



UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2016:17

Skattningsmetoder för den generaliserade extremvärdesfördelningen

Kevin Cribäck

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare: Jesper Rydén
Examinator: Jörgen Östensson
Juni 2016

A large, faint watermark of the Uppsala University seal is visible in the bottom right corner of the page. The seal features a sun with rays, a cross, and the Latin motto 'ALERE FLAMMAM VERITATIS' around the perimeter.

Department of Mathematics
Uppsala University

Skattningsmetoder för den generaliserade extremvärdesfördelningen

Kevin Cribäck

7 juni 2016

Sammanfattning

I denna uppsats ges en grund för block-maxima analys. Den generaliserade extremvärdesfördelningen (GEV) presenteras samt olika skattningsmetoder för densamma. Vidare så undersöks skattningsmetodernas egenskaper för olika stickprovsstorlekar genom ett simuleringsstudium genomfört i R. Avslutningsvis ges en snabb inblick i kvantilskattning med ett exempel på nederbördsdata.

Erkänsla

Tack Jesper Rydén, för din tid, tålamod och ovärderliga anvisningar.

Innehåll

1	Introduktion	5
2	Extremvärdesanalys	6
2.1	GEV-fördelningen	6
3	Skattning av parametrar	8
3.1	Maximum-likelihood	8
3.2	Probability-weighted moments	9
3.3	Andra skattningsmetoder	10
4	Simuleringsstudium	12
4.1	Programvara	13
5	Skattning av kvantiler	15
5.1	Nederbördsdata	15
	Appendix	18
	Referenser	19

1 Introduktion

Statistisk extremvärdesanalys har många tillämpningar. Exempel på användningsområden är risk i försäkringssammanhang, mutationer som uppstår under evolutionen och extrema väderfenomen. Tillämpning sker genom att fokusera analysen på observationer som anses vara extrema. Med en sådan analys kan exempelvis prediktion om ett framtida extremvärdes utfall undersökas.

Det finns två huvudgrenar för extremvärdestillämpningar. Å ena sidan analyseras tillfällena och/eller frekvensen av observationerna, å andra sidan storleken på desamma. I det senare fallet är det vanligt att utföra en POT-analys eller block-maxima-analys.

POT-analysen (Peak Over Threshold) genomförs genom att analysera de observationer som ligger ovan en bestämd nivå. För teori, se Hill (1975), Pickands (1975), Dekkers et al. (1989). Här är valet för nivån kanske den största svårigheten, men metoder har utvecklats. Det visar sig att de observationer som överstiger nivån är approximativt GPD-fördelade (Generalized Pareto Distribution), för vidare läsning se Rychlik och Rydén (2006).

Block-maxima (BM) går ut på att dela upp datamaterialet i icke överskridande block (vanligtvis dag/månad/år) och sedan fokusera på den största observationen i varje block. Om de data som ska analyseras inte är exakt i.i.d. (independent and identically distributed), exempelvis vid säsongsvariation, är BM-metoden troligen att föredra, detta då ett beroende mellan observationer inom blocken inte blir lika markant. De maxima som markerats i varje block modelleras sedan med hjälp av GEV-fördelningen (Generalized Extreme Value). Fördelningens parametrar kan skattas på olika sätt där de två vanligaste är MLE och PWM. Hur dessa skattningar ser ut, samt dess statistiska egenskaper, undersöks närmare i detta arbete.

I avsnitt två ges en kort motivering till varför extremvärden blir GEV-fördelade och GEV-fördelningen definieras. Vidare så presenteras några skattningsmetoder för GEV-fördelningens parametrar i avsnitt tre. Detta följs upp med ett simuleringsstudium för MLE och PWM i avsnitt fyra. Arbetet avslutas med avsnitt fem där ett exempel på nederbördsdata presenteras och kvantilskattning utförs.

2 Extremvärdesanalys

Givet i.i.d. slumpvariabler $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ där ζ_i har fördelningsfunktion $F(x)$, så är inom extremvärdesteorin $M_n = \max(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ av intresse. Eftersom slumpvariablerna är i.i.d. är det enkelt att härleda fördelningsfunktionen för M_n :

$$P(M_n \leq x) = P(\zeta_1 \leq x, \zeta_2 \leq x, \dots, \zeta_n \leq x) = F^n(x)$$

När modellering av extremvärden utförs är det svansens utformning som är viktig och det är av nytta att kunna approximera M_n varvid en klassisk sats hjälper:

'The extremal types theorem', som först upptäcktes av Fisher och Tippett (1928), säger att om M_n har en icke-trivial fördelningsfunktion så måste M_n (normaliserad) tillhöra en av tre typer av fördelningsfunktioner. Det som bestämmer vilken av dessa familjer de tillhör karaktäriseras enbart av svansen av $F(x)$ för stora x . Därför är det tillräckligt att fokusera på M_n snarare än att utforska $F(x)$ i sin helhet. För vidare grundläggande introduktion, se Leadbetter et al. (1983).

Alltså: $P(a_n(M_n - b_n) \leq x) \rightarrow G(x)$ vid rimliga konstanter $a_n > 0, b_n$, där

$$\text{Typ I: } G(x) = \exp(-e^{-x}), -\infty < x < \infty$$

$$\text{Typ II: } G(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Typ III: } G(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & x \leq 0 \\ 1 & x > 0, \end{cases}$$

för något $\alpha > 0$.

2.1 GEV-fördelningen

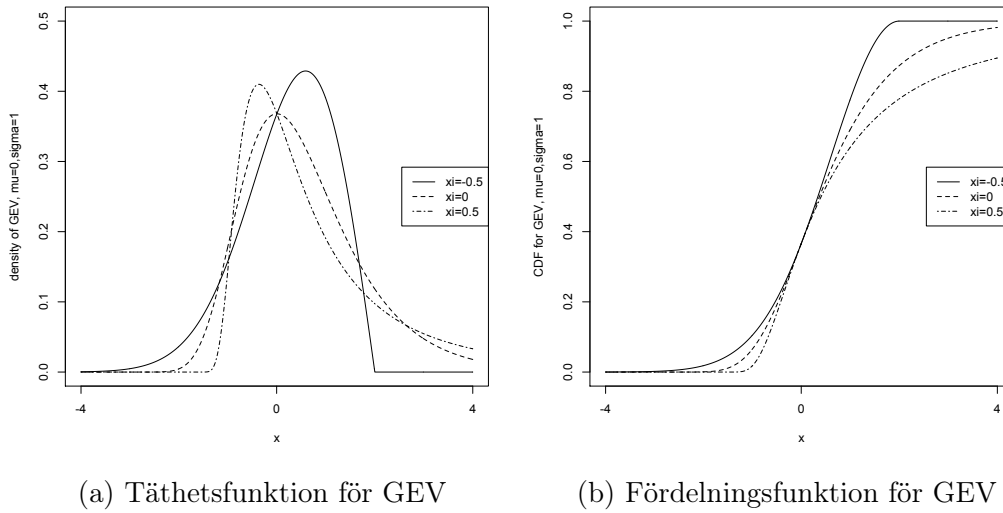
GEV (Generalized Extreme Value distribution) kombinerar dessa tre typer, Gumbel (typ I), Fréchet (typ II) och Weibull (typ III), i en och samma fördelningsfunktion. Att sammanfoga dessa tre i en fördelningsfunktion undviker att apriori behöva välja vilken fördelning som parametrarna ska skattas för. GEV är även kallad Fisher-Tippett fördelning.

GEV är definierat som följer för $x \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$:

$$F(x; \sigma, \xi, \mu) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}, \text{ där } 1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0, \xi \neq 0 \quad (1)$$

$$F(x; \sigma, \xi, \mu) = \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, \text{ då } \xi = 0, \quad (2)$$

där σ tolkas som en skalparameter (scale), ξ formparameter (shape) och μ som lägesparameter (location).



Figur 1: GEV-fördelning med varierande ξ .

Vid betraktelse av Figur 1b tydliggörs de karaktäristiska drag som en extremvärdesfördelning har. Vid olika värden på ξ erhålls olika svansbeteenden. Dessa möjliggör modellering med hjälp av block-maxima.

3 Skattning av parametrar

När en parameter θ skattas för en fördelningsfunktion är det givetvis önskvärt att estimatoren $\hat{\theta} \rightarrow \theta$ då stickprovsstorleken ökar. Denna egenskap försäkras då $\hat{\theta}$ är konsistent, se följande definitioner.

Definition. En sekvens av estimatorer $\{T_n\}$ sägs vara svagt konsistent för en parameter $\gamma = g(\theta)$ om $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - g(\theta)| > \epsilon) = 0$, för något $\epsilon > 0$ och $\forall \theta \in \Theta$, där Θ är parameterrummet som består av alla möjliga värden på θ .

Definition. En sekvens av estimatorer $\{T_n\}$ sägs vara asymptotisk normal om, för alla $\theta \in \Theta$: $\sqrt{n}(T_n - g(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, V)$ för något V som är positivt definit. Här betecknar \xrightarrow{D} konvergens i fördelning.

Alltså försäkras inte bara $\hat{\theta} \rightarrow \theta$ då en estimator är asymptotiskt normal, utan även att standardavvikelsen krymper i en takt av $\frac{1}{\sqrt{n}}$. För detaljer, se Liero och Zwanzig (2011).

Vårt fokus är att skatta parametrarna för GEV-fördelningen, det vill säga (σ, ξ, μ) . Givet i.i.d. data Y_1, \dots, Y_m där Y_i är ett maxima tillhörande stickprov $i : X_1, \dots, X_n$, har vi möjlighet att erhålla skattningarna $(\hat{\sigma}, \hat{\xi}, \hat{\mu})$ genom att använda exempelvis ML-metoden, se nedan.

3.1 Maximum-likelihood

En variant är Maximum-likelihood metoden (ML). Smith (1985) visade att ML-skattningar existerar då $\xi > -1$ och när $\xi > -\frac{1}{2}$ gäller asymptotisk normalitet.

Givet $\xi \neq 0$, samt $1 + \xi \frac{Y_i - \mu}{\sigma} > 0, i = 1, \dots, m$ erhålls log-likelihood funktionen för stickprovet Y_1, \dots, Y_m genom att logaritmera (1).

$$\log L(\sigma, \xi, \mu) = -m \log \sigma - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^m \log\left(1 + \xi \frac{Y_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi \frac{Y_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad (3)$$

Annars, om $\xi = 0$, erhålls:

$$\log L(\sigma, \xi, \mu) = -m \log \sigma - \sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{Y_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^m \frac{Y_i - \mu}{\sigma} \quad (4)$$

ML-skattningarna $(\hat{\sigma}, \hat{\xi}, \hat{\mu})$ erhålles genom maximering av (3), (4) med avseende på respektive parameter.

3.2 Probability-weighted moments

Ett alternativ till ML-metoden är att nyttja PWM-metoden (Probability-Weighted Moments) som definierats av Greenwood et al. (1979). Tillvägagångssättet med PWM är detsamma som för MOM (Method of Moments), det vill säga att passa ihop teoretiska moment med dess empiriska motsvarighet. Det som gör PWM till en god skattningsmetod för extremvärdesfördelningar är att den inkorporerar vikter som förstärker svansbeteendet.

Givet en slumpvariabel X med tillhörande fördelningsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$ är det av intresse att betrakta kvantiteterna:

$$M_{p,r,s} = E[X^p[F(X)]^r[1 - F(x)]^s] \quad \text{där } p, r, s \in \mathbb{R}.$$

Här identifieras $M_{p,0,0}$ ($p = 1, 2, \dots$) som de klassiska momenten för X . Betraktas antingen $M_{1,r,0}$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) eller $M_{1,0,s}$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) uppenbarar sig vikt-egenskaperna som karaktäriserar PWM. Greenwood et al. (1979) föredrar den senare medan Hosking et al. (1985) den tidigare. Följaktligen används i detta arbete $\beta_r = M_{1,r,0} = E[X[F(X)]^r]$.

Appliceras detta på GEV erhålls för $\xi \neq 0$:

$$\beta_r = (r + 1)^{-1}[\mu - \frac{\sigma}{\xi}[1 - (r + 1)^\xi \Gamma(1 - \xi)]] \quad \text{då } \xi < 1. \quad (5)$$

För $\xi \geq 1$ existerar inte β_r för något r . Enligt Hosking et al. (1985) är det i praktiken sällsynt att $-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}$ inte gäller.

För att erhålla skattningarna $(\hat{\sigma}, \hat{\xi}, \hat{\mu})$ löses ekvationssystemet (7)-(9) för (σ, ξ, μ) , i enlighet med Beirlant et al. (2004), genom att ersätta β_r med (6):

$$\hat{\beta}_r = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^r \frac{i-j}{m-j} \right) Y_i \quad (6)$$

Denna estimator, (6), föreslogs av Landwehr et al. (1979) och är en väntevärdesriktig estimator.

$$\beta_0 = \mu - \frac{\sigma}{\xi}(1 - \Gamma(1 - \xi)) \quad (7)$$

$$2\beta_1 - \beta_0 = \frac{\sigma}{\xi} \Gamma(1 - \xi)(2^\xi - 1) \quad (8)$$

$$\frac{3\beta_2 - \beta_0}{2\beta_1 - \beta_0} = \frac{3^\xi - 1}{2^\xi - 1} \quad (9)$$

Observera att (9) måste lösas numeriskt varvid vi erhåller $\hat{\xi}$. Därefter löses följande:

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{\xi}(2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0)}{\Gamma(1 - \hat{\xi})(2^{\hat{\xi}} - 1)}$$

$$\hat{\mu} = \hat{\beta}_0 + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}(1 - \Gamma(1 - \hat{\xi}))$$

Hosking et al. (1985) visade att för $\xi < \frac{1}{2}$ så närmar sig dessa skattningar normalfördelning asymptotiskt. Vidare påvisades att PWM-skattningar presterar bättre än MLE-skattningar för små stickprov vilket är skäl till att överväga dess användande.

3.3 Andra skattningsmetoder

Coles och Dixon (1999) framlade kritik gentemot PWM-metoden då de ansåg att användandet av PWM-estimatorer antar apriori att $\xi < 1$. Detta ansåg de löstes bättre genom att använda PML (Penalized Maximum Likelihood). De introducerade:

$$P(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \leq 0 \\ \exp(-\lambda(\frac{1}{1-\xi} - 1)^\alpha) & 0 < \xi < 1, \alpha \geq 0, \lambda \geq 0 \\ 0 & \xi \geq 1 \end{cases}$$

Där likelihoodfunktionen följaktligen blir:

$$L_{pen}(\sigma, \xi, \mu) = L(\sigma, \xi, \mu) \times P(\xi)$$

Detta medför att likelihooden "bestraffas" för "oönskade" värden på ξ och värdena förefaller mindre sannolika. Vid val av $\alpha = 1, \lambda = 1$ presterade PMLE bättre än PWM även vid små stickprov i en simulationsstudie av Coles och Dixon (1999).

Vidare så har Diebolt et al. (2008) arbetat fram en utveckling på PWM-metoden för GEV, detta som en reaktion på Coles och Dixon (1999). Denna är känd som GPWM (Generalized Probability Weighted Moments). GPWM breddar intervallet för formparametern ξ genom att använda en annan typ av moment. Applicerat på GEV erhålls momenten:

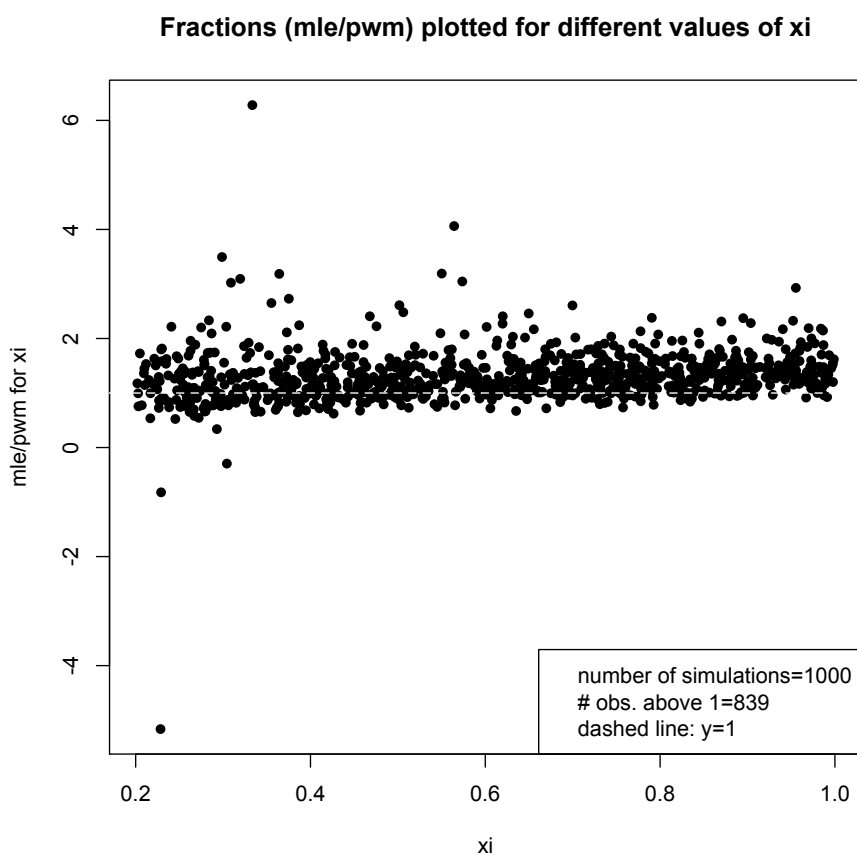
$$v_\omega = \frac{\sigma}{\xi} \frac{1}{(a+1)^{b-\xi+1}} \Gamma(b - \xi + 1) - \left(\frac{\sigma}{\xi} - \mu\right) \frac{1}{(a+1)^{b+1}} \Gamma(b+1), b \geq 0 \quad (10)$$

Vi ser att om $b = 0$ insätts i (10) så erhålls PWM-momentet (5). GPWM är således mer generell. En klar förbättring jämfört med PWM är att (10) existerar då $\xi < b+1$, till skillnad från momenten för PWM som existerar då $\xi < 1$. Detta betyder att de normal-asymptotiska egenskaperna förlängts från $\xi < \frac{1}{2}$ till $\xi < \frac{1}{2} + b$. För detaljer, se Diebolt et al. (2008).

En annan vanlig variant för skattning av GEV-parametrar är 'L-moments' (Linear Moments). Det bör nämnas att $M_{1,0,s}$ och $M_{1,r,0}$ kan uttryckas som linjärkombinationer av L-moment. Detta innebär att metoder baserade på PWM ger samma resultat som L-moment, se Hosking (1990).

4 Simuleringsstudium

Målet med denna simuleringsstudie är att visualisera hur maximum-likelihood-metoden presterar gentemot probability-weighted moments. Detta genom att först testa för olika värden på ξ och sedermera vid olika stickprovsstorlekar. Känt sedan tidigare är att MLE har svårt vid små stickprov och detta förväntas förtydligas. MLE och PWM är invarianta under linjära transformationer vilket implicerar att vi kan testa för olika ξ med fixerade σ, μ utan att det påverkar skattningarna för ξ .



Figur 2: Kvoten $\frac{\hat{\xi}_{mle}}{\hat{\xi}_{pwm}}$ för varierande ξ .

I figur 2 har slumpstal genererats från $U(0.2, 1)$. Dessa slumpstal tolkas som ξ när stickprov från GEV-fördelningen genereras ($\mu = 0, \sigma = 1$). 1000 simuleringar har

gjorts, där stickprovsstorleken har varit 50 i samtliga fall. Dessa stickprov har sedan skattats med både MLE och PWM varvid kvoten $\frac{\hat{\xi}_{mle}}{\hat{\xi}_{pwm}}$ beräknats. Ur figur 2 tycks MLE i de absolut flesta fall överskatta PWM, oavsett storlek på ξ .

I figur 3 har ξ skattats med MLE och PWM. Detta genom att fixera ($\mu = 0, \sigma = 1$) och låta ξ variera ($-0.3, 0, 0.3, 0.7$) varvid slumpstal från GEV-fördelningen producerats med olika stickprovsstorlekar $n = (10, 20, 50, 100)$. Dessa har sedermera skattats med de båda metoderna. 10000 simulationer är gjorda för varje fixerat ξ, n . I lådagrammen är utliggarna borttagna, detta då de inte är särskilt informativa vid simulationer med stort antal repetitioner.

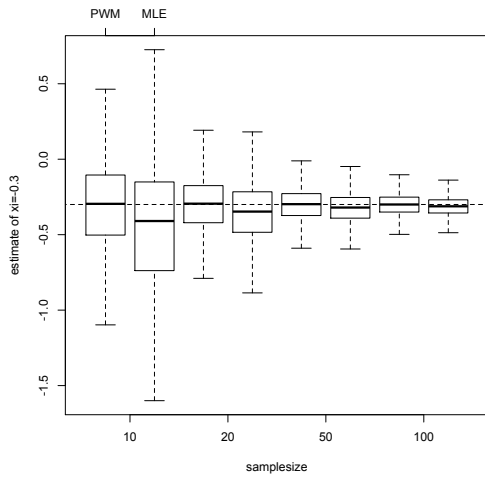
Det tydligaste resultatet i figur 3 är som förväntat att MLE är klart underlägsen PWM vid mycket små stickprov $n = 10$. Vid $n = 20$ verkar PWM prestera bättre än MLE för $\xi \in [-0.3, 0]$. För $\xi > 0$ verkar PWM underskatta, om än acceptabelt för $\xi = 0.3$, så tycks PWM skattningar för $\xi = 0.7$ vara markant i underkant. Detta förklaras av att $\hat{\xi}_{pwm}$ inte är asymptotisk normal för $\xi > \frac{1}{2}$. För stickprovsstorlekarna $n = 50, 100$ kan skattningsmetoderna utifrån detta studium inte tolkas som annat än jämnvärdiga, undantaget är $\xi = 0.7$.

Betraktas $n = 50$ i figur 3 för $\xi = -0.3$ verkar MLE ha underskattat något jämfört med PWM. För $\xi = 0$ verkar skattningarna likvärdiga. Betraktas $\xi = 0.3, 0.7$ märks att PWM underskattar ξ i jämförelse med MLE som får bedömas som träffsäker.

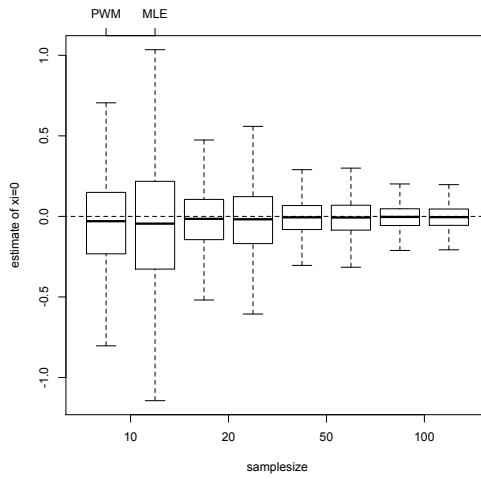
Detta studium talar för att vid små stickprov bör PWM alltid prefereras MLE, såvida inte ξ kan antas vara stort. Då infinner sig en avvägning mellan stor spridning fokuserad kring det sanna värdet (MLE), gentemot PWM som har mindre spridning men fokuserad under det sanna värdet. Då medelstora stickprov existerar och $\xi \in [-0.3, 0.3]$ föredras PWM. Studien talar i allmänhet för MLE vid stora stickprov samt för stora ξ .

4.1 Programvara

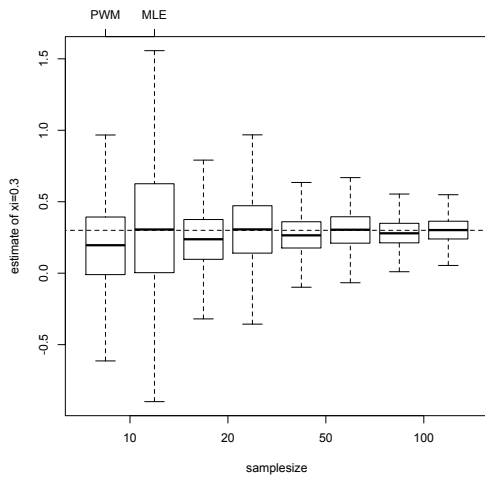
I ovanstående simuleringsstudium har programmet R använts med programpaketet fExtremes och evd. I fExtremes användes rutinen gevFit för anpassning med PWM-metoden och ur evd användes fgev för MLE-metoden.



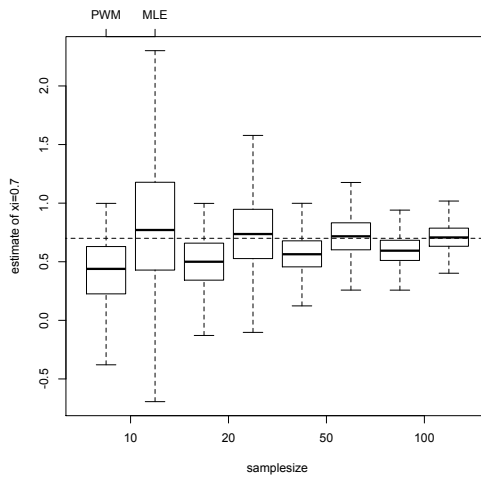
(a) $\xi = -0.3$



(b) $\xi = 0$



(c) $\xi = 0.3$



(d) $\xi = 0.7$

Figur 3: MLE respektive PWM-skattningar för varierande ξ .

5 Skattning av kvantiler

Ett av de vanligaste användningsområdena när GEV används är vid beräkning av så kallade T-års laster, det vill säga; vi har data som består av exempelvis årsmaxima under ett antal år. Utifrån detta önskas en skattning på den maximala lasten som skulle kunna uppstå under T-år. Laster kan tolkas som exempelvis temperatur, nederbörd, höjd på vågor. Rent konkret är vi intresserade av att lösa följande för l , där $\{Y_t\}$ är t-årsmaxima, i enlighet med Rychlik och Rydén (2006):

$$\frac{1}{T} = P(\{Y_t\} > l) = 1 - P(\{Y_t\} \leq l) \quad (11)$$

Givet att $\{Y_t\}$ kan anses vara i.i.d. säger Fisher-Tippetts sats att $\{Y_t\}$ är approximativt GEV fördelad och ur (11) erhålls:

$$l = \begin{cases} \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left(\frac{1}{(-\ln(1-\frac{1}{T}))^\xi} - 1 \right), & \xi \neq 0 \\ \mu - \sigma \ln(-\ln(1-\frac{1}{T})), & \xi = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Om intresset istället är att beräkna sannolikheten att ett maxima över T år överstiger x bör följande betraktas, där Y_i är årsmaxima:

$$P(M_T > x) = 1 - P(Y_i \leq x)^T = \begin{cases} 1 - \exp \left\{ -T \left[1 + \xi \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp \left\{ -T \cdot \exp \left[- \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Genom att ersätta (σ, ξ, μ) med $(\hat{\sigma}, \hat{\xi}, \hat{\mu})$ erhålls skattningar för l och $P(M_T > x)$.

Ovanstående kan vara av intresse för exempelvis dimensionering av vallar för översvämningar (de Haan (1990)), brunnar med mera, respektive risker att katastrofer eller extrema naturfenomen inträffar.

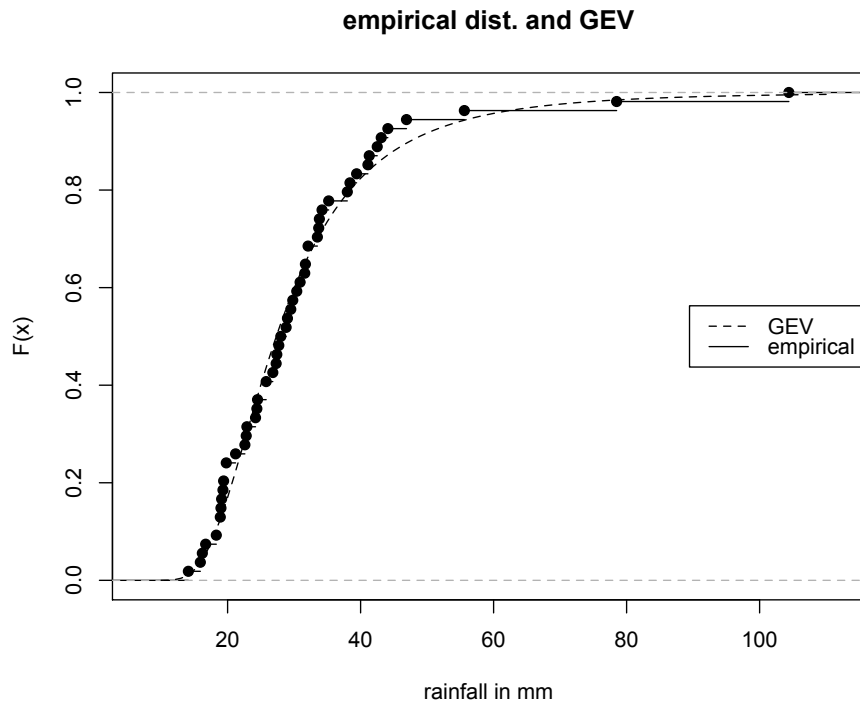
5.1 Nederbördsdata

Uppmätt vid SMHI mätstation i Uppsala finns nederbördsdata från 1961. Årsmaxima för denna station fram till 2014 är enligt data 1 i appendix. För att beräkna ett 100-års regn anpassas en GEV-fördelning in på materialet för att erhålla skattningarna $(\hat{\sigma}, \hat{\xi}, \hat{\mu})$ enligt tabell 1.

	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$	$\hat{\mu}$
MLE	7.8668	0.2216	24.3273
PWM	7.9584	0.2186	24.2810

Tabell 1: MLE- och PWM-skattningar för nederbördsdata

I figur 4 har en GEV med PWM-skattningarna från tabell 1 passats in. Utifrån skattade värden ger (12) att ett 100-årsregn i regionen Uppsala estimeras till $\hat{l}_{pwm} = 87.38$ mm. Intressant är att årsmaximat för året 1997 överstiger \hat{l}_{pwm} . Detta beror troligen på att den 17:e augusti 1997, då 104.4 mm uppmättes i Uppsala, så föll det 28.5 mm regn under 10 minuter enligt SMHI (2001). Annars skulle ett argument kunna vara att de observationer som nyttjats, årsmaxima i Uppsala, inte är tillräckligt extrema.



Figur 4: GEV skattad med PWM samt stickprovets empiriska fördelningsfunktion.

Vidare är det intressant att betrakta sannolikheter beräknade utifrån (13) för samma nederbördsdata. Detta återfinns i tabell 2 för varierande x och T . Sannolikheten

att Uppsala skulle överskrida det nuvarande dygnsnederbördsrekordet på 198 mm, uppmätt vid den officiella SMHI-stationen i Fagerheden (Piteå) 1997 enligt SMHI (Svenska nederbördsrekord), inom de närmaste 10 åren, är således omkring 0.0031.

	x (mm)					
T (år)	0	10	40	60	80	100
80	0.1333	0.4356	0.5760	0.6815	0.7607	
100	0.0566	0.2077	0.2948	0.3723	0.4413	
150	0.0107	0.0422	0.0626	0.0826	0.1021	
200	0.0031	0.0125	0.0187	0.0249	0.0310	
250	0.0012	0.0048	0.0071	0.0095	0.0119	
300	0.0005	0.0021	0.0032	0.0043	0.0054	

Tabell 2: $P(M_T > x)$ för varierande T , x . Beräknade med PWM-skattningarna från tabell 1.

Appendix

Data 1: Årsmaxima

ar	maxima	ar	maxima
1961	32.1	1988	27.3
1962	19.3	1989	18.9
1963	19.1	1990	27.4
1964	19.4	1991	19.8
1965	35.2	1992	29.5
1966	32.1	1993	14.1
1967	28.8	1994	24.4
1968	38.4	1995	39.4
1969	24.5	1996	30.9
1970	16.7	1997	104.4
1971	19.0	1998	16.2
1972	22.6	1999	19.8
1973	22.8	2000	18.9
1974	26.8	2001	78.5
1975	22.9	2002	33.8
1976	31.6	2003	18.3
1977	33.5	2004	28.0
1978	31.7	2005	29.8
1979	44.1	2006	41.3
1980	30.4	2007	33.7
1981	42.5	2008	25.8
1982	24.2	2009	27.7
1983	55.6	2010	46.9
1984	38.0	2011	41.1
1985	21.2	2012	25.8
1986	29.0	2013	15.9
1987	34.2	2014	43.1

Referenser

- Beirlant, J.; Goegebeur, Y.; Segers, J. och Teugels, J. (2004). *Statistics of Extremes: Theory and Applications*. Wiley Series in Probability and Statistics.
- Coles, S.G. och Dixon, M.J. (1999). Likelihood-based inference of extreme value models. *Extremes*, 2.1: 5-23.
- Dekkers, A. L. M.; Einmahl, J. H. J. och de Haan, L. (1989). A Moment Estimator for the Index of an Extreme-Value Distribution. *The Annals of Statistics*, 17.4: 1833-1855.
- Diebolt, J.; Guillou, A.; Naveau, P. och Ribereau, P. (2008). Improving probability-weighted moment methods for the generalized extreme value distribution. *REV-STAT*, 6.1: 33-50.
- Greenwood, J. A.; Landwehr, J. M.; Matalas, N. C. och Wallis, J. R. (1979). Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resources Res.*, 15: 1049-1054.
- de Haan, L. (1990). Fighting the arch-enemy with mathematics. *Statistica Neerlandica*, 44.2: 45-68.
- Hill, B.M. (1975). A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution. *The Annals of Statistics*, 3.5: 1163-1174.
- Hosking, J. R. M. (1990). L-moments: Analysis and Estimation of Distributions Using Linear Combinations of Order Statistics. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 52.1:105-124.
- Hosking, J. R. M.; Wallis, J. R. och Wood, E. F. (1985). Estimation of the Generalized Extreme-value Distribution by the Method of Probability-weighted Moments. *Technometrics*, 27.3: 251-261.
- Landwehr, J. A.; Matalas, N. C. och Wallis, J. R. (1979). Probability weighted moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel parameters and quantiles. *Water Resources Res.*, 15: 1055-1064.
- Leadbetter, M. R.; Lindgren, G. och Rootzen, H. (1983). *Extremes and related Properties of Random sequences and Processes*. Springer Series in Statistics.

Liero, H. och Zwanzig, S. (2011). *Introduction to the Theory of Statistical Inference*. Chapman & Hall/CRC.

Pickands, J. III. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics*, 3.1: 119-131.

Rychlik, I. och Rydén, J. (2006). *Probability and Risk Analysis: An Introduction for Engineers*. Springer.

SMHI. *Extrem nederbörd 1900-2004*. SMHI faktablad nr 4, 2001. Nytryck februari 2005.

SMHI. *Mätstation: Uppsala*. Klimatnummer: 97520.

SMHI. *Svenska nederbördsrekord*. Hämtad 19 maj 2016 från: <http://www.smhi.se/kunskapsbanken/meteorologi/svenska-nederbordsrekord-1.6660>.

Smith, R. L. (1985). Maximum Likelihood Estimation in a Class of Nonregular Cases. *Biometrika*, 72.1: 67-90.