålls förhållandevis separata. Egenvärden kan alltså hjälpa till med den djupare förståelsen för avbildningar och vice versa men är inte direkt nödvändig för en initiell insikt i hur linjära avbildningar fungerar. Däremot är det motsatta nödvändigt; studenten behöver ha grundläggande förståelse för avbildningar för att förstå innebörden av egenvärden. Dock ska det nämnas att det går att ta reda på en matris egenvärden utan att förstå vad det faktiskt innebär genom att använda sig av algoritmiskt resonerande då framtagandet av en matris egenvärde är en minst sagt procedurell företeelse.

4.5 Slutsats

Då bland annat speglingar och projektioner i linjer och plan är en sådan grundläggande del inom linjär algebra är det främst rent procidurella räknefärdigheter som lärs ut tidigt i läroboken med hjälp av imitativt algoritmiska resonemang. Dock kan djupare förståelse uppnås där studenten får lära sig använda verifierande algoritmiskt resonemang på uppgifter. Dessa uppgifter ska ha ett tydligt syfte och möjliggöra för kontroll av det som beräknas med hjälp av tydliga instruktioner över begrepp och nya räknekoncept samt en lösningsmanual med tydliga motiveringar *varför* något händer. En utförligare lista över förbättringar presenteras i kapitel 5.

5 Gemensam analys

I denna del behandlas de slutsatser som framkommit efter gemensam diskussion av både gränsvärden och linjära avbildningar i läroböcker. Vi fokuserar främst på den andra frågan som presenterades i 2.4: Vilka möjligheter finns i böckerna för en student att verifiera och argumentera för sina resonemang? Hur bör det utvecklas?

5.1 Övningsuppgifternas disposition

I Adams *Calculus* tas ett nytt koncept upp i ett delkapitel som sällan sträcker sig längre än ett par tre sidor. Efter dessa sidor kommer ett gäng övningsuppgifter som studenten får träna sig på. Detta gör det enklare för studenten att veta vilken sorts uppgift det är och att lättare hitta algoritmer som hon ska använda.

Upplägget i den elfte upplagan av ELA däremot är precis tvärtom. Här kommer övningsuppgifterna efter ett helt kapitel, det vill säga efter ungefär 80 sidors läsande och genomgångar av nya matematiska koncept. Författarna kommenterar omstruktureringen genom "To simplify the instructor's task of creating assignments, exercise sets have been arranged in clearly defined categories" men nämner inget om varför de har valt att flytta alla uppgifter i slutet av kapitlet, eller varför detta skulle vara bättre för studenten. Det är oklart ifall tanken är att studenten ska bläddra fram och tillbaka eller om tanken är att uppgifterna ska lösas efter 80 sidor. Det andra alternativet skulle innebära att studenten måste gång på gång läsa igenom, repetera och förstå koncepten som tas upp.

Förslag till ändring Genom att i ELA flytta tillbaka övningsuppgifterna till slutet av varje delkapitel är det lättare för studenten att lösa uppgifterna. Uppgifternas disposition i Calculus känns bra och genomtänkt, ingen ändring är nödvändig.

5.2 Betydelsen av rätt begrepp

Att använda sig av de korrekta begreppen är en nyckelegenskap inom matematiken. Det är inte möjligt att resonera matematiskt på ett övertygande sätt om begreppen blandas ihop eller inte förstås. En student som kan använda en metod, och även beskriva den med rätt termer och begrepp har större möjligheter att utveckla en förståelse för både för metoden och begreppen. Det är nog inte så troligt att man kan använda ett begrepp som man inte förstår och ändå "råka" använda det rätt. Att en student använder sig av rätt begrepp tyder på en bakomliggande förståelse.

Utan en bakomliggande förståelse att "avbildning" är samma sak som "funktion", vilket är ett samband, är det mycket svårt att komma vidare. Ett vanligt misstag inom linjär algebra är att studenten har misstolkat t.ex. just ordet avbildning till att förstå det som endast matrismultiplikation för att projicera, spegla, rotera. Vad som inte förstås här är att det finns oändligt många sorters avbildningar, precis som att det finns oändligt många olika funktioner.

För att studenten med större säkerhet ska få möjlighet att föra argument med matematisk grund, föreslås en samling av delkapitlets viktiga nya begrepp, tydligt förklarade och definierade, i slutet av varje delkapitel. Denna skulle studenten kunna återgå till varje gång hon stöter på ett begrepp som hon inte helt behärskar.

5.3 Verifikation

5.3.1 Utförliga lösningar på några uppgifter

Om studenten tappar bort sig, inte har förstått ett grundläggande begrepp eller blir helt vilse av en uppgift i boken finns det väldigt lite stöd. Visserligen finns lösningsmanualer på antingen jämna [1] eller udda uppgifter [3] men de kräver en viss grundläggande förståelse av hur man löser uppgiften. Här föreslås att i en lösningsmanual ska svar på *alla* uppgifter finnas och att några uppgifter ska ha utförlig förklaring. Med utförlig förklaring menas att i ord presenteras en lösning steg för steg, nästan lika tydligt som i exempel i boken.

Den kommersiella och praktiska aspekten
Detta ska givetvis inte göras för alla uppgifter av flertal skäl. En anledning till att det som student är svårt att finna bra lösningsmanualer finns i den komersiella och praktiska aspekten. Vi kan inte anta att författarna till en bok skriver stora utförliga lösningsförslag till alla uppgifter; det tar för mycket tid, lösningarna skulle te sig oerhört långa och invecklade och det vore svårt att finna hjälp. Kvalitet framför kvantitet är det som förespråkas. Det är också viktigt för studenter att lösa uppgifter själva och bli tvungna att använda sin kreativitet. Det handlar alltså inte om att "curlastudenterna med lösningar, men inte heller att utelämna de helt, utan en balans mellan utmaningar och hinder är det som förespråkas. En annan anledning till att fullständiga lösningar inte finns till alla uppgifter är av den kommersiella anledningen: författare måste tjäna på att trycka och ge ut böcker. Till varje utgåva som släpps har några uppgifter ändrats i små drag - detta för att studenter och universitet blir tvugna att hela tiden köpa nya utgåvor då gamla facit inte längre gäller.

5.3.2 Tillit till utläraren

Något som kan hjälpa eller stjälpa en student är övningsuppgifternas facit. Vid verifikationsstadiet när uppgiften är löst måste studenten kunna lita på att uppgiften och svaret i facit faktiskt stämmer. Vid en situation där studenten gång på gång tvivlar på facitets autenticitet menar vi hindrar inlärningen då studenten inte kan verifiera sitt eget svar. Om det står fel i facit, även då en korrekt metod har använts och rätt svar har erhållts, skapar det starka tvivel hos studenten då det didaktiska kontraktet menar att utläraren besitter mer kunskap än inläraren och därför bör ha rätt svar. Frågan kvarstår: Är det jag eller boken som har fel?

Ett förslag till ändring av detta är utförligare facit. Om facit presenterar inte bara svaret utan även någon kommentar om vilken lösningsmetod som kan användas, är det lättare för studenten att upptäcka att svaret inte stämmer.

5.4 Sammanfattning

För att sammafatta menar vi att en del möjlighet till verifikation och argumentation erbjuds i böckerna, men det kan förbättras genom följande åtgärder:

- Övningsuppgifterna bör vara genomtänkt placerade i kapitlen
- Listor som definierar viktiga begrepp bör finnas efter varje delkapitel
- Utförliga lösningsförslag med förklaringar till varje steg bör finnas till en del av uppgifterna.
- Facit bör innehålla lite mer än enbart svar, för att fel i facit lättare ska kunna upptäckas.

5.5 Avslutande kommentar

Vi menar att det viktiga när man arbetar med matematik, vare det sig är inom analys eller linjär algebra eller något annat, inte är det nyskapande och flexibla resonerandet som ligger till grund för utveckling hos studenten, utan det verifierande elementet. Genom att studenten hela tiden verifierar sina lösningsmetoder med matematiska resonemang uppstår matematisk insikt. Hinder till utveckling här är bristfälliga förkunskaper, samt flera sociala processer som exempelvis felaktigt facit, motsägelser i boken, bristfälliga eller ickeexisterande lösningsmanualer etc. Problemet ligger inte i om studentens resonemang är enbart kreativt eller algoritmiskt, utan om verifierande matematiska resonemang förekommer.

För att erbjuda studenten att utveckla ett verifierande algoritmiskt resonemang föreslår vi övningsuppgifter där fokus inte ligger på ett korrekt svar, utan snarare på en granskning av olika lösningar. Det viktiga ska inte vara att svara rätt, utan att kunna resonera kring hur vi kan veta att vi har svarat rätt.

Referenser

[1] Robert A Adams and Christopher Essex. *Calculus*, volume 8. Pearson Canada Inc, 2013.

[2] Lennart Andersson. *Linjär algebra med geometri.* Studentlitteratur, 1999.

[3] Howard Anton and Chris Rorres. *Elementary Linear Algebra*, volume 11. Wiley & Sons, 2011.

[4] Johan Lithner. Mathematical reasoning in school tasks. *Educational studies in mathematics*, 41(2):165–190, 2000.

[5] Johan Lithner. *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning.* Citeseer, 2006.

[6] Johan Lithner. A research framework for creative and imitative reasoning. *Department of Mathematics, Umeå University*, 2007.

[7] J J O'Connor and E F Robertson. Liu hui biography. *Mactutor.*

[8] J J O'Connor and E F Robertson. Matrices and determinants. *Mactutor.*

[9] Skolverket. Ämnesplan - matematik, 2011.

[10] Skolverket. Resonemangsförmåga, 2013.

[11] Kajsa Bråting & Tove Österman. *Vad består goda matematikunskaper av? John Dewey och matematikundrvisningen i svenska skolor.* Uppsala University, 2015.