UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2016:36

Om talet π

Sandra Berg

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare: Gunnar Berg
Examinator: Veronica Crispin Quinonez
Augusti 2016

Department of Mathematics
Uppsala University

Om talet π

Sandra Berg
Handledare; Gunnar Berg

Innehåll

1. Introduktion

Aldrig har ett tal fascinerat så många människor som talet π, konstanten som beskriver det förhållande som alla cirklars omkrets har till sin diameter. Att det genom historien och än idag är ett spännande tal kan ha många förklaringar. Många av oss har accepterat det, men det är förunderligt att alla cirklar är beroende av en och samma konstant, helt oavsett storlek. Dessutom dyker π upp i flera olika sorters beräkningar med cirklar i alla olika dimensioner, för cirkelns omkrets, area och sfärens volym, och för en torus finner vi π^2 då den har två cirklar att förhålla sig till.

Talet π kommer aldrig ta slut på decimaler och även när detta blev känt har människor fortsatt att försöka hitta fler och fler. Nuförtiden får datormaskiner stå för själva arbetskraften och utför beräkningar åt oss och utvecklingen går uppåt med en exponentiell hastighet. Maj 2015 var antalet decimaler som uträknats $13{,}3 \bullet 10^{12}$ st.[1] Ingen mätning i verkliga livet behöver ens 100 decimaler, en riktigt noggrann ingenjör behöver som mest 10 decimaler och en fysiker kanske använder 15 stycken. Varför är vi matematiker så envisa att vara absolut exakta? Och vad innebär att vara exakt? Roten ur 2 eller 1,4142… varför anses det ena vara mer exakt?

Något alla decimaler kan användas till är att undersöka dem och vilka egenskaper de har. Det framkommer att π är irrationellt och tar därför aldrig slut eller kommer upprepa sig. Men ändå kan vi undersöka decimalerna och vilka mönster de kan innehålla. Så ”tidigt” som 762:a positionen kan vi hitta sex 9or i rad, vilket är fantastiskt då det har en sannolikhet på 0.08%. Denna punkt heter *Feynman punkten* efter Nobelpristagare Richard Feynman som kunde rabbla upp decimalerna till π, just till denna punkt och avslutade efter dessa nior med *”and so on”*, som kan tolkas som *”och så vidare”*. Detta är så klart inte sant, men det ger en elegant dubbel mening då det som följer faktisk är 8. Intressant är även att 0 inte kommer upp bland decimalerna förrän på den 32:a positionen.[2]

Någonstans i π kan vi finna allt som är ändligt, när det kodats om till siffror. Som till exempel, absolut alla texter, de kortaste, de längsta och de smartaste. Dessutom all musik som någonsin skrivits till och med π i sig (dock enbart en gång). Men inte π +1 eller talet *e*, då de också saknar slut.[3]

Fascinationen kring π kan också komma från att det, trots att det definieras just med hjälp av cirkeln, dyker upp i sammanhang som till synes inte alls har med cirklar att göra, vilket ge talet ett mystiskt skimmer. Fortfarande finns många frågetecken kring π, dess egenskaper och varför det uppenbarar sig utanför cirklarnas och sfärernas värld.

[1] http://www.numberworld.org/y-cruncher/ Alexander J. Yee, 2016, y-cruncher – A Multi-Threaded Pi-Program
[2] Arndt, Haenel (2001), *Pi – Unleashed* s. 3
[3] Arndt, Haenel, s. 2-4

2. Historia

2.1 Babylonier till Bibeln

Första kända uppskattningen av π är från en skrift från Babylonien där π estimeras till $\frac{25}{8} = 3{,}125$. Annars har det enbart funnits bevis för att babylonierna använde att $\pi \approx 3$, vilket är en sämre uppskattning.[4]

Från ungefär samma tid har en bättre approximering hittats av en egyptisk skrivare som hette Ahmes, som skrev ner ett matematiskt problem om att beräkna en cirkulär area på den berömda Rhindpapyrusen. Ahmes skrev detta problem kring 1650 fvt, men Rhindpapyrusen översattes (och därför uppmärksammades) inte förrän 1877.[5] I problemet som Ahmes skrivit nämns inte talet π som ett givet förhållande eller som en konstant, utan det nämns implicit och om vi utgår från lösningen som presenteras blir $\pi = 3{,}16045$ (från $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$).[6] Det skulle ta tre tusen år efter detta innan förhållandet fick ett namn och symbol.

Många historiker hävdar att egyptierna ansåg $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}1605$. Dock finns det inga bevis på att detta var något de ansåg vara en konstant som beskrev ett förhållande som gällde alla cirklar. De var antagligen en mer praktisk siffra de använde vid handel och mätningar av mark. [7]

I Bibeln kan ett approximerat värde för π finnas outsagt i beskrivningar av hur altare byggts upp. I Gamla testamentet, 1 Kon, 7:23 kan vi läsa om det altare som byggs upp inne i Salomos tempel:

”Han gjorde ock havet, i gjutet arbete det var tio alnar från den ena kanten till den andra, runt allt omkring, ock fem alnar högt; ock ett trettio alnar långt snöre mätte dess omgång.”

Detta stycke menar att π skulle vara 3 och det har av någon anledning oroat matematiker hur Bibeln kunde vara så långt ifrån. Förklaringar så som ”det bevisar att Bibeln är falsk” och ”det bevisar att vetenskapsmännen ljugit för oss” har funnits bland spekulationerna. En trolig förklaring är att 3 var tillräckligt noggrant för att läsaren skulle kunna ha användning för det.[8]

---

[4] http://www.exploratorium.edu/pi/history_of_pi/history_of_pi.pdf Exploratorium, 2013, A Brief History of π
[5] Blatner (1998), π - *det fantastiska* talet s.8-10
[6] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_chronology.html *J J O'Connor J. J, Robertson E.F (2000)* A chronology of pi
[7] Blatner, s.10
[8] Blatner, s.12

2.2 Antiken och Arkimedes

Ungefär 300 år före vår tidräkning blir Euklides den första som visar att π finns, men han ger sig inte på att ge förhållandet ett approximativt värde. Han säger: *”Cirklar förhåller sig till varandra som kvadraten på deras diametrar” (Elementa 12.2)* Det som är viktigt här är att Euklides redan nu förstår att alla cirklar har ett och samma förhållande.

2.2.1 Arkimedes

Det första Arkimedes gör för π är att han kopplar ihop *area-π* med *omkrets-π*, då innan dess allmänna uppfattningen var att det var olika konstanter som beskrev förhållandet mellan radien och arean, jämfört med dess omkrets och radien. Arkimedes bevisade att de var desamma, dvs. ett och samma π. Som vi kan ser här nedan kopplades arean och omkretsen ihop genom att tömma ut cirkeln med tårtbitar. Om de sedan radas upp så utgör de hälften av en rektangel som har sidorna som närmar sig radien och omkretsen. När antalet tårtbitar ökar (och storleken på dem minskar) blir approximeringarna bättre och bättre. Utifrån detta kan vi se att om π finns med i att räkna ut omkretsen måste π även spela sin roll i att räkna ut arean.

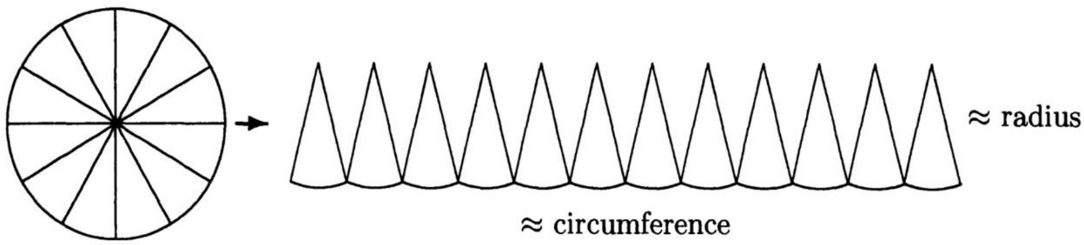


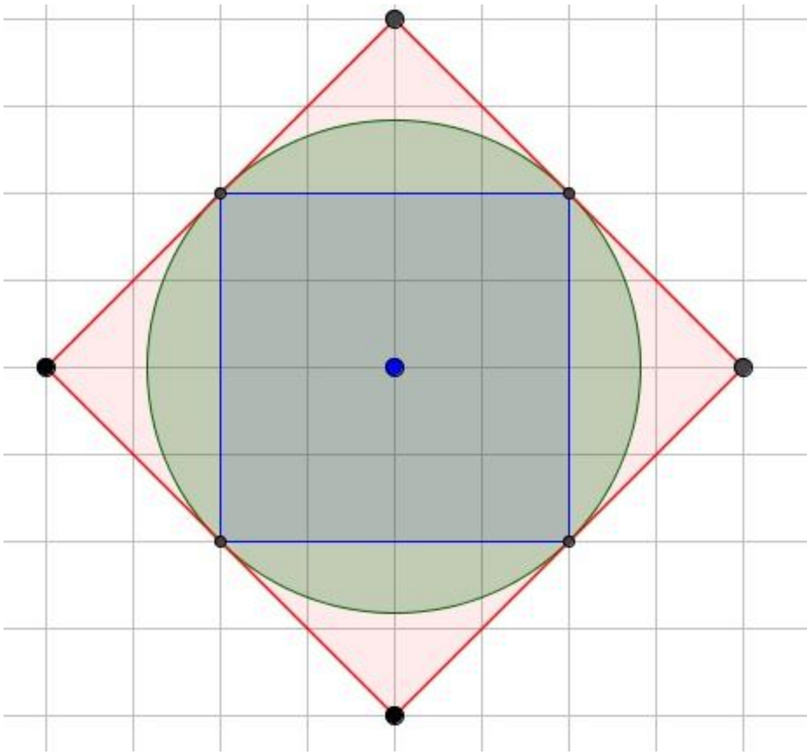
Fig. Area och omkrets kopplas samman med π.[9]

Arkimedes använde den så kallade uttömningsmetoden för att approximera π. Denna metod kom från början från Antifonos och Bryson av Herakleia, som använt denna metod några hundra år tidigare. Arkimedes kommer dock längre än Antifonos och Bryson gjort och får ut betydligt fler korrekta decimaler av π.[10] Denna bevisningsmetod skulle idag ersättas av gränsvärden men det uppgår ändå till en tidig form av analysen.[11] I stora drag stänger Arkimedes in värdet för π mellan två tal, med hjälp av regelbundna polygoner, inskrivna och omskrivna en cirkel. Den omskrivna polygonens omkrets blir större än cirkelns och får representera den övre gränsen och tvärtemot för den inskrivna polygonen. Allteftersom ökar Arkimedes antalet sidor i polygonerna och stänger in värdet för π, blir skillnaden mellan övre och undre gränsen i approximationen mindre. I sin

[9] Arndt, Haenel (2001), *Pi – Unleashed* s. 9
[10] Blatner (1998), *π - det fantastiska talet* s.16
[11] http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/exhaustion.pdf Bill Casselman, 2003, The method of exhaustion

enklaste form kan vi visa hur detta ser ut i ett exempel med hjälp av figuren nedan, med några av de enklaste regelbundna polygonerna, kvadrater.

Cirkeln nedan har radien 1 l.e. och en area på π. Den större, omskrivna kvadraten har då sidan 2 l.e. och arean 4 a.e. Den inskrivna kvadraten har sidan $\sqrt{2}$ l.e. och arean 2 a.e.



Vi får från med hjälp av areorna förhållandet nedan och kan bestämma att

$$2 < \pi < 4$$

Talet π ligger mellan dessa tal. Detta är tveklöst sant, men inte särskilt specifikt. Med denna, men något mer raffinerad, metod fastställer Arkimedes att π ligger mellan dessa tal.

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Vilken motsvarar ungefär

$$3{,}1408450704\ldots < \pi < 3{,}1428571429\ldots$$

För att bestämma detta har Arkimedes utökat antalet sidor i den regelbundna polygonen till hela 96 sidor. Denna sofistikerade metod som han utförde 200 före vår tidräkning är bland annat det som gör Arkimedes till en av de största matematikerna genom tiderna. Värt att notera är att han är en av de få som ge sig på att bestämma π som faktiskt har absolut rätt, andra matematiker som försöker hitta decimaler kommer tillslut stanna upp. Arkimedes bestämmer ett intervall som π ligger i och minskar sen intervallet. Det är alltså helt matematiskt korrekt att π ligger mellan $\frac{223}{71}$ och $\frac{22}{7}$, medan när vi säger att $\pi = 3{,}141592\ldots$ har vi avrundat och är inte längre absolut korrekt. (Något som matematiker är kända att vilja vara.)

2.3 Indien och Kina

Det är inte förrän de senaste århundradet som västvärlden fått upp ögonen för vad den indiska kulturen bidragit till matematiken. Först och främst har det varit svårt för historiker att kronologiskt bestämma skrifter skrivna på sanskrit från indiska matematiker, till exempel på grund av att matematiker eller verken delat namn. Dessutom har den indiska matematiken i många fall gömt sig i astronomin och astrologin. När européer fick tag på matematiska verk från Indien runt 1700- och 1800-talet presenterades verken som ”bidrag” i förhållande till europeiska matematikers verk, även om indierna var långt före. Utöver det har tyvärr mycket data från Indiens vetenskapliga upptäckter gått förlorat och detta har bidragit till att vi inte tagit till oss vad Indien har att lära oss.[12] En numera ganska välkänd matematiker, Mādhava, var bland annat en pionjär inom att beräkna och försöka bestämma π.

2.3.1 Mādhava

Mādhava var en indisk matematiker och astronom som levde cirka 1340-1425. Han anses vara grundaren till den matematiska skolan i Kerala, sydvästra Indien, som var aktiv från 1300-talet till början på 1600-talet. Det finns mycket lite information om Mādhavas liv, men mer om hans matematiska bedrifter.[13] Mest känd är Mādhava-Leibnitz serien för $\frac{\pi}{4}$ och Mādhava-Newton serien för sinus och cosinus. Mādhava-Leibnitz serien kommer vi återkomma till i avsnitt 2.5. Mādhava lämnade dessutom efter sig ett numerisk värde för π, som återfinns i form av en vers citerad hos en annan matematiker från Indien.

Versen lyder ungefär så här:
Läraren Mādhava nämner även ett värde på omkretsen närmare [det riktiga värdet] än det:
”Gudar [33], ögon [2], elefanter [8], ormar [8], eldar[3], tre, kvalitéer [3], Vedas [4], nakṣatras *[27], elefanter [8], armar [2] [2827433388233, rabblas alltså upp baklänges] – de visa sade att detta är måttet på omkretsen när diametern av en cirkel är nio* nikharva *[10^{11}]*[14]

Närmevärdet Mādhava hade fått fram, enligt denna vers, för π, $\frac{2827433388233}{900000000000} \approx 3{,}14159265359\ldots$ är korrekt till hela 11 decimaler, vilket är mycket närmare är det traditionella värdet $\frac{355}{113}$ som användes, vilket första delen refererar till när han säger att Mādhavas värde är *”närmare än det”.*
Utöver närmevärdet hade Mādhava en metod med regelbundna polygoner, likt den Arkimedes för att beräkna omkretsen till en cirkel.[15]

---

[12] Plofker (2009) *Mathematics in India* s.1-2
[13] Plofker, s. 218
[14] Plofker, s. 221
[15] Plofker, s. 222

2.3.2 Lui Hui och Zu Chongzhi

Kinesiska matematiker har egentligen legat århundranden före matematiker i andra delar av världen, men likt indierna har det inte uppmärksammats. Något som skiljer sig åt dock är att kineserna utvecklade en mestadels praktisk matematik och algebraiska metoder.[16] Självklart bidrog även kineser till att utveckla decimaler av π, då det blivit ett slags mätinstrument för hur sofistikerad nivå vetenskapen utvecklats till i ett visst land.[17]

De matematiska verk som överlevt från Zu Chongzhi, som levde runt år 430-500, behandlar främst beräkningar av π. Som Arkimedes stängde Zu Chongzhi in π i ett intervall, i modern notation kom han fram till

$$3{,}1415926 < \pi < 3.1415927$$

Detta stämmer och är sju korrekta decimaler, skulle detta användas och radien till cirkeln vore 10 kilometer skulle omkretsen bara vara några få millimeter fel. Zu Chongzhi uttryckte inte så här utan mycket mer praktiskt med längdenheter.[18] Hur han gått tillväga för att beräkna intervallet är inte känt, då materialet är alltför knapphändigt. Det är mycket möjligt att han använt samma uttömningsmetod som Liu Hui hade gjort 300 år tidigare. Liu Hui, som levde runt år 200 använde enbart en inskriven polygon och även han använde 96-sidor. Han satte π i intervallet

$$3{,}141024 < \pi < 3{,}142074$$

men kommenterade att 3,142074 var allt för stort och använde sig av 3,14 och uttryckte det i bråkform $\pi = \frac{157}{50}$. Senare utvecklade Liu Hui en snabbmetod där han fick fram att π = 3,1416, vilket han kontrollräknade med en 3072-sidig regelbunden polygon.

[16] Yan, Shiran (1987) *Chinese Mathematics – A Concise History*
[17] Yan, Shiran, s. 83
[18] Yan, Shiran, s. 82-82

2.4 Beräkningar av decimaler av π

Att hitta decimaler till π har genom historien blivit som ett race, likt det som tar USA till månen. Talet π, som det inte riktigt benämns som från början, fascinerar många matematiker som vill överglänsa varandra i att räkna ut flest decimaler. Vad som blir intressant är varför dessa matematiker gör detta. Detta tar inte heller slut när Lambert 1761 bevisar att talet π är irrationellt och decimalerna saknar ett slut eller ens kommer upprepa sig. Om det inte tar slut, varför envisas ändå vissa att hitta fler decimaler? Var kommer denna prestige och envishet ifrån? Vi kan också fråga oss varför är det just talet π och inte andra konstanter som får denna uppmärksamhet? Dessa frågor saknar tyvärr definita svar, men förkärleken till att beräkna decimaler pågår än i dag och på 1950-talet tog datormaskinerna över, och utvecklingen blir exponentiell. Här är några av de tidigaste bidragen i utvecklingen, de som använde likt Arkimedes använde uttömningsmetoden och utökade sidorna på polygonerna.

Matematiker	År	Antal	Decimaler
Rhindpapyrusen	2000 fvt	1	3,16045 (= $4(^{8}/_{9})^{2}$)
Arkimedes	250 fvt	3	3,1418 (medelvärde av intervallet)
Vitruvius	20 fvt	1	3,125 (= $^{25}/_{8}$)
Chang Hong	130	1	3,1622 (= √10)
Ptolemy	150	3	3,14166
Wang Fan	250	1	3,155555 (= $^{142}/_{45}$)
Liu Hui	263	5	3,14159
Zu Chongzhi	480	7	3,141592920 (= $^{355}/_{113}$)
Aryabhata	499	4	3,1416 (= $^{62832}/_{20000}$)
Brahmagupta	640	1	3,1622 (= √10)
Al-Khwarizmi	800	4	3,1416
Fibonacci	1220	3	3,141818
Mādhava	1400	11	3,14159265359
Al-Kashi	1430	14	3,14159265358979
Otho	1573	6	3,1415929
Viète	1593	9	3,1415926536
Romanus	1593	15	3,141592653589793
Van Ceulen	1596	20	3,14159265358979323846
Van Ceulen	1596	35	3,141592653589793238462643383279502[19]

0

Runt slutet på 1600-talet slutar användningen av utömningsmetoden som grekerna och bland annat Arkimedes använde sig av. Det ersätts av arctan-serieutveckling som James Gregory finner år 1671. Detta leder till att Leibnitz utvecklar arctan-serien för just π år 1674. Att använda serieutvecklingar blir det nya sättet att räkna ut π, då det är en betydligt mer effektiv metod. Så med hjälp av serieutvecklingar fortsätter decimalerna räknas ut, men nu går det betydligt snabbare. Newton blir

[19] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_chronology.html D H Bailey, J M Borwein, P B Borwein, and S Plouffle, The quest for Pi, *The Mathematical Intelligencer* **19** (1997), 50-57

den första att använda serieutveckling, men han använder serien för arcsinus och inte arctangens.
I detalj hur serieutvecklingarna användes för att beräkna decimalerna för π går vi in på i avsnitt 2.5.

Matematiker	År	Decimaler	Kommentarer
Newton	1665	16	3,1415926535897932
Sharp	1699	71	
Seki Kowa	1700	10	
Kamata	1730	25	
Machin	1706	100	
De Lagny	1719	127	Endast 112 korrekta
Takebe	1723	41	
Matsunaga	1739	50	
von Vega	1794	140	Endast 136 korrekta
Rutherford	1824	208	Endast 152 korrekta
Strassnitzky, Dase	1844	200	
Clausen	1847	248	
Lehmann	1853	261	
Rutherford	1853	440	
Shanks	1874	707	Endast 527 korrekta
Ferguson	1946	620	

Något intressant angående William Shanks felberäkning i den 528:e decimalen (som påverkade resterande decimaler) är att i Paris finns museet *Palais de la Découverte* som har ett så kallat π-rum som är beklätt med de första 707 decimalerna. Tyvärr är dessa decimaler just de som Shanks beräknade 1874 och när Ferguson upptäckte detta 1945 försökte de korrigera misstaget i π-rummet. Utan att lyckas något vidare, dessvärre. Enligt vissa finns det fortfarande finns misstag bland siffrorna. [20]

Två år efter Fergusons beräkningar, gör en dator för första gången en uträkning på π, och utvecklingen bli explosionsartad. Datorerna använder specifika algoritmer för att just beräkna π som är ännu mer effektiva än de bästa arctan serieutvecklingarna. Gauss hade utvecklat liknande algoritmer på 1800-talet men hans bidrag blev förbisett i nästan 200 år. [21]

Här nedan ser vi några av de bidrag som beräknats med hjälp av datorer.

Matematiker	År	Decimaler	Dator
Reitwiesner et al.	1949	2037	ENIAC
Nicholson, Jeenel	1954	3092	NORAC
Felton	1957	7480	PEGASUS
Genuys	1958	10000	IBM 704
Felton	1958	10021	PEGASUS

[20] Arndt, Haenel, s. 50
[21] Arndt, Haenel, s. 16-17

Guilloud	1959	16167	IBM 704
Shanks, Wrench	1961	100265	IBM 7090
Guilloud, Filliatre	1966	250000	IBM 7030
Guilloud, Dichampt	1967	500000	CDC 6600
Guilloud, Bouyer	1973	1001250	CDC 7600
Miyoshi, Kanada	1981	2000036	FACOM M-200
Guilloud	1982	2000050	
Tamura	1982	2097144	MELCOM 900II
Tamura, Kanada	1982	4194288	HITACHI M-280H
Tamura, Kanada	1982	8388576	HITACHI M-280H
Kanada, Yoshino, Tamura	1982	16777206	HITACHI M-280H
Ushiro, Kanada	1983	10013395	HITACHI S-810/20
Gosper	1985	17526200	SYMBOLICS 3670
Bailey	1986	29360111	CRAY-2
Kanada, Tamura	1986	33554414	HITACHI S-810/20
Kanada, Tamura	1986	67108839	HITACHI S-810/20
Kanada, Tamura, Kubo	1987	134217700	NEC SX-2
Kanada, Tamura	1988	201326551	HITACHI S-820/80
Chudnovskys	1989	480000000	
Chudnovskys	1989	525229270	
Kanada, Tamura	1989	536870898	
Chudnovskys	1989	1011196691	
Kanada, Tamura	1989	1073741799	
Chudnovskys	1991	2260000000	
Chudnovskys	1994	4044000000	
Kanada, Tamura	1995	3221225466	
Kanada	1995	4294967286	
Kanada	1995	6442450938	
Kanada, Takahashi	1997	51539600000	HITACHI SR2201
Kanada, Takahashi	1999	206158430000	HITACHI SR8000[22]

[22] D H Bailey, J M Borwein, P B Borwein, and S Plouffle, The quest for Pi, *The Mathematical Intelligencer* **19** (1997), 50-57

2.5 Serieutvecklingar

Oändliga serier är en summar av oändligt många termer och eftersom addition oftast sker med två termer i taget handlar serier oftast om att skapa gränsvärden.

Som tidigare nämnts tog serieutvecklingar över som metod att beräkna decimaler av π efter Arkimedes uttömningsmetod. James Gregory fann den första serien för arctangens 1671 och Leibnitz har länge ansetts vara den första att använda den för π, men Mādhava använde densamma redan i början på 1400-talet. Nu kallas denna serieutveckling för Mādhava-Leibnitz serien för π. Deras serie utveckling är ett specialfall av arctangensserien

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

där Leibnitz och Mādhava satt in $x = 1$. Resultatet ser ut så här

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

eller som en summa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Så för att beräkna π multiplicerar de med 4 och utökar antalet termer, som exempel om vi beaktar de första fem termerna ovan får vi

$$\pi \approx 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) = \frac{1052}{315} = 3{,}33968\ldots$$

Det går snabbare än uttömningsmetoden med ökande antal polygoner, men för att få 5 korrekta decimaler till π med hjälp av denna serie så krävs ändå 377978 termer.

John Machin utvecklade en egen konvergerande serie för π, som hjälpte honom att beräkna 100 decimaler år 1706. Hans formel som användes i kombination med Taylorutvecklingen för att beräkna π. Machins formel är[23]

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Främsta fördelen med denna är att den konvergerar snabbare än Mādhava-Leibnitz serie och användes i flera århundraden tills datorerna tog över.

Arctangensformler som denna kan bevisas vara korrekta så här, till att börja med betraktar vi en enklare formel

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

Om vi nu tar tangens på båda sidor ger vänster led 1 och höger led ger

[23] http://mathworld.wolfram.com/MachinsFormula.html Weisstein, Eric W. "Machin's Formula." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$$

enligt regeln för addition för tangens

$$\tan\alpha+\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\ \bullet\tan\beta}$$

Detta gäller även Machins formel, som dock är något mer avancerad att visa.

Något som tyvärr inte uppmärksammades under denna tid var att en svensk matematiker, Samuel Klingenstierna, tog fram en egen formel för detta. En bibliotekarie vid Uppsala universitet, vid namn Heyman publicerade en artikel om just Klingenstiernas beräkningar av π och är anledningen till att Klingenstierna idag uppmärksammas i dessa samband. I modern beteckning lyder Klingenstiernas formel,

$$\frac{\pi}{4}=8\arctan\frac{1}{10}-4\arctan\frac{1}{515}-\arctan\frac{1}{239}$$

Dock finns det tvivel på om detta verkligen skulle varit Klingenstierna och när han i sådana fall skrev det. Säkrare källor finns för att Klingenstierna även använt Machins formel för att beräkna 33 decimaler av π.[24]

Leonhard Euler var föga förvånande också en av dem som var framstående inom denna metod. Euler fann flera arctangensformler och oändliga serier för att beräkna π, bland annat en som var så snabb att han kunde beräkna 20 decimaler på en timme.[25] Vilket kanske säger mer om Euler som matematiker än själva serien.

[24] Rodhe S, (2002) *Matematikens utveckling i Sverige fram till 1731* s. 52-54

[25] Blatner, s. 42

2.6 Irrationalitet

År 1761 är Johann Heinrich Lambert den första som bevisar att talet π är irrationellt med hjälp av kedjebråk. Lamberts bevis baseras på att $\tan x$ är irrationellt om ett nollskilt x är rationellt. Eftersom tan $\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ inte är irrationellt kan inte $\frac{\pi}{4}$ vara rationellt och därför inte heller π vara rationellt.[26]

Men matematiker arbetar vidare för att förenkla beviset. Ivan Niven presenterar ett förhållandevis enkelt bevis 1946, som lyder så här:
Låt π = a/b, en kvot av två positiva heltal.
Vi definierar två polynom
$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$
$g(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{2n}(x)$

Där n är ett positivt heltal som specificeras senare. Vi ska nu visa att, på grund av att $n!\,f(x)$ har heltalskoefficienter och är av en grad inte mindre än n, har $f(x)$ och dess derivator $f^{(i)}(x)$ har heltalsvärden för $x = 0$.

Binomialutvecklingen av $f(x)$ ger

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$
$$= \frac{1}{n!}\left(a^n x^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b x^{n+1} + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 x^{n+2} + \cdots (-1)^n b^n x^{2n}\right)$$

Vi börjar med att se hur första termen beter sig.
Om $f(x) = \frac{1}{n!} \bullet x^n$ får vi $f(0) = 0, (n > 1)$ ett heltalsvärde.

Graden av f(x) är 2n och alla termer har grad $\geq n$. Det betyder att $f(0), f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ blir 0. När vi sedan bildar $f^{(n)}(x)$ kommer vi att efter n deriveringar, få en faktor $n!$ som tar ut nämnaren vilket medför att även $f^{(n)}(x)$ och de högre derivatorna får heltalsvärden för $x = 0$. Eftersom $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{n!} \bullet a^n$ och för x = 0 får vi $f^{(n)}(0) = a^n$
Deriveras polynomet vidare försvinner den första termen helt och vi får blicka mot den andra termen.
$f^{(n+1)}(x) = -\frac{a^{n-1} b \bullet (n+1)!}{n!} \bullet 1$ och därför blir även $f^{(n+1)}(0)$ ett heltal. Då har vi visat att $f(x)$ och dess derivator har heltalsvärden för $x = 0$.

Detsamma gäller för $x = \pi = \frac{a}{b}$ eftersom $f(x) = f(\frac{a}{b} - x)$. Vilket visas här,

[26] Nahin (2006) *Dr. Euler's Fabulous Formula* s.92

$f\left(\frac{a}{b}-x\right) = \frac{(\frac{a}{b}-x)^n\left(a-b(\frac{a}{b}-x)\right)^n}{n!} = \frac{(\frac{a}{b}-x)^n(a-a+bx)^n}{n!} = \frac{(\frac{a}{b}-x)^n(bx)^n}{n!} = \frac{(\frac{a}{b}-x)^n b^n x^n}{n!} = \frac{(b\bullet\frac{a}{b}-bx)^n x^n}{n!} = \frac{(a-bx)^n x^n}{n!} = f(x)$

Med hjälp av grundläggande deriveringsregler får vi
$\frac{d}{dx}\{g'(x)\bullet\sin(x) - g(x)\bullet\cos(x)\} = g''(x)\sin(x) + g(x)\sin(x) = \left(g''(x) + g(x)\right)\sin(x) = \Big(\left(f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x)\ldots\right) + \left(f(x) - f''(x) + f^{(4)} - \cdots\right)\Big)\sin(x) = f(x)\sin(x)$
och

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x) = \left[g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x)\right]_0^{\pi} = g(\pi) + g(0)$$

Eftersom vi visat att f(x) och dess derivator, som g(x) består av, har heltalsvärden för både *x = 0* och *x = π* vet vi att *g(π) + g(0)* kommer lika så vara ett heltal. Men för $0 < x < \pi$ får vi
$x^n < \pi^n,\ (a-bx)^n < a^n$, $\sin(x) \le 1$ och $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ och utifrån det kan vi konstatera att
$0 < f(x)\sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ och
$\frac{\pi^n a^n}{n!}$ har gränsvärde 0 när n går mot oändligheten. [27]
så eftersom $f(x)\sin(x)$ kommer att vara positiv, men godtyckligt liten för n som är tillräckligt stort, kommer samma sak gälla för dess integral. Därför blir inte *g(π)+g(0)* ett heltal eftersom inga heltal befinner sig mellan 0 och 1. Här får vi motsägelse och π kan inte vara en kvot mellan heltal och därför måste π vara irrationell. ■[28]
Intressant är var sin(x) kommer ifrån egentligen? Varför väljer Niven detta? Ett förslag kan vara att π är första positiva nollstället till sin(x) och därför blir det relevant för beviset.

[27] Adams R.A, Essex C (2013) *Calculus: a complete course* s. 502
[28] Ivan Niven (1946) *A Simple Proof that π is Irrational.* Bull. AMS **53** s. 509

2.7 Transcendens

När π bevisats vara irrationellt blir det naturligt att fråga om talet är transcendent. Benämningen *transcendent* kommer från Leibnitz publikation från 1682 där han förklarar att sin(x) inte är en algebraisk funktion av x.[29] Euler var med största sannolikhet först att definiera transcendenta tal i modern mening.[30] Definitionen för ett transcendent tal är att det inte är algebraiskt, det vill säga att talet (reellt eller komplext) inte är en rot till en nollskild polynomekvation med rationella

koefficienter. Det finns dock polynom så som $9\pi^4\ 240\pi^2 + 1492$ som är ungefär 0

för $x = \pi$. Mer exakt är värdet -0,02323… Men det är helt omöjligt att hitta polynomekvationer där de skulle bli exakt 0, vilket gör π till ett transcendent tal.

Nästan alla tal är transcendenta. När vi inom matematiken säger *nästan alla* reella tal har en viss egenskap så menas det att mängden A av tal som **inte** har just denna egenskap är en så kallad nollmängd. Detta i sin tur betyder att för varje givet tal ε>0, A kan täckas av en uppräknelig mängd intervall sådana att summan av deras längder är mindre än ε. Georg Cantor visade 1873 att mängden algebraiska tal är uppräknelig[31] och om vi tänker oss att det n:te algebraiska talet läggs i mitten av ett intervall med längd $\frac{\varepsilon}{2^n}$ så kommer den totala längden av intervallen att vara

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon \bullet 1 = \varepsilon$$

Vi kan alltså säga att mängden algebraiska tal är *liten* i meningen att den är uppräknelig och att den är en nollmängd. Som är anledningen till att vi kan säga att nästan alla reella tal är transcendenta.

Alla reella transcendenta tal är irrationella, eftersom rationella tal är algebraiska. Omvändningen gäller dock inte, alla irrationella tal är inte transcendenta. Som exempel är $\sqrt{2}$ allmänt känt som ett irrationellt tal, men är inte transcendent då det är rot till ett flertal polynom med rationella koefficienter, så som $x^2 - 2 = 0$.

År 1775 framkastar Euler att talet π är transcendent, långt innan något tal bevisats vara transcendent[32]. Den första personen att faktiskt bevisa existensen av transcendenta tal var Joseph Liouville 1844[33]. Han snickrade ihop ett eget tal, definierade det så att det uppfyllde villkoren och benämnde talet Li. Det tar 29 år

---

[29] Nicolás Bourbaki (1994). *Elements of the History of Mathematics.* Springer. s. 74.

[30] Paul Erdos; Dudley, Underwood (December 1943). *"Some Remarks and Problems in Number Theory Related to the Work of Euler*". Mathematics Magazine **vol. 56.** S.292–299

[31] Cantor (1874) *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller algebraischen Zahlen* Journal für die Reine und Angewandte Mattematik **84** s 242-248

[32] Blatner, s. 58

[33] Aubrey J. Kempner (October 1916). *"On Transcendental Numbers".* Transactions of the American Mathematical Society (American Mathematical Society) **17** s.476–482.

innan det första givna talet, alltså inte ihop-snickrat, bevisades vara transcendent. Det blir talet *e* och beviset gjorde Charles Hermite 1873. Ferdinand von Lindemann bevisar 1882 att π är transcendent, med utgångspunkt från just Hermites bevis att *e* är transcendent.

Med sitt bevis för att π är transcendent lyckas även Lindemann reda ut ett annat problem som matematiker, filosofer och andra grubblat över sen antiken, det om cirkelns kvadratur. Problemet går ut på att med en passare och omarkerad linjal kunna finna en kvadrat vars area motsvarar en given cirkels. Med radien r till cirkeln, ska det alltid gå att konstruera en sida x till kvadraten så att dess area x^2 motsvarar cirkelns area $r^2\pi$. Alltså måste sidan till kvadraten motsvara

$x = r\sqrt{\pi}$.

För att kunna lyckas med detta måste det vara möjligt att få ut radikanden π genom dessa specificerade operationer och det är precis det som Lindemanns bevis säger att vi inte kan. Så tyvärr blir lösningen till cirkelns kvadratur att den helt enkelt är omöjlig att lösa. Något roande är att trots att detta bevisades var det ändå personer som fortsatte att försöka lösa problemet, vissa håller på även än idag. [34]

Efter Lindemanns bevis var det många som arbetade för att förenkla beviset och ett av de mer eleganta är det av, ännu en gång, Ivan Niven som tar sig hjälp av Euler och hans identitet.[35]

Vi börjar med att anta att π är ett algebraiskt tal, vilket kommer leda till en motsägelse. Eftersom produkten av två algebraiska tal också är algebraiskt, kan vi säga att πi är en rot till ett nollskilt polynom med heltalskoefficienter

$\theta_1(\pi i) = 0$ (1)

som har rötterna $\alpha_1 = \pi i, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Utifrån Eulers identitet $e^{i\pi} + 1 = 0$ får vi då

$(e^{\alpha_1} + 1)(e^{\alpha_2} + 1)\dots(e^{\alpha_n} + 1) = 0$ (2)

om dessa nu multipliceras ihop kan vi konstruera en algebraisk ekvation med heltalskoefficienter vars rötter är exponenterna till utvecklingen av (2). Först betraktar vi exponenterna i par

$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n$ (3)

Från ekvation (1) följer att de elementära symmetriska funktionerna av $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ är rationella tal, eftersom för ett moniskt polynom är koefficienterna elementära symmetriska funktioner av rötterna och de är koefficienterna i polynomet θ_1. Tack vare huvudsatsen för symmetriska funktioner, som säger att varje symmetrisk funktion kan skrivas som en kombination av elementära sådana, är även de symmetriska funktionerna av exponenterna vi betraktade i (3) rationella tal. Låt oss benämna dessa $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_3, \dots, \gamma_k = \alpha_{n-1} + \alpha_n$

[34] Arndt, Haenel (2001), *Pi – Unleashed* s. 7-8
[35] Niven, I. (1939) *The Transcendence of π*. American Math Monthly **46 s.** 469-471

Vi definierar nu

$\theta_2(x) = 0$ (4)

en algebraisk ekvation med heltalskoefficienter, som är symmetriska funktionera av γ_i och har dessa som rötter $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_3, \dots, \gamma_k = \alpha_{n-1} + \alpha_n$.

Detsamma kommer att gälla för

$\theta_3(x) = 0, \theta_4(x) = 0, \dots, \theta_n(x) = 0,$ (5)

där 3,4,5…n motsvarar de olika kombinationerna av exponenter från utvecklingen av (2). Så θ_2 motsvarade $\alpha_1 + \alpha_2 \dots$ och för θ_4 blir det $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5$, osv.

Produkten av alla dessa polynom

$\theta_1(x)\ \theta_2(x)\ \theta_3(x) \dots \theta_1(x)$ (6)

kommer ha nollställen som är just exponenterna till utvecklingen av (2).
Elimination av eventuella nollrötter görs genom att bryta ut x och kvar blir

$\theta(x) = cx^r + c_1 x^{r-1} + \dots + c_r = 0$ (7)

vars rötter $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ är nollskilda eftersom vi brutit ut x. Därför kan vi skriva om utvecklingen av (2)

$e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_r} + k = 0$ (8)

där k är ett positivt heltal, som är antalet produkter där exponenten blir 0.

Vi definierar funktionen

$f(x) = \frac{c^s x^{p-1} \{\theta(x)\}^p}{(p-1)!}$ (9)

där s= rp-1, p är ett primtal som senare ska specificeras. Funktionen blir då ett polynom med rationella koefficienter av
grad = *(p-1) + rp = p -1 + s + 1 = p + s*

Vi definierar också

$g(x) = f(x) + f'(x) + \dots + f^{(s+p+1)}(x),$ (10)

och kan notera att derivatan av $e^{-x}g(x)$ blir $-e^{-x}f(x)$ eftersom

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}g(x)\right) = -e^{-x}g(x) + e^{-x}\frac{d\,g(x)}{dx} = e^{-x}\left[\left(f'(x) + f''(x) + f^{(3)}(x)\dots\right) - \left(f(x) + f'(x) + f^{(2)}(x)\dots\right)\right] = -e^{-x}f(x)$$

Därför kan vi skriva

$$\int_0^x -e^{-t} f(t)dt = e^{-x}g(x) - e^0 g(x)$$

substitutionen t = ux ger

$$-x\int_0^1 -e^{(1-u)x} f(ux)\,du = g(x) - e^x g(0)$$

Låt x ta alla värden för $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ och summera alla resulterande ekvationer. Från (8) får vi

$$\sum_{j=1}^{r} g(\beta_j) + k \bullet g(0) = -\sum_{j=1}^{r} \beta_j \int_0^1 e^{(1-u)\beta_j} f(u\beta_j)du \qquad (11)$$

Detta kommer snart ge oss den motsägelse vi vill ha.

Vi ska välja primtal p för att vänstra sidan ska bli ett nollskilt heltal och högra sidan så litet som vi vill. Eftersom $\theta(\beta_j) = 0$ för alla j och om vi deriverar $f(x)$ högst $p-1$ gånger så kommer det att finnas kvar en potens av $\theta(x)$ som gör att $f^{(v)}(\beta_j) = 0$ för alla β_j och $v \leq p-1$. Således blir också

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(v)}(\beta_j) = 0$$

för $0 \leq v < p-1$.

Polynomet vi får från att multiplicera (9), $f(x)$ med $(p-1)!$ kommer ha heltalskoefficienter eftersom produkten av p konsekutiva positiva heltal är delbara med $p!$. Exempel på hur och varför detta gäller är som följer,

Vi väljer 6 konsekutiva positiva heltal, och visar att de är delbara med 6!
$4 \bullet 5 \bullet 6 \bullet 7 \bullet 8 \bullet 9 = \frac{9!}{3!} = \frac{9!}{3!6!} \bullet 6! = \binom{9}{3} \bullet 6!$ Som är delbart med 6! eftersom $\binom{9}{3}$ är ett heltal.
Allmänt gäller

$$\underbrace{k \bullet (k+1) \bullet (k+2) \bullet \dots \bullet (k+p-1)}_{p\ stycken\ konsekutiva\ tal} = \frac{(k+p-1)!}{(k-1)!} = \frac{(k+p-1)!}{(k-1)!p!} \bullet p! = \binom{k+p-1}{k-1} \bullet p!$$

Där även $\binom{k+p-1}{k-1}$ är ett heltal.
För att få termen $\neq 0$ måste vi derivera $\theta(x)^p$ minst p gånger. Detta ger en faktor $p \bullet (p-1)!$ och $(p-1)!$ tar ut nämnaren i uttrycket för $f(x)$ så $f^{(v)}(x), v \geq p$ blir

ett polynom med koefficienter som är heltal och delbara med p. (Alla koefficienter kommer även vara delbara med konstanten c^s utifrån (9)) Eftersom $f(x)$ har grad $p+s$ kommer $f^{(v)}(x), v \geq p$ att ha grad $\leq (p+s)-p=s$. Det följer av detta att för $v \geq p$, är $f^{(v)}(\beta_j)$ ett polynom av β_j av grad s som högst, vars koefficienter alla är delbara med pc^s.

Om vi nu betraktar (för $v \geq p$)

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(v)}(\beta_j)$$

så ser vi att detta är ett symmetriskt polynom i $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ av grad $\leq s$. Enligt huvudsatsen för symmetriska funktioner kan det då uttryckas med hjälp av de elementära symmetriska funktionerna av $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$. Men dessa är ju rötter till

$$\theta(x) = cx^r + c_1x^{r-1} + \cdots + c_r = 0 \leftrightarrow x^r + \frac{c_1}{c}x^{r-1} + \cdots + \frac{c_r}{c} = 0$$

Därför är de elementära symmetriska funktionerna just

$$\frac{c_1}{c}, \frac{c_2}{c}, \frac{c_3}{c}, \dots, \frac{c_r}{c}$$

Eftersom vi har att, för $v \geq p$

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(v)}(\beta_j)$$

är en funktion av $\frac{c_1}{c}, \frac{c_2}{c}, \frac{c_3}{c}, \dots, \frac{c_r}{c}$ av grad $\leq s$ och med koefficienter delbara med pc^s, så kommer termerna att ha formen

$$p \bullet c^s \bullet n \bullet \underbrace{\left(\frac{c_1}{c}\right) \bullet \left(\frac{c_2}{c}\right) \bullet \ \dots \bullet \left(\frac{c_r}{c}\right)}_{antalet \leq s} = p \bullet ett\ heltal$$

Följden av detta blir

$$\sum_{j=1}^{r} g(\beta_j) = p \sum_{v=p}^{p+s} k_v$$

För att fullfölja beviset att vänster led av (11) är ett nollskilt positivt heltal, ska vi nu visa att $k \bullet g(0)$ är relativt prima till p. I vänsterledet i (11) återstår termen $k \bullet g(0)_n = k \bullet \left(f(0) + f'(0) + \cdots + f^{(s+p+1)}(0)\right)$

och här har vi att

$$f^{(v)}(0) = 0, om\ v \leq p-2$$

på grund av x^{p-1} faktorn i uttrycket för f(x).

$$f^{(p-1)}(0) = c_s {c_r}^p$$

eftersom vi måste ”derivera bort” x^{p-1} för att få ett resultat skilt från noll.

$f^{(v)}(0) = pK_v \quad (för\ v \geq p)$

Där K_v är heltal, då vi måste derivera bort x^{p-1} och derivera $\theta(x)^p$ minst en gång varvid vi får $p \bullet \theta(x)^{p-1} \bullet \theta$!

Vänsterledet i (11) får då utseendet

$$p \bullet N + k \bullet \ c_s c_r{}^p$$

Om vi väljer *p* så att primtalet är större än *k*, *c*, c_r (detta är möjligt då det finns oändligt många primtal)så kan inte $k \bullet \ c_s c_r{}^p$ vara delbart med p. Då kommer vänsterledet vara ett heltal som inte är delbart med p och eftersom 0 är delbart med p är detta heltal skiljt från 0. Därför så följer det önskade resultatet från (10).

Slutligen, kan vi säga att det högra ledet i (11) är detsamma som

$$-\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{c} \int_0^1 \frac{\left(c^r \beta_j \theta\left(u\beta_j\right)\right)^p}{(p-1)!} e^{(1-u)\beta_j} du$$

Detta är en ändlig summa, varje term kan bli så liten som vi önskar genom att välja stora värden för *p* eftersom

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\left(c^r \beta_j \theta\left(u\beta_j\right)\right)^p}{(p-1)!} = 0$$

då nämnaren med fakultet växer snabbare än potensen.[36]
Eftersom högra ledet går mot 0 och vänstra ledet var ett nollskiljt positivt heltal, har vi nu vår motsägelse och kan säga att π är transcendent. ∎

[36] Adams R.A, Essex C (2013) *Calculus: a complete* s. 502

3. Idag och framtiden

3.1 π i osannolika sammanhang

3.1.1 π inom matematiken

Trots att π ändå är ett tal på tallinjen som går att peka ut, så kan det kännas underligt när π ändå dyker upp på ställen inom matematik som egentligen har mycket lite att göra med cirklar och deras radie. För det är ändå definitionen av vad π är. Så det blir till vår förvåning när π dyker upp i till exempel sannolikhet.

Sannolikheten att två heltal är relativt prima, det vill säga att de saknar gemensam faktor, är faktiskt $\frac{6}{\pi^2}$. Detta visades av Dirichlet 1849. [37] Notera att resultatet är inversen till Eulers Baselproblem, något vi kommer behandla strax. Och anledningen är just att vi använder Riemanns ζ-funktion för 2.

En annan sannolikhet där π dyker upp är, om en nål kastas på ett papper, som har horisontella linjer med avstånd av samma längd som nålen, så blir sannolikheten att nålen korsar en linje när den landat på pappret $\frac{2}{\pi}$. Antagligen ligger svaret på frågan vad π gör där i att nålen roterar.

Fortfarande inom stokastik, har vi normalfördelningens täthetsfunktion, där vi kan finna π. Täthetsfunktionen som beskriver hur stor sannolikhet det är att en variabel skulle anta ett visst värde, i just normalfördelningen ser den ut så här

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Det skulle kunna ligga någon sorts förklaring i att normalfördelning ändå behandlar en kurva som till stor del påminner om en våg, likt de vågor vi kan finna i en trigonometrisk kurva, och de har nära kopplingar till en cirkel, det vill säga enhetscirkeln.

- Slutligen måste vi självklart nämna Euler, som har fler än ett bidrag till π och dess historia bland de 900 olika böcker och artiklar han publicerade under sin livstid. Det första som lika självklart som Euler måste nämnas är Eulers identitet

$$e^{\pi i} - 1 = 0$$

Som kanske inte har en osannolik koppling till π då det står för en vinkel utryckt i radianer. Radianer som använder sig av just cirkelns omkrets för att uttrycka vinklar. Vad som ändå är fascinerande med Eulers identitet är hur dessa tal, e, i och π i kombination med varandra kan skapa ett reellt, rationellt och naturligt heltal.

Mer osannolikt är lösningen till det klassiska Baselproblemet som Euler löste vid

[37] https://primes.utm.edu/notes/relprime.html Chris K. Caldwell, 2016, What is the probability that gcd(n, m)=1?

24 års ålder efter hans lärare Jakob Bernoulli inte kunnat lösa det fullständigt. Bernoulli hade varit framstående inom oändliga serier, bland annat bevisade han divergensen för den harmoniska serien och gav exakta summor för konvergerande serier. När det kom till det så kallades Baselproblemet att bestämma en exakt summa för

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

lyckades Bernoulli "bara" visa att eftersom

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k+1)/2}$$

blir summan mindre än 2. Här överlät han problemet till sin tidigare elev Leonhard Euler. Euler som är känd för att vara våghalsig i sina matematiska metoder som ofta kan liknas vid att "testa sig fram och se vad som händer", löste detta klassiska problem som även Leibnitz försökts sig på. Lösningen blev just detta,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

och det är här vi frågar oss, hur kom π dit? Euler använde sig mestadels av integraler för att nå sitt resultat, det hade inte någon koppling till cirklar (eller torusar, som faktiskt har π^2 i sina beräkningar).[38]

3.1.2 π utanför matematiken

Flodens längd och avstånd

Det finns en teori att förhållandet mellan floders verkliga sträcka dvs. hur långt vattnet färdas och längden fågelvägen, från början till slut skulle motsvara π. (Detta förhållande mellan kurvor och dess längd kallas på engelska *sinuosity*) Enligt professor Hans-Henrik Stølum på Cambridge University skulle detta vara sant. [39] Tyvärr verkar det inte stämma. En hemsida har samlat data på 273 olika floder över hela världen och värdet på förhållandet ligger på 1,898582, med standardavvikelse på 0,719096. Detta skiljer sig 1,243011 från π, med ett fel på 39,566261%. Dessutom är antalet floder som faktiskt har ett förhållande runt 3,1 och 3,2 är bara 3 stycken.[40] Men visst vore det vackert om naturen innehöll π på det sättet?

[38] Dunham (1999) *Euler – The Master Of Us All* s.39-46

[39] http://raaf.org/pdfs/meandering_river.pdf Hans-Henrik Stølum, 1996, River Meandering as a Self-Organization Process

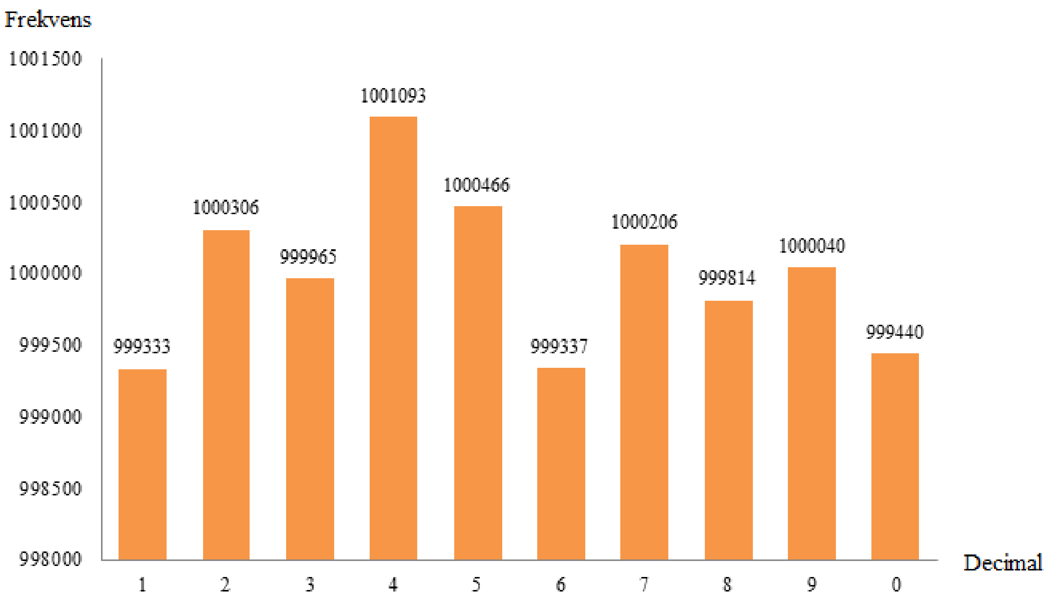
[40] http://pimeariver.com/ Laurence Roberts, 2015, Pi me a River, Is the average sinuosity of the world's rivers equal to π?

3.2 Normalitet och andra öppna frågor

Sista frågan att ställa oss om π, när irrationaliteten och transcendensen är besvarad, är om π är normalt? Det vill säga, om π vara normalt skulle fördelningen av siffror bland decimalerna vara lika. Det skulle betyda att ingen siffra eller kombination av siffror skulle vara mer frekvent återkommande än något annat. Med hjälp av ett generellt bevis går det att visa att *nästan alla* (i det matematiska avseendet) reella tal är normala.

Exempel på normala tal är ofta sådana som vi tidigare kallat ”hopsnickrade tal” så som C_{10} = 0,12345678910111213141516… vilket nästan är uppbenbart normalt då det snickrats ihop till att vara normalt till basen 10, men är antagligen inte normalt till någon annan bas. Detta tal kallas Champernowes konstant. När tal är normala till en bas kallas de *enkelt normala*, medan när de är normala till alla baser är de *absolut normala*.[41] Ett annat normalt tal, till just basen 10, är det tal där varje decimal består av kvadrater av basen 10, alltså x = 0,149162536496481100… Besicovitch bevisade att detta tal var normalt 1935.[42]

När vi tittar på decimalerna till π, kommer vi att hitta lika många 3:or som 5:or och 1:or? Eftersom talet π aldrig kommer ta slut i decimaler, vet vi inte än om det är normalt och det kommer ta en evighet att testa. Tyvärr har ingen annan kommit på någon alternativ metod att testa huruvida π är normalt, så frågan lämnas obesvarad.[43] Vi har fokuserat på basen 10, sifforna i vårt decimalsystem, π skulle kunna vara normal eller inte till någon annan bas. Om vi skulle ta och kika på de första tio miljoner decimalerna, fördelar de sig så här. [44]



[41] Schmidt, Wolfgang (1960) *On Normal Numbers* Pacific J. Math
[42] Besicovitch, A. S. (1935), The asymptotic distribution of the numerals in the decimal representation of the squares of the natural numbers", *Mathematische Zeitschrift* **39**: 146–156
[43] Arndt, Haenel (2001), *Pi – Unleashed* s. 6
[44] Rick Wicklin, 2015, Analyzing the first 10 million digits of pi: Randomness within structure http://blogs.sas.com/content/iml/2015/03/12/digits-of-pi.html

4. Sammanfattning

Vi har fått många svar om π och dess egenskaper genom historien. Antagligen för att talet väckt någon särskild nyfikenhet hos många matematiker, som bidragit till en ihärdig envishet att bevisa irrationalitet och transcendens. Dessutom alla dessa decimaler som beräknats, till trots att de aldrig tar slut eller upprepas.
Vi vet fortfarande inte om π är normalt till någon bas, då vi inte vet hur det ska testas. Än.

Jag vill avsluta med ett citat om just irrationaliteten till π och varför vi bryr oss så mycket om talet, oavsett om det tar slut, uppreparsig eller har praktiska användningsområden.

”What does it matter whether π is rational or irrational? A mathematician faced with [this] question is in much the same position as a composer of music being questioned by someone with no ear for music. Why do you select some sets of notes and have them repeated by musicians, and reject others as worthless? It is difficult to answer except to say that there are harmonies in these things which we find that we can enjoy. It is true of course that some mathematics is useful. [Logaritmer, differential ekvationer och linjära operationer nämns.] But the so-called pure mathematicians do not do mathematics for such [practical applications]. It can be of no practical use to know that π is irrational, but if we can know it would surely be intolerable not to know.”[45]

E. C. Titchmarsh (1981)

[45] Nahin (2006) *Dr. Euler's Fabulous Formula* s.94

Referenser

Tryckta

- Adams, R.A, Essex C (2013) *Calculus: a complete course* Pearson, Toronto

- Aubrey, J. Kempner (October 1916). *"On Transcendental Numbers".* Transactions of the American Mathematical Society (American Mathematical Society) **17**

- Bailey, H. Borwein J M, Borwein, P B and Plouffle S, *The quest for Pi,* The Mathematical Intelligencer **19** (1997), 50-57

- Besicovitch, A. S. (1935), The asymptotic distribution of the numerals in the decimal representation of the squares of the natural numbers", *Mathematische Zeitschrift* **39**

- Blatner, D (1998), *π - det fantastiska talet,* Svenska förlaget, Stockholm

- Bourbaki, N (1994). *Elements of the History of Mathematics.* Springer.

- Cantor, G (1874) *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller algebraischen Zahlen* Journal für die Reine und Angewandte Mattematik **84**

- Dunham, W (1999) *Euler – The Master Of Us All* The Mathematical Association of America, Washington

- Erdos; Dudley, Underwood (December 1943). *"Some Remarks and Problems in Number Theory Related to the Work of Euler*". Mathematics Magazine **vol. 56.**

- Jörg Arndt, Christoph Haenel (2001), *Pi – Unleashed* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York

- Nahin, P. J (2006) *Dr. Euler's Fabulous Formula* Princeton University Press, Princeton

- Niven, I (1946) *A Simple Proof that π is Irrational.* Purdue University

- Niven, I. (1939) *The Transcendece of π*. American Math Monthly **46**

- Plofker, K (2009) *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton

- Rodhe, S (2002) *Matematikens utveckling i Sverige fram till 1731* Uppsala Dissertations in Mathematics, Uppsala

- Yan, L, Shiran, D (1987) *Chinese Mathematics – A Concise Histrory* Clarendon Press, Oxford

Elektroniska

- http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/exhaustion.pdf Bill Casselman, 2003, The method of exhaustion
- http://mathworld.wolfram.com/PiDigits.html Weisstein, Eric W. "Pi Digits." From *MathWorld*--A Wolfram Web
- http://blogs.sas.com/content/iml/2015/03/12/digits-of-pi.html Rick Wicklin, 2015, Analyzing the first 10 million digits of pi: Randomness within structure
- http://www.exploratorium.edu/pi/history_of_pi/history_of_pi.pdf Exploratorium, 2013, A Brief History of π
- http://pimeariver.com/ Laurence Roberts, 2015, Pi me a River, Is the average sinuosity of the world's rivers equal to π?
- http://raaf.org/pdfs/meandering_river.pdf Hans-Henrik Stølum, 1996, River Meandering as a Self-Organization Process
- https://primes.utm.edu/notes/relprime.html Chris K. Caldwell, 2016, What is the probability that gcd(n, m)=1?
- http://www.numberworld.org/y-cruncher/ Alexander J. Yee, 2016, y-cruncher – A Multi-Threaded Pi-Program
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_chronology.html J J O'Connor J. J, Robertson E.F, 2000, A chronology of pi
- http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cantor.html O'Connor J J, Robertson, E F, 1998, Georg Cantor Biography