UPPSALA
UNIVERSITET

U.U.D.M. Project Report 2016:40

Algebraiskt tänkande i antik grekisk matematik

Leia Nordin och Erik Svensson

Examensarbete i matematik, 15 hp
Handledare: Anders Öberg
Examinator: Jörgen Östensson
September 2016

Department of Mathematics
Uppsala University

Innehåll

Författandet bakom de olika avsnitten i uppsatsen är uppdelat på följande sätt:

Leia Nordin:

- 1 Introduktion
- 2.1 Van der Waerdens definition av algebra
- 2.3 Sammanfattning
- 3.2 Grekisk matematik enligt van der Waerden

Erik Svensson:

- 2.0 Vad är algebra?
- 2.2 Ungurus definition av algebra
- 3.1 Grekisk matematik enligt Unguru
- 4 Slutsats
- Bilaga A: Abstrakt algebra

Del 1

Introduktion

År 1950 släpper matematikern och matematikhistorikern Bartel Leendert van der Waerden en bok, *Science Awakening*, som beskriver matematikens utveckling i antik tid. Genomgående i denna bok omskrivs den antika matematiken med modern notation och terminologi, med motiveringen att det ökar läsbarheten utan att riskera ge en missvisande bild av orginalresonemangen. Boken talar också om *geometrisk algebra*, och menar att antik grekisk matematik byggde till stor del på algebraiska resonemang, som de sedan översatte till geometrisk terminologi.

I synnerhet dessa aspekter av *Science Awakening* blir starkt kritiserade av historikern Sabetai Unguru i ett tal på *14th world conference on the history of science*, i augusti 1974.[1] Detta tal utvecklade Unguru till en längre artikel, som publicerades året därpå (1975) i *Archive for History of Exact Sciences*, och inledde en ganska hetsk debatt i frågan.

I sin artikel kritiserar Unguru hur matematikhistoria tradiontellt skrivs, och ifrågasätter skarpt den vedertagna uppfattningen att grekisk matematik var i grunden algebraisk, men formulerades geometriskt. Han skuldbelägger inte enbart van der Waerden, utan nämner flera historiker (bland annat Paul Tannery, Hyeronimus Georg Zeuthen och Otto Neugebauer), samt gör tydligt att i princip alla större namn i området är att beskylla, men han väljer att fokusera i synnerhet på van der Waerden.[2]

Kärnan i meningsskiljaktigheterna mellan Unguru och van der Waerden ligger i begreppet *geometrisk algebra*. Unguru (1975, s. 77) hävdar bestämt att begreppet är en självmotsägelse, och att det är både en teoretisk och historisk omöjlighet. Han presenterar en definition av algebra, och använder exempel från grekisk litteratur för att illustrera hur resonemangen där skiljer sig från algebra. Följdaktligen anser

[1]Unguru, 1975, s. 114
[2]Ibid, s. 81

Unguru att det är olämpligt att översätta antik matematik till algebraisk notation och terminologi, eftersom det blir anakronistiskt och missvisande. Genom att översätta dåtidens matematik till nutida formuleringar, menar Unguru (1975) att vi tar matematiken ur sitt historiska sammanhang och därmed tappar både information och förståelse.[3]

Van der Waerden (1976) svarar Unguru med en artikel i samma volym av journalen. I denna artikel förklarar han att han inte utgår från samma definition av algebra som Unguru, och formulerar sin egen definition (s. 199). Van der Waerden (1976, s. 205) menar också att Unguru överdriver symbolernas inflytande i matematiken, och att översättandet till modern notation inte behöver ge en skev bild av antik matematik. Vidare motiverar han i artikeln varför han upplever att grekisk matematik måste ha utgått ifrån ett algebraiskt tänkande, bland annat med stöd av ett antal exempel från *Elementa*.

Det är inte enbart van der Waerden som väljer att ge en replik på Ungurus artikel. Hans Freudenthal (1976) och Andre Weil (1978) skriver var sin artikel där även de bemöter kritiken, och försvarar uppfattningen att den grekiska matematiken var algebraisk. Det dröjer dock länge innan Unguru ger ett svar (1979), och när det väl kommer genererar det inga fler repliker från hans meningsmotståndare.

I den här uppsatsen kommer vi försöka reda ut några av de argument som läggs fram av Unguru och van der Waerden. Vi kommer att granska deras respektive inställningar till vad som är algebra, och undersöka hur den antika grekiska matematiken förhåller sig till dessa olika synsätt. Det är vår förhoppning att detta ska ge en ökad klarhet även i frågan huruvida Unguru gör rätt i att kritisera användningen av modern notation och terminologi i matematikhistoriska texter.

[3] Bland annat uttrycks detta på s. 86, s. 99-100 och s. 103-105

Del 2

Vad är algebra?

För att få någon klarhet i frågan huruvida den antika grekiska matematiken var algebraisk är det nödvändigt att först söka en definition av själva begreppet algebra, eller åtminstone formulera några drag som karaktäriserar just algebraisk matematik. I sina respektive debattinlägg berör både van der Waerden och Unguru ämnet, och nämner ett par kriterier för vad de anser kan kallas algebraisk matematik, men vi finner att definitionerna inte bara skiljer sig i synen på vilka egenskaper algebra har, utan det blir tydligt att de försöker definiera två fundamentalt olika koncept. Innan vi undersöker deras respektive definitioner bör vi därför reflektera över vad det egentligen är vi försöker definiera.

Vad innebär det att definiera algebra?

När vi talar om att definiera algebra så rör det sig inte om att konstruera ett nytt koncept, utan att formulera ett redan befintligt koncept. Med andra ord förutsätter vi att vi redan har någon slags intern, men oformulerad, uppfattning av vad ordet algebra betyder, samt en intuitiv förmåga att (möjligen inkonsekvent och osäkert) klassificera matematiska resonemang som antingen algebraiska eller icke-algebraiska. En sådan uppfattning kan till exempel uppstå hos oss, om vi under vårt liv får vissa matematiska företeelser utpekade som algebraiska, och omedvetet uppfattar ett mönster. Tids nog lär vi oss då att klassificera även nya företeelser, beroende på om vi uppfattar att de passar i det mönstret. Utan att någonsin ha kommit i kontakt med, eller försökt formulera, en definition, har vi då utvecklat en känsla för vad begreppet betyder.

Formulerandet av en definition är ett försök att bestämma och beskriva de egenskaper som vi omedvetet söker efter när vi klassificerar något som algebraiskt eller inte. Syftet med att formulera en definition kan vara att förmedla vår intuitiva uppfattning till andra som eventuellt har en annan (eller ingen) uppfattning, och därmed undvika kommunikationsproblem. Ett annat syfte kan vara att studera den intuitiva uppfattningen för att göra den tydligare.

När Unguru och van der Waerden skriver om ämnet har de tydligt två mycket olika uppfattningar, som de försöker konkretisera och formulera i en definition. Vi kommer se att van der Waerden ser algebra som ett specifikt område inom matematiken, som kännetecknas av vilka problem som löses och vilka metoder som används. Vi kommer även se att för Unguru så representerar begreppet algebra snarare ett sätt att se på matematik, som kännetecknar ett relativt modernt stadium i matematikens utveckling.

Detta innebär att van der Waerden driver sin tes i huvudsak genom att peka på likheter i problemformuleringar och metoder, medan Unguru istället argumenterar genom att påvisa skillnader mellan antik matematik och det som långt senare utvecklades ur den. Även om Ungurus definition uppfylls i synnerhet av den matematik som till exempel skulle ingå i en modern algebrakurs på universitetsnivå, jämfört med andra matematiska grenar, så är det inte i första hand den gränsdragningen som är syftet.

Hur bedömmer vi hur lyckad en definition är?

Ifall vi formulerar en definition av algebra, så ser vi den som misslyckad ifall den inte överensstämmer med vår intuitiva begreppsuppfattning. Ifall vi intuitivt uppfattar att ett visst matematiskt område är algebraiskt, men finner att det ändå inte uppfyller våra de definierande egenskaper vi formulerat, då är vår definition inte en bra modell för det intuitiva konceptet. På samma sätt är vår definition misslyckad ifall sådant vi uppfattar som oalgebraiskt ändå uppfyller definitionen.

2.1 Van der Waerdens definition av algebra

I sin bok *Science Awakening* (1975), som Unguru riktar sin kritik emot, menar van der Waerden att algebra återfinns i bland annat antik grekisk och babylonisk matematik, men gör ingen ansats att riktigt beskriva vad han menar med begreppet. Det är först i sitt svar till Unguru som han formulerar en definition:

> *[Algebra is] the art of handling algebraic expressions like* $(a+b)^2$ *and of solving equations like* $x^2 + ax = b$.[1]

[1] van der Waerden, 1976, s. 199

Han motiverar denna definition med att det är vad begreppet har betytt historiskt, när det använts av al-Khwarizmi och Cardano, samt att det överensstämmer med dagens skolalgebra.[2]

2.1.1 Vad är ett algebraiskt uttryck?

För att förstå van der Waerdens definition måste vi få klarhet i vad de begrepp han använder betyder. Då han inte själv går in på någon närmare förklaring, får vi leta på annat håll. Ordboken *Dictionary of Science and Technology* definierar *algebraic expression* på följande sätt:

> *"...an expression formed by performing a finite number of algebraic operations (addition, subtraction, multiplication, division, and raising to a rational power) on formal symbols."*[3]

Enligt van der Waerden krävs det dock inte några formella symboler för att matematik ska vara algebraiskt, utan han tycks mena att det är innehållet som är avgörande. Även om ett uttryck eller en ekvation beskrivs i naturligt språk, utan några som helst symboler, så verkar han mena att de kan vara algebraiska till sin natur. Till exempel menar van der Waerden (1975, s. 119) att det inte behöver vara någon skillnad på att skriva "kvadraten med sidan a" och a^2. På samma sätt anser han att modern symbolism inte är något väsentligt olikt de geometriska diagram som han menar att grekerna istället använde för att illustrera algebraiska begrepp och påståenden.

Ett lätt modifierad definition av begreppet låter vi därför vara att ett algebraiskt uttryck är något vi kan forma från kända eller okända storheter med hjälp av elementära operationer.

Att *hantera* algebraiska uttryck får vi förmoda innebär att manipulera dem enligt vissa tillåtna regler. Exakt vilka regler som tillåts får dock skilja sig från modern matematik och grekisk, eftersom den moderna matematiken tillåter uttryck som inte är väldefinierade i grekisk matematik. Till exempel är uttrycket a^4 helt naturligt med modern algebra, men representerar ett omöjligt, fyrdimensionellt objekt för den som försöker tolka det geometriskt. Det är inte heller uppenbart vad $x^2 + 2$ betyder, ifall vi tolkar det som summan av en kvadrat och ett linjesegment.

[2] Ibid, s. 199

[3] Morris, 1992a

2.1.2 Vad innebär det att lösa ekvationer?

Enligt samma ordbok som tidigare definieras begreppet ekvation som "*a mathematical statement of equality between two expressions*".[4]

I van der Waerdens definition talar han om ekvationer som $x^2 + ax = b$, men det är oklart exakt vilka klasser av ekvationer som han avser. Nästan uteslutande talar han dock senare om linjära och kvadratiska ekvationer, så vi får anta att det åtminstone i första hand är sådana han menar.

Ifall vi tolkar van der Waerdens definition ordagrant, så verkar det som att lösningsmetoden inte alls påverkar ifall ekvationslösning är algebraiskt. Så länge vi lyckas bestämma värdet på de okända storheter som förekommer i ekvationen, så är det algebra även om vi finner det genom att göra ett stort antal gissningar, eller om vi använder rent numeriska metoder, vilket antagligen många skulle invända emot. När van der Waerden senare i samma artikel avhandlar frågan om babylonierna löste algebraiska problem, så är han dock noga med att påvisa att deras metod var samma som den vi använder idag.[5] Vi förmodar därför att han ser tillvägagångssättet som mer relevant än vad han explicit formulerat, och att det är just likheten med moderna lösningsmetoder som får honom att kalla den grekiska matematiken algebraisk.

Exakt vad som är en algebraisk lösningsmetod kan dock vara svårt att avgöra. Vad är det som gör att vi tvekar att kalla till exempel rent numeriska metoder, eller rena gissningar, för algebra? Något som kan ses som en väsentlig skillnad är att dessa enbart evaluerar olika värden på okända, men låter ekvationen stå orörd, till skillnad från andra tillvägagångssätt, där ekvationen skrivs om och manipuleras.

Vi förmodar att det är den typen av manipulation som kännetecknar en algebraisk lösningsmetod även i van der Waerdens ögon, dels eftersom det är vad som lärs ut i skolan (vilket van der Waerden (1976) vid flera tillfällen tar upp som betydelsefullt[6], och dels för att det passar det exempel han använder för att påvisa att babylonisk algebra uppfyller hans definition.

2.1.3 Problem med definitionen

Ett problem med den definition som van der Waerden uttrycker är att den är väldigt ospecifik, vilket är anledningen till att vi tvingats göra några kvalificerade gissningar kring vad han mer exakt menar, baserat på hans resonemang och ståndpunkter.

[4] Morris, 1992b
[5] van der Waerden, 1976, s. 200-201
[6] t.ex. på s. 199 och 201

Det verkar inte vara meningen att definitionen han anger ska tolkas särskilt strikt. Hans argumentation som helhet gör det tydligt att algebra, enligt honom, inte behöver behandla explicita ekvationer eller algebraiska uttryck, i ordagrann bemärkelse, så länge de resonemang som förs är väsentligen lika hur vi skulle lösa problemen genom till exempel symbolisk manipulation.

På det stora hela verkar van der Waerden inte ha ambitionen att formulera en noggrann definition, utan vilar sin argumentation på förutsättningen att konceptet redan är känt för oss som läsare. Vi föranleds att tro detta när han i *Science Awakening* inte gör någon ansats att definiera algebra. När han sedan, i replik till Unguru (som uppenbart inte delar hans uppfattning), gör en ansats att specificera vad han menar, så undviker han att formulera en noggrann definition, utan förtydligar mest att han menar algebra i den bemärkelse vi lär oss i skolan, till synes utan att ifrågasätta ifall det finns en tydlig och gemensam uppfattning av vad det i sin tur innebär.

När van der Waerden (1976, s. 203) redogör för varför han menar att antika matematiker hade ett i grunden algebraiskt tankesätt så argumenterar han att de åtminstone delvis tänkte i algebraiska termer, och att de förde resonemang som väsentligen liknar de vi för idag, men att de valde att använda en geometrisk notation. Det finns åtminstone två problem med detta: För det första är det svårt att avgöra vilka tankegångar som ligger bakom en text som uttrycker något annat, och för det andra så är det oklart och subjektivt vad som gör två resonemang väsentligen lika.

Ett eventuellt ytterligare problem med van der Waerdens definition är att den riskerar att vara så inkluderande att begreppet algebra blir meningslöst att tala om. Såsom han formulerar definitionen, och argumenterar kring den, så är det svårt att hävda att den inte inkluderar i princip all modern matematik. Det är i sig inte orimligt att mena att väsentligen all matematik idag genomsyras av ett algebraiskt tankesätt, men eftersom van der Waerden även menar att mer eller mindre all antik matematik var algebraisk, så kan det finnas anledning för honom att söka en något snävare definition.

Slutligen saknar van der Waerdens definition en tillfredsställande koppling till den matematiska gren som idag kallas algebra (eller *abstrakt algebra*). Det finns inget i definitionen som ger just den delen av matematiken en särställning gentemot andra moderna grenar. Det är heller inte orimligt att tolka hans definition på ett sätt som rentav exkluderar abstrakt algebra[7]. Det vore önskvärt att en definition av begreppet algebra lyckas sammanlänka det vi kallar skolalgebra och algebra på en högre nivå, på ett sätt som ger klarhet i varför de delar namn.

[7]Se Bilaga A för exempel.

2.2 Ungurus definition av algebra

Några år innan Unguru skriver sin artikel i ämnet så publicerar historikern Michael S. Mahoney en uppsats, *Die Anfänge der algebraischen Denkweise im 17. Jahrhundert* (1971), som avhandlar algebrans framväxt under 1600-talet och kontrasterar det nya tankesättet med den grekiska geometrin.

För att försöka karaktärisera algebraiskt tänkande hänvisar Unguru till en definition från Mahoneys uppsats, som listar tre kännetecknande egenskaper. Unguru sammanfattar dessa som följer:

> *1. Operational symbolism;*
>
> *2. The preoccupation with mathematical relations rather than with mathematical objects, which relation determine the structures constituting the subject-matter of modern algebra. The algebraic mode of thinking is based, then, on relational rather than on predicate logic;*
>
> *3. Freedom from any ontological questions and commitments and, connected with this, abstractness rather than intuitiveness.*[8]

Vi kommer framöver att studera dessa tre egenskaper dels var för sig, och dels hur de hör ihop med varandra.

2.2.1 Operationell symbolism

Mahoney menar att operationell symbolism är en speciell sorts symbolism, där symbolerna är mer än enbart etiketter på matematiska objekt:

> *[T]his mode of thought is characterized by the use of an operative symbolism, that is, a symbolism that not only abbreviates words but represents the workings of the combinatory operations, or, in other words, a symbolism with which one operates.*[9]

Den enklaste typen av symbolism, att till exempel kalla ett givet linjesegment för A, utgörs i grund och botten bara av språklig förkortningar, och det underlättar sannolikt den matematiska kommunikationen, men det påverkar i sig självt inte vårt tankesätt i en betydande omfattning. När vi behandlar A är det just vårt givna linjesegmentet som behandlas, inte ett generiskt och helt abstrakt linjesegment,

[8] Unguru, 1975, s. 77
[9] Mahoney, 1971

och än mindre symbolen A i sig. Denna typen av symbolism kallar vi därför icke-operationell.

Vi kontrasterar detta mot ett modernare tankesätt, till exempel när vi löser en mycket enkel andragradsekvation:

$$x^2 = 5$$

Som modern matematiker löser vi detta utan eftertanke genom att dra kvadratroten ur båda leden och erhålla lösningen $x = \pm\sqrt{5}$. När vi läser x^2 så föreställer vi oss inte ett tal multiplicerat med sig självt (än mindre att det är arean av en kvadrat med sidan x), utan vad vi ser är att den relevanta symbolen x är manipulerad på ett visst sätt, och vi tillämpar därför en cancellerande operation. Det känns inte orimligt att påstå att vi snarare opererar på exponenten än på talet x^2.

I modern ekvationslösning, där vår symbolism är operationell, betraktar vi ekvationen inte bara som en effektiv notation av ett matematiskt påstående, utan som ett matematiskt system i sin egen rätt, där vi manipulerar symbolerna enligt vissa typografiska regler, för att förvandla ett uttryck till ett annat. Fokuset ligger inte på de objekt eller storheter som symbolerna representerar, utan snarare de operationer som de är associerade med i våra symboliska uttryck.

Mahoney (1971) nämner modern integralkalkyl som ett exempel på hur vår moderna symbolism är operationell. Vid lösandet av en integral reflekterar vi ofta ganska lite över hur den funktion vi integrerar ser ut grafiskt, utan vi intresserar oss mest för hur det uttrycks symboliskt, och tillämpar sedan lämpliga regler. Vi manipulerar alltså inte det som symbolerna representerar (även om det i någon mening sker bakom kulisserna), utan vi manipulerar symbolerna i sig.

2.2.2 Fokus på matematiska relationer

Enligt Mahoney så kännetecknas ett algebrasikt tankesätt av att det lägger ett större fokus på relationer mellan matematiska objekt än på objekten själva:

> *[P]recisely because of the central role of combinatory operations, the algebraic mode of thought deals with mathematical relations rather than objects. Even when certain relations become themselves objects, say the set of group morphisms, one seeks the relations that link these new objects. The subject of modern algebra is the structures defined by relations, and thereby one may note as a corollary that the algebraic*

> *mode of thought rests more on a logic of relations than on a logic of predicates.*[10]

Ekvationsbegreppet, som i grunden handlar just om relationen mellan olika storheter, tycks vara något som Mahoney ser som en kritisk del av algebrans framväxt. Utöver att ekvationer i sig är relationer så återfinns även det synsättet även i matematiken kring dem, menar han: Hur vi studerar och löser ekvationerna bygger på att se relationen mellan ekvationer och deras lösningar, samt hur olika ekvationers lösningar står i relation till varandra[11].

Även funktionsbegreppet behandlar just hur variabler står i relation till varandra, och är liksom ekvationer en central del av det moderna och algebraiska tankesättet i matematik.

Mahoney menar att ekvationsteorins framväxt innebar, eller åtminstone kännetecknar, ett skifte i det matematiska tankesättet, som bland annat tog sig form i att relationell logik började ta större plats än predikatlogik. Detta algebraiska särdrag är intressant, eftersom det blir en slags skiljelinje inte bara mellan modern matematik och grekisk, utan också mellan olika grenar av modern matematik.

Den matematiska gren som vi idag kallar algebra (eller *abstrakt algebra*) kännetecknas av att den ser förbi de matematiska objekt som behandlas, och istället studerar deras strukturer[12]. En modern algebraiker arbetar med att abstrahera och generalisera till den grad att enbart objektens inbördes relationer återstår, i form av vad vi kallar *algebraiska strukturer*. Vidare studeras hur dessa strukturer står i relation till varandra, inte minst inom kategoriteori, som Mahoney nämner som typexempel[13].

Detta fokus på relationer är mindre centralt i *analysen*, där predikatlogik istället tar mer plats. Ett särskilt tydligt exempel på detta kan vara *epsilon-delta-definitionen* av gränsvärden.

Vare sig historiskt eller idag behöver det dock vara så att det finns några skarpa gränser att dra, utan snarare handlar det om att bedömma vart fokuset i huvudsak ligger. Studerandet av relationer är knappast något som är förbehållet den abstrakta algebran, utan är något som förekommer i tämligen stor utsträckning inom alla matematiska grenar.

[10] Mahoney, 1971
[11] Ibid
[12] Se Bilaga A för exempel.
[13] Ibid

2.2.3 Ontologiskt oberoende

Den tredje karaktäriserande egenskapen för algebraiskt tänkande, som Mahoney listar, är att matematiken inte ska vara bunden till att korrekt representera den fysiska världen, eller att överensstämma med någon mänsklig inuition:

> *[T]he algebraic mode of thought is free of ontological commitment. Existence depends on consistent definition within a given axiom system, and mutually compatible mathematical structures live in peaceful co-existence within mathematics as a whole. In particular, this mode of thought is free of the intuitive ontology of the physical world. Concepts like "space", "dimension", and even "number" are understood in a purely mathematical sense, without reference to their physical interpretation. In this respect, the algebraic mode of thought can be characterized as an abstract mode of thought, in contrast to an intuitive one.*[14]

För att matematiken ska vara fullt algebraisk, enligt Mahoney, krävs det att den endast begränsas av sina egna uppsatta axiomsystem. De slutsatser vi når ska inte avfärdas för att de strider mot vår uppfattning av den fysiska världen, mot vår intuition, eller ens mot andra delar av matematiken. Dessutom ska objekten inte ha några egenskaper utöver de som formellt definieras, och kan därmed inte kräva någon intuitiv tolkning.

Vilka objekt vi behandlar i modern matematik, liksom de sätt vi opererar på dem, är till stor del frikopplat från såväl intuition som världslig fysik. I stor omfattning arbetar den moderna matematikern med helt abstrakta objekt, som är svåra (eller rentav omöjliga) att ge en fysikalisk eller intuitiv tolkning.

Inom modern matematik syns detta kanske tydligast i den abstrakta algebran. Istället för att studera exempelvis heltal, som rotar sig i en intuitiv uppfattning av storheter, så studerar vi någon väl vald algebraisk struktur, som är mer generell och fullständigt abstrakt. Allt vi bevisar som en konsekvens av strukturens axiom gäller då inte bara för heltalen, och de tillhörande heltalsoperationer, utan för allt som uppfyller axiomen. Att vi inte arbetar med någon given klass av objekt, eller några specifika operationer, utan bara studerar de logiska konsekvenserna av axiomen, garanterar oss precis den ontologiska frihet som Mahoney beskriver.

Abstrakta tal

Den operationella symbolism som kännetecknar modernt matematiskt tänkande kan förmodas vara en bidragande faktor till att matematiken utvecklats till att behandla allt mer abstrakta koncept.

[14] Mahoney, 1971

Historiskt ser vi att skiftet till en mer operationell symbolism sammanföll med en förändrad syn på tal, där till exempel *negativa tal* fick en allt mer accepterad roll i matematiken, för att till slut bli helt oumbärliga. Negativa tal är inte ett helt främmande koncept i tidigare matematik. Diofantos talar om ekvationer med negativa lösningar, och kallar dem *absurda*[15], och får medhåll från åtskilliga namnstora matematiker, ända inpå 1600-talet[16].

Negativa tal, såsom vi ser på dem idag, existerar för att de uppfyller en roll i den symboliska algebran. De *naturliga talen* svarar mot det intuitiva konceptet antal, och *reella tal* svarar mot en inuition kring kontinuerliga storheter (till exempel längder), medan negativa tal inte är något vi lika enkelt kan föreställa oss, utan de är en abstrakt konstruktion där $-x$ helt enkelt är det tal som uppfyller att skillnaden upp till 0 är x. Ett negativt tal är alltså i någon mening inte en storhet, utan ett koncept som definieras av den roll den fyller i ett symboliskt uttryck.

Det går visserligen att argumentera att negativa tal inte helt saknar intuitiva tolkningar. De kan till exempel betraktas som penningskulder, eller som mått på avsaknaden av någon storhet, men de befinner sig även då åtminstone på gränslandet till det abstrakta. Dessutom är det svårt att med dessa tolkningar motivera vissa av deras symboliska egenskaper, som att produkten av två negativa tal är positiv.

I fallet med de *imaginära talen* är deras rent abstrakta natur klart tydligare. De svarar inte mot några intuitiva storheter, och är väsentligen omöjliga att beskriva annat än genom att hänvisa till deras egenskaper i symboliska uttryck. För den som aldrig har kommit i kontakt med vår operationella symbolism, så är det sannolikt inte bara svårt att beskriva och motivera de imaginära talen, utan även svårt att förklara vad det alls innebär att uppfinna nya tal.

När roten ur negativa tal dök upp i ekvationer avfärdades dessa ekvationer som absurda och meningslösa[17], inte så olikt hur de negativa talen bemöttes, men med tiden blev deras potentiella användbarhet tydligare, varpå de accepterades, trots avsaknaden av en intuitiv tolkning.

Att på detta sätt acceptera och utforska tal som saknar intuitiv eller fysikalisk tolkning är ett tydligt exempel på den ontologiska frihet som Mahoney menar kännetecknar algebran. Deras matematiska existensberättigande villkoras enbart av huruvida de är logiskt konsistenta och ifall de på något vis är användbara och intressanta.

[15]Heath, 1921, s. 462

[16]Enligt Martinez (2006, s.20 och s.21) så kallades de *absurda* av exempelvis Nicholas Chunquet och Michael Stifel, och även Blaise Pascal och Antoine Arnauld betraktar dem som orimliga.

[17]Martinez (2006, s. 22) beskriver hur exempelvis Descartes avfärdade kvadratroten av negativa tal och kallade dem *imaginära*.

2.2.4 Sammanfattning

Unguru sammanfattar kort innebörden av Mahoneys definition som följer:

> *[The algebraic way of reasoning] is completely abstract, free from dependency on perceptional, spatial considerations, it is manipulative, the entities it manipulates are themselves completely abstract, mere signs, it is analytical, functional, it possesses a universality of application missing in geometrical reasoning, and it is, at least to a certain extent, mechanical in the rules of manipulation of its symbols.*[18]

Inte bara i detta citat, utan genomgående i hans artikel, blir det tydligt att kärnan i Ungurus syn på algebraiskt tänkande är abstraktion. Algebraiska resonemang ska inte hjälpas nämnvärt av vår intuition, och inte heller begränsas av den, utan bara behandla abstrakta konstruktioner och koncept. De objekt som behandlas, och de operationer som utförs på dem, ska inte tolkas.

Detta leder bland annat till att algebran blir universellt tillämpbar, menar Unguru. Dess symboler är inte låsta till en given betydelse, utan kan representera mer eller mindre vad som helst. Symbolen för multiplikation kan vid ena stunden representera multiplikation av reella tal, men i ett annat sammanhang kan de representera matrismultiplikation eller komposition av två permutationer, och det faktum att detta inte gör någon avgörande skillnad innebär dessutom att resultaten gäller för alla dessa tolkningar samtidigt.

Det är viktigt att notera att Mahoneys definition, liksom hans och Ungurus resonemang i helhet, inte gör anspråk på att kunna dra en skarp skiljelinje mellan algebraiska och icke-algebraiska tankesätt. De tre algebraiska egenskaper Mahoney nämner är alla mer eller mindre vaga, och beskriver tendenser snarare än exaka kriterier. Det är inte orimligt att vänta sig att väsentligen all matematik i historien kommer uppfylla definitionen i någon mån.

En annan försvårande faktor är att definitionen till stor del handlar om de matematiska tankegångarna och synsättet på matematik. Vad som till exempel utmärker just en operationell symbolism, och gör den till något mer än bara en effektivare notation, ligger mer i hur användaren tänker än i själva metoderna som används. Definitionen kommer således inte låta oss med full säkerhet avgöra huruvida den klassificerar grekisk matematik som algebraisk, utan vi får nöja oss med att undersöka vilka algebraiska drag som återfinns där, och göra en bedömning av hurpass starka de dragen är.

[18] Unguru, 1975, s. 77

2.2.5 Problem med definitionen

Att Unguru väljer att utgå ifrån Mahoneys definition av algebraiskt tänkande är i sammanhanget inte helt oproblematiskt. Mahoney (1971) försöker i sin uppsats beskriva en förändring som matematiken genomgick under främst 1600-talet i Europa, vilket han själv uttrycker som övergången från ett geometriskt till ett algebraiskt tankesätt. Hans definition är just ett försök att formulera vad som särskiljer det senare tankesättet, och är alltså konstruerad med det explicita syftet att utesluta grekisk matematik.

Detta innebär dock inte att det är helt fruktlöst att undersöka frågan huruvida grekisk matematik var algebraisk enligt denna definition, eftersom det kan vara så att Mahoney missbedömt den grekiska matematiken och överskattat i vilken mån matematiken faktiskt genomgick en betydande förändring under den givna tidsperioden. Dessutom kan det oavsett ge en ökad förståelse för hur skillnaderna ser ut och hur omfattande de är.

2.3 Sammanfattning

Det är tydligt att van der Waerden och Unguru försöker formulera en definition för två olika koncept. När Unguru talar om algebra så åsyftar han ett tankesätt, som enligt honom kännetecknar ett stadium i matematikens utveckling:

> *There is (broadly speaking) in the historical development of mathematics an* arithmetical *stage (Egyptian and Babylonian mathematics) in which the reasoning is largely that of elementary arithmetic or based on empirically paradigmatic rules derived from successful trials taken as a prototype, a* geometrical *stage, exemplified by and culminating in classical Greek mathematics, characterized by rigorous deductive reasoning presented in the form of the postulatory-deductive method, and an* algebraic *stage, the first traces of which could be found in DIOPHANTOS'* Arithmetic *and in AL-KHWARIZMI'S* Hisab al-jabr w'al muqàbalah*, but which did not reach the beginning of its full potentiality of development before the sixteenth century in Western Europe;*[19]

För van der Waerden däremot så är algebraiskt tänkande något som återfinns i såväl antik som modern matematik, och kännetecknas av ekvationslösning och manipulation av matematiska uttryck. Uttrycken och ekvationerna behöver inte

[19] Unguru, 1975, s. 78

formuleras symboliskt, utan det kan även röra sig om retoriska resonemang, ifall de trivialt kan översättas till symbolisk notation.

Betydelsen av denna skillnad bör kanske inte överdrivas dock. De två definitionerna beskriver olika koncept, men de argument som framförs i de olika texterna undersöker ändå samma fråga, nämligen i vilken grad antik matematik (framför allt grekisk) liknar den moderna matematiken. Unguru har valt att definiera algebra på ett sätt som särskiljer dessa två matematikhistoriska epoker (och van der Waerden håller med om att antik matematik var oalgebraisk, givet den definitionen[20]), och van der Waerden har valt en definition som belyser likheterna.

Att enbart tala om hur väl de två definitionerna uppfylls av antik grekisk matematik, vore att missa den huvudsakliga meningsskiljaktigheten mellan van der Waerden och Unguru, som handlar om just vilka likheter och olikheter som finns mellan modern och antik matematik, och i vilken mån Unguru gör rätt i att kritisera användandet av modern notation och terminologi för att beskriva antika resonemang och problemformuleringar.

[20] van der Waerden, 1976, s. 199

Del 3

Algebra i antiken

Det finns för många matematiska verk från det antika grekland för att kunna undersöka samtliga, så vi kommer inte kunna uttala oss med säkerhet rörande förekomsten av algebraiskt tänkande i den grekiska matematiken som helhet. Vi kommer därför inrikta oss på endast *Elementa*, eftersom det är det verk som Unguru och van der Waerden talar i särklass mest om, och betrakta dess innehåll som mer eller mindre representativt för den antika grekiska matematiken.

3.1 Grekisk matematik enligt Unguru

För att avgöra i vilken utsträckning den antika grekiska matematiken uppfyller Mahoneys definition av algebra, undersöker vi inledningsvis hur den förhåller sig till definitionens tre beståndsdelar var för sig.

3.1.1 Operationell symbolism

Enligt Mahoney själv så har grekerna knappt någon symbolism, än mindre en operationell symbolism:

> *Greek mathematics almost completely lacked any symbolism, much less an operative symbolism. Even in the works of Diophantus one finds only a series of abbreviations for the purpose of saving words.*[1]

[1] Mahoney, 1971

Unguru uttrycker väsentligen samma åsikt (fast anser att det finns tidiga spår av algebra i Diofantos verk[2]), men ingen av dem ger någon närmare motivering (vilket möjligen kan ursäktas av att det ligger i sakens natur att det är svårt att ge belägg för avsaknad av någonting).

Det är oklart vad Mahoney menar när han säger att det knappt finns någon typ av symbolism i grekisk matematik. Bokstäver användes genomgående för att representera matematiska objekt av olika slag. Redan i den första propositionen i *Elementa* använder Euklides bokstäver som namn för givna punkter[3], och genomgående används sammansättningar av namn på punkter för att representera sträckor, trianglar och cirklar. Även ospecifierade tal betecknas konsekvent med bokstäver, vilket är en symbolism som möjliggör formulerandet av allmängiltiga påståenden.

Däremot finns det inte mycket annan symbolism. Inga operationer har några symboler, ej eller likhet eller några andra relationer. Proportioner mellan tal har inte heller någon symbolisk notation. Alla resonemang, liksom alla problem, beskrivs retoriskt.

För att den symbolism som faktiskt finns ska betraktas som operationell krävs det att manipulerandet av den ska ske på symbolnivå, inte på geometrisk nivå. Med andra ord, de operationer vi utför ska inte betrakas som operationer på objekten, utan på deras symboler. Ifall vi exempelvis bildar en rektangel med sidorna A och B, då ska vi inte tolka resultatet som en rektangel, utan som en representation av själva operationen. I någon mening ska det resulterande uttrycket beskriva själva rektangelbildandet av A och B, snarare än det geometriska resultatet (motsvarande hur den moderna notationen $A \cdot B$ representerar den multiplikation som utförts, snarare än ett eget tal).

I *Elementa* ser vi sällan några nämnvärda spår av denna egenskap. När Euklides till exempel multiplicerar två tal A och B, så inför han istället ett nytt tal C, och beskriver det som ”det tal som produceras av A och B”[4]. Det nya talet *är* inte produkten av A och B, och betecknas inte som en produkt av dessa, utan är det tal som *är lika med* produkten av A och B. När C har införts så beskrivs vilka egenskaper det följdaktigen har, och dess förhållande till andra objekt, men av allt att döma ses det som ett helt eget tal, snarare än ett uttryck som beror på andra tal.

Det tycks vanligare för geometriska figurer än för tal att de operationer som utförs inte bildar nya objekt, med egna namn. Proposition II.7 är ett bra exempel på detta:

[2] Unguru, 1975, s. 78
[3] Heath, 1908a, s. 241-242
[4] Exempel på detta finns i Proposition VII.16 och VII.24. Heath (1908b, s. 316 och s. 326) kommenterar detta ur översättningssynpunkt.

> *If a straight line be cut at random, the square on the whole and that on one of the segments both together are equal to twice the rectangle contained by the whole and the said segment and the square on the remaining segment.*[5]

Euklides börjar beviset med att specifiera linjen och punkten:

> *For let a straight line AB be cut at random at the point C; I say that the squares on AB, BC are equal to twice the rectangle contained by AB, BC and the square on CA.*[6]

Påståendet består av en likhet mellan två storheter. Den första storheten uttrycks som en summa av sina två beståndsdelar, och dessa två beståndsdelar är kvadrater, som även de uttrycks i termer av vad som bildat dem. Den andra storheten uttrycks som summan av en rektangel (uttryckt i termer av vad den konstuerats utifrån) och kvadraten som bildas av ett specifikt linjesegment.

Vi har med andra ord ett antal atomära termer (AB, BC och CA), och påståendet uttrycker likhet mellan två sätt att operera på dem. Undantaget att AB hade kunnat skrivas som summan av AC och BC, och därför inte är helt atomär, så visar uttrycken de bakomliggande operationerna.

Detta gäller i variande grad genom hela beviset. Rektangeln som bildas av AB och BC benäms vid flera tillfällen just i termer av sina beståndsdelar, trots att den enkelt kunde ges ett eget namn i diagrammet.

Det finns däremot andra exempel i beviset på det motsatta, där till exempel sammansättning av två rektanglar ges ett eget namn, som döljer hur den formats.

Med andra ord finns det spår av något som kan liknas vid en operationell symbolism, fast på retorisk form, men det sker inte konsekvent.

Slutsats

Det råder inget tvivel om att grekisk matematik hade en mycket begränsad symbolism, som väsentligen bara namngav objekt av olika slag, men inget annat. Att den skulle ha någon renodlad operationell symbolism kan vi därmed direkt utesluta.

[5] Heath, 1908a, s. 388

[6] Ibid, s. 388

Vi frågar oss därför istället hur viktiga just symbolerna är.[7] Syftet med Mahoneys definition av algebra tycks vara att beskriva ett visst tankesätt, så just symbolerna behöver inte vara det centrala, utan viktigare är på vilket sätt de får användaren att betrakta och angripa matematiken annorlunda. Ifall samma effekt skulle kunna uppnås med retorisk matematik, utan formella symboler, så kan det rimligen sägas vara tillräckligt för att den matematiken ska ses som algebraisk (eller åtminstone ha starka algebraiska drag).

Det som enligt Mahoney och Unguru är effekten av en operationell symbolism är att de matematiska objekt som behandlas hamnar i skymundan, och istället manipulerar vi påståenden om dem utan att tolka vad dessa manipulationer innebär för objekten, och utan att tolka resultaten som egna objekt. Just avsaknaden av tolkning är centralt, och gör att vi stannar helt i ett abstrakt system.

Även om det förekommer att Euklides bildar uttryck där själva formen beskriver de operationer som utförts för att nå dit, så finns det inget mycket som tyder på att han därför tolkade dem i mindre omfattning. Den grekiska matematiken arbetar tveklöst med ständig tolkning av såväl objekten som de operationer som utförs på dem, vilket inte minst syns i de geometriska diagram som är ständigt närvarande för att illustrera vad som sker.

3.1.2 Fokus på matematiska relationer

Vi kan naturligtvis inte kvantifiera hur stort fokuset är på matematiska relationer jämfört med de matematiska objekten, men vi kan konstatera att relationer åtminstone spelar en betydande roll för den grekiska matematiken.

I Bok I av *Elementa* talar Euklides om likhet på ett sätt som ger associationer till ett modernt synsätt på ekvationer:

> *If equals be added to equals, the wholes are equal. If equals be subtracted from equals, the remainders are equal.*[8]

Även andra egenskaper hos likhet används på diverse ställen i *Elementa*. Till exempel konstaterar Euklides i Proposition I.34 att två trianglar, som var för sig utgör hälften av två lika parallelogram, måste vara lika varandra.[9]

Längdförhållandet mellan två linjesegment, samt areaförhållandet mellan geometriska figurer, beskriver en relation mellan två linjesegment eller figurer, och är något

[7] Egentligen borde vi kanske fråga oss om symbolbegreppet i själva verket handlar om något djupare än principen att ersätta ord med abstrakta tecken, men det är en större fråga som skulle behöva ett helt eget kapitel.

[8] Heath, 1908a, s. 155

[9] Ibid, s. 323-324

som förekommer genomgående i *Elementa*, inte minst i Bok V och VI, där de utgör huvudtemat.

Relationer förekommer dock inte i samma omfattning, och inte på samma sätt, som i modernare matematik. Funktionsbegreppet existerar inte, och när samband uttrycks mellan storheter så tycks sambandet alltid ses som symmetriskt, olikt hur vi idag talar om att en variabel kan bero på en annan.

Det finns utan tvivel mycket intressant att säga om denna skillnad, men det är oklart vad den indikerar i frågan om den grekiska matematikens fokus. Något som säger oss något tydligare om detta fokus är vilka typer av problem som grekerna försökte lösa.

Konstruktionsproblem

Det finns två typer av propositioner i *Elementa*. Den ena kategorin av propositioner består av påståenden. Dessa formulerar och bevisar något allmängiltigt. Den andra kategorin av propositioner formulerar istället en uppmaning att lösa ett visst problem.

I samtliga propositioner i den andra kategorin så efterfrågas någon form av konstruktion. De geometriska problemen handlar om att konstruera linjer, punkter eller figurer med vissa givna egenskaper, och andra problem handlar exempelvis om att finna den största gemensamma delaren till två givna tal.

Ett illustrerande exempel är Proposition II.11:

> *To cut a given straight line so that the rectangle contained by the whole and one of the segments is equal to the square on the remaining segment.*[10]

Enligt van der Waerden (1976, s. 207) så är detta ekvivalent med att lösa ekvationen $x^2 + ax = a^2$, men vi finner att lösningarna är av mycket olika natur. Med moderna metoder skulle vi lösa ekvationen genom att göra ett par omskrivningar, och steg för steg nå ett enklare påstående som är logiskt ekvivalent. Vi talar inte om någon konstruktion av en punkt, utan bara om tautologiskt ekvivalenta påståenden. Snarare än att studera några objekt så studerar vi hur olika ekvationers lösningsmängder står i relation till varandra.

När Euklides löser problemet gör han istället en konstruktion. Den givna linjen förmodas existera, och med hjälp av ett antal konstruktionssteg visar han existensen av andra geometriska objekt, tills han konstruerat en punkt som uppfyller det sökta

[10]Ibid, s. 402-403

sambandet. Ifall vi ser ekvationslösningen som en serie av tautoligiska ekvivalenser, så motsvarar Euklides lösning snanare en serie implikationer av en enkel, given sanning. Existensen av en given linje implicerar existensen av andra objekt med andra egenskaper, och det rör sig således om ett tydligt predikatlogiskt resonemang.

I ekvationslösningen av problemet är begreppen *sanning* och *existens* meningslöst, det är bara relationen mellan ekvationer som betyder något. Den ursprungliga ekvationen ses inte som ett påstående med ett sanningsvärde, och inte heller reduceras den genom omskrivningar till något sant eller falskt. Allt handlar om de tautologiska ekvivalenser som beskriver olika ekvationers relationer till varandra.

3.1.3 Ontologiskt oberoende

Enligt såväl Mahoney (1971) som Unguru (1975, s. 77) så vilar den antika grekiska matematiken alldeles för tungt på en intuitiv grund för att kunna kallas ontologiskt oberoende. De geometriska objekt som studeras, liksom de operationer som utförs, är lånade från den fysiska världen, och resonemangen är tydligt avsedda att visualiseras, vilket inte minns märks på de geometriska diagram som genomgående utgör en del av presentationen.

Vad som är avgörande är dock inte ifall de matematiska objekt som studerades har en intuitiv motsvarighet, utan i vilken utsträckning de abstrakta representationerna av objekten behandlas och betraktas som självständiga. Vi frågar oss därmed ifall de matematiska objekt som grekerna studerade hade egenskaper utöver vad som formulerades i definitionerna, eller om de existerar och används helt och hållet isolerat i en abstrakt tankevärld.

Att grekerna gör intuitiva visualiseringar av sina matematiska objekt, bland annat genom att illustrera dem i geometriska diagram, säger i sig inte mycket om huruvida deras matematik var ontologiskt oberoende. Det avgörande är om resonemangen förutsätter en sådan visualisering.

För att helt uppnå den ontologiska frihet som Mahoney beskriver, måste de begrepp som används i matematiken vara helt primitiva begrepp. Vilka namn som används ska vara obetydligt, för någon tolkning av dem ska inte förutsättas.

Geometriska objekt

När Euklides definierar de mest grundläggande geometriska objekten, i Bok I, så utgår han ifrån ett antal begrepp som antyder att objekten inte bara kan visualiseras som rumsliga företeelser utan att det är en del av deras natur.[11] Definition 2 säger

[11] Heath, 1908a, s. 153-154

till exempel att en linje är en längd utan bredd, men varken längd eller bredd ges en definition.

På liknande sätt utgår nästan samtliga definitioner i Bok I från en intuitiv, fysikaliskt inspirerad, tolkning av de beskrivna objekten. Vad som utgör likhet mellan geometriska objekt, liksom hur de kan jämföras i storlek, beskrivs aldrig men används regelbundet.

Alla de geometriska objekt som används i *Elementa* är abstraktioner och idealiseringar av fysiska företeelser. De är knappast avsedda att ses som rent primitiva begrepp, och vare sig definitionerna eller propositionerna går att förstå utan att tolka objekten som att de har en rumslig utsträckning.

Heltal och antal

I Bok VII i *Elementa*, så definierar Euklides tal. De beskrivs där som ett antal enheter, och motsvarar vad som idag skulle kallas *positiva heltal*. En enhet definieras något otydligt:

> *An* ***unit*** *is that by virtue of which each of the things that exist is called one.*[12]

I några propositioner där enheten nämns representeras den i de tillhörande diagramen som ett linjesegment. De övriga talen representeras som längre linjer, som är sammansättningar av ett antal enheter.

Euklides använder dessutom geometrisk terminologi för att beskriva ett antal olika talbaserade koncept. Bland annat definerar han ett kvadrattal som ett tal multiplicerat med sig själv.[13]

Det är dock inte bara i terminologin och i illustrationerna som kopplingar görs till geometrin. Till exempel används Proposition II.2[14] och II.4[15], som båda handlar om ren geometri, i beviset till Proposition IX.15[16], som handlar om tal. Produkten av två tal behandlas i beviset som geometriska rektanglar, men att denna geometriska tolkning är legimitim motiveras inte formellt, utan Euklides verkar utgå ifrån att parallellen är intuitivt uppenbar.

Vid andra tillfällen (betydligt oftare) betraktar Euklides produkten av två tal inte som en rektangel, utan istället som ett större tal (eller en längre linje), vilket stämmer bättre överens med hans formella definition av multiplikation (Definition VII.15):

[12] Heath, 1908b, s. 277
[13] Ibid, s. 278
[14] Heath, 1908a, s. 376
[15] Ibid, s. 379
[16] Heath, 1908b, s. 404-405

> *A number is said to* ***multiply*** *a number when that which is multiplied is added to itself as many times as there are units in the other, and thus some number is produced.*[17]

Värt att notera är att additionen som nämns här aldrig formellt definieras. Den formella definitionen av multiplikation utgår istället från en addition som tycks existera på en metamatematisk nivå, på samma sätt som definitionen av tal utgår från att vi kan resonera kring antal av enheter. När Euklides beskriver att talet A består av ett antal enheter, så är detta antal inte ett tal i samma bemärkelse som A. Detta basala antalskoncept, som behövs för att förstå talen och som används i vissa av bevisen, beskrivs aldrig formellt.

När Euklides resonerar kring tal så vilar allting på en i grunden informell och intuitiv uppfattning av antal och hur dessa kan adderas till varandra. Tal är inte ett primitivt begrepp i *Elementa*, och talen besitter egenskaper som existerar utanför de formella definitionerna. Exempel på detta är de ovannämnda geometriska egenskaperna, eller det faktum att oändliga minskande kedjor av tal är omöjliga, som Euklides använder i Proposition VII.31:

> *For, if it is not found, an infinite series of numbers will measure the number A, each of which is less than the other: which is impossible in numbers.*[18]

Varför detta är en omöjlighet hos tal motiverar Euklides inte, så beviset kräver en intuitiv tolkning av talkonceptet, vilket visar att det inte är ontologiskt oberoende av vår intuitiva uppfattning av antal.

Det kan emellertid hävdas att konceptet antal, tillsammans med vissa av dess mest grundläggande egenskaper, är snarare att betrakta som ett metamatematiskt verktyg än ett eget matematiskt koncept. Det är först i väldigt modern tid, om någonsin, som matematiken inte använt åtminstone de mest basala egenskaperna hos antal för att bevisa grundläggande satser om de naturliga talen.

Proportioner

När Euklides definierar proportioner, i början av bok V, så beskrivs de med en relativt abstrakt formulering:

> *A* ***ratio*** *is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind.*[19]

[17] Ibid, s. 278
[18] Ibid, s. 332
[19] Ibid, s. 114

En förståelse förutsätts för storheters mått, samt vad det innebär att storheter är av samma typ, men i övrigt märks en skillnad mot tidigare definitioner, i det att relationens natur lämnas obeskriven (och utan antydan om att en intuitiv tolkning förväntas av läsaren). Denna skillnad förstärks av senare definitioner, där till exempel likhet på proportioner definieras formellt (vilket aldrig görs för tal eller geometriska objekt). Även en ordningsrelation definieras formellt mellan dem i Definition V.7[20].

Värt att notera är att förhållandet mellan olika storhetstyper kan jämföras med varandra, även om de enskilda proportionerna inte kan definieras på olika typer. Det vill säga, förhållandet mellan två rektanglar kan jämföras med förhållandet mellan två linjesegment. Proportioner behandlar storheters förhållanden till varandra i allmänhet, och gör på så sätt en slags abstraktion av olika typer av storhetsmått.

Resonemangen som förs kring proportioner är väldigt formella. De egenskaper som används hos dem utgår från de formella definitionerna, och även intuitivt uppenbara påståenden ges fullständiga bevis. Ett bra exempel är den intuitivt självklara Proposition V.7, där Euklides visar att om storheterna A och B är lika, då är deras förhållanden till en tredje storhet lika.[21]

Proportionsbegreppet förutsätter en viss förståelse för mått på storheter, och hur vi utför elementär aritmetik på dessa, med detta sker enbart i definitionerna. Närhelst proportionsbegreppet tillämpas, eller någon egenskap hos dem bevisas, så tycks resonemangen utgå helt från dessa definitioner. Kort sagt framstår proportioner som helt abstrakta relationer som definieras på storheters mått, med egenskaper som är precis de som beskrivs i definitionerna. Det tycks med andra ord röra sig om ett helt primitivt begrepp, och är därmed ontologiskt självständigt.

Slutsats

Större delen av de objekt som behandlas i *Elementa* kan svårligen kallas ontologiskt oberoende. De rent geometriska objekten går inte att behandla som primitiva begrepp, utan kräver en rumslig tolkning. Deras egenskaper begränsas inte till vad som beskrivs i definitionerna, utan de existerar istället i någon slags samverkan mellan abstrakt formalism och intuition.

Något liknande gäller för talbegreppet. Däremot tycks proportioner definieras och behandlas helt abstrakt, om än med utgångspunkt i en mer eller mindre intuitiv förståelse för mått på storheter. Proportionsbegreppet beskrivs som en ospecifierad relation med vissa egenskaper, och det är dessa abstrakta egenskaper som utgör hela deras existens.

---

[20] Ibid, s. 114
[21] Ibid, s. 148-149

Vi kan därmed fastslå att det fanns åtminstone enskilda delar av den grekiska matematiken som besitter egenskapen i fråga, men att det knappast genomsyrar matematiken som helhet.

3.1.4 Motsägelsebevis

Vi har hittils betraktat bara de matematiska objekt och operationer som återfinns i grekisk matematik, men har missat en potentiellt viktig aspekt av matematiken, nämligen de logiska resonemangen. Det finns mycket att säga om dessa, men speciellt en aspekt av dem tycks i synnerhet relevant, nämligen förekomsten av motsägelsebevis.

Ett exempel på en proposition i *Elementa* som använder ett motsägelsebevis är VII.24:

> *If two numbers be prime to any number, their product also will be prime to the same. For let the two numbers A, B be prime to any number C, and let A by multiplying B make D; I say that C, D are prime to one another.*[22]

Vi ser här hur Euklides i vanlig ordning använder bokstäver för att beteckna ospecificerade tal, men han går även längre än så, för i beviset till denna proposition betecknas även rent hypotetiska tal med bokstäver:

> *For, if C, D are not prime to one another, some number will measure C, D. Let a number measure them, and let it be E.*[23]

Här representerar bokstaven E ett tal som inte bara är av obestämd storlek, utan som rentav inte kan existera. Det visar sig nämligen i propositionens bevis att antagandet som citerats ovan leder just till en motsägelse, och det fastslås därmed:

> *Therefore no number will measure the numbers C, D.*[24]

Det visar sig med andra ord att talet E är en omöjlighet, och att det inte finns någon storhet som den representerar. Likväl används detta tal oförhindrat i motsägelsebeviset. Bland annat låter Euklides ett annat tal F beskrivas i termer

[22] Heath, 1908b, s. 325
[23] Ibid, s. 325
[24] Ibid, s. 326

av E, och han jämför förhållandet mellan B och F med förhållandet mellan E och A.

Det finns en väsentlig skillnad mellan E och de andra talen (som A, B och C). Snarare än att representera en storhet så representerar bokstaven E något som är mer abstrakt, nämligen ett hypotetiskt tal som, ifall det existerade, skulle förhålla sig på ett visst sätt till andra givna tal.

Vi kan likna detta till hur modern matematik låter oss formulera en ekvation utan reella lösningar:

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

Utan hänsyn till ifall det existerar något x som faktiskt uppfyller denna relation, så kan vi manipulera vårt påstående enligt vissa algebraiska regler:

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = -3$$

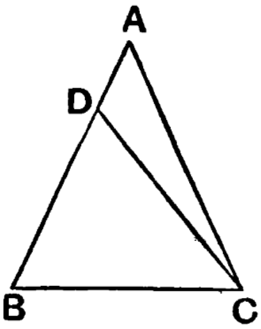
Vi ser nu att inget reellt tal uppfyller ekvationen, och att den därmed var omöjlig att uppfylla till att börja med. När vi utfört våra steg har vi dock inte intresserat oss för vilka värden x kan anta, eller ens om några sådana värden finns, utan vi har uteslutande tittat på det förhållande mellan x och 0 som den ursprungliga ekvationen beskriver. Med ett par enkla omskrivningar har vi omformulerat det till ett ekvivalent förhållande, där det är lättare att utläsa att det saknas en lösning. Detta kan sägas vara kärnan i en operationell symbolism, att vi gör symboliska manipulationer av förhållanden och uttryck utan att intressera oss för de objekt som symbolerna representerar, eller ens om dessa objekt finns. Det vi manipulerar är inte talet som x representerar, utan det symboliska uttryck som x ingår i.

Att på detta sätt ignorera vilka faktiska objekt som behandlas, och rentav huruvida några sådana existerar, det är inte helt olikt vad Euklides gör i propositionen ovan. Inledningsvis definieras E som ett tal med ett visst förhållande till de andra givna talen, och genom att tillämpa tidigare resultat visar han att detta förhållande implicerar en serie andra förhållanden, tills han slutligen uppnår ett förhållande som utgör en motsägelse. Det väsentliga är aldrig vad E representerar, eller ens om något sådant tal existerar, utan det som studeras är istället det beskrivna förhållandet till de övriga talen. Vi resonerar alltså mer abstrakt, om matematiska påståenden snarare än matematiska objekt. Dessutom, eftersom talet E inte existerar, och därmed rimligen blir svårt att föreställa sig, liksom dess förhållanden till andra tal, kan det tyckas befogat att anta att Euklides (liksom läsaren) inte kunde matematiskt tolka de påståenden han gör.

Utan förmåga att tolka symbolen E, och föreställa sig det objekt det representerar (eller dess förhållande till andra tal), så är det mer eller mindre ett primitiva begrepp vi arbetar med i resonemanget. Ifall symbolen inte kan tolkas intuitivt så begränsas dess egenskaper till de som formellt har formulerats, och det blir ontologiskt oberoende.

Vi bör dock vara försiktiga i våra slutsatser, för möjligtvis överdriver vi signifikansen i att talet E skapar en motsägelse. Det är tänkbart att vi i någon mening ändå kan föreställa oss talet, genom att i varje steg av beviset bara betrakta de egenskaper hos talet som är relevanta just då. Det vi föreställer oss behöver inte vara en korrekt representation av hela konceptet, det behöver inte ens vara en särskilt god approximation, för att vi ska kunna visualisera just de egenskaper och förhållanden som används i varje steg för sig.

Något liknande kan förmodas vara vad som sker i beviset till Proposition I.6, som även det är ett motsägelsebevis. Där ritar Euklides en figur som visar sig vara omöjlig:



Figur 3.1: Illustration av Proposition I.6 (Heath, 1908a, s. 255)

Propositionen i fråga säger:

> *If in a triangle two angles be equal to one another, the sides which subtend the equal angles will also be equal to one another.*[25]

Euklides ritar triangeln ovan, och säger att vinkeln ABC är lika med ACB. Han antar sedan, för att visa en motsägelse, att AB är större än AC. Punkten D sätts ut så att BD är lika lång som AC. Dock vet Euklides att figuren är inkorrekt, att någon sådan punkt inte existerar mellan B och A, och det är just detta som han sedan bevisar, genom att härleda att BD är lika med BA.

[25] Heath, 1908a, s. 255

Att beviset behandlar en omöjlig figur hindrar inte Euklides från att resonera kring punkten D. Dock anspelar han helt klart på ett spatialt tänkande, vilket inte minst märks i att figuren är illustrerad.

Det är naturligtvis inte ovanligt att de figurer som ritas inte perfekt representerar de geometriska objekt som behandlas (vinklar och längder kan till exempel ha felaktiga proportioner), men hur punkten D sätts ut är annorlunda. Det rör sig inte bara om en imperfekt approximation av en idealiserad geometri, utan Euklides illustrerar en figur som är omöjlig redan i teorin. Att vi ändå upplever att vi kan föreställa oss punkten D, och föra geometriska resonemang om den, kan förmodas bero på att vi har en begränsad geometrisk intuition, och därför inte är kapabla att tänka på och förstå figuren som helhet. Motsägelsen ligger inte i någon enskild aspekt av figuren, utan finns först när vi betraktar alla dess beskrivande egenskaper uppfyllda samtidigt.

För att återkoppla till Proposition VII.24, så är fallet möjligen så att även vår talteoretiska intuition är för begränsad för att vi ska inse att det tal E som vi föreställer oss inte är ett faktiskt existerande tal. Vår föreställningsförmåga tillåter oss att tänka på något som är motsägelsefullt, så länge motsägelsen bara existerar i ett helhelsperspektiv, vilket är mer än vad vi förmår hålla i tankarna samtidigt. I någon mening tänker vi aldrig på talet E, med samtliga av dess egenskaper och förhållanden till andra tal, utan bara på olika aspekter av E, som aldrig uppfyller mer än en delmängd av dess egenskaper samtidigt.

Hur Euklides själv tänkte vet vi naturligtvis inte, så vi kan enbart spekulera. Dock kan vi konstatera att den grekiska matematiken inte var främmande för att namnge omöjliga objekt, och behandla dem likvärdigt med andra objekt, eftersom det enda avgörande för resonemangen är det förhållande till andra objekt som är deras definierande egenskap. Detta tyder möjligen på att den var något mer ontologiskt oberoende än vad vi tidigare konstaterat.

3.1.5 Slutsats

Fastän ett antal aspekter av den grekiska matematiken möjligen kan betraktas som undantag, så måste vi dra slutsatsen att den överlag inte uppfyller Mahoneys definition av algebra. Det finns bara väldigt primitiv symbolism, och den är inte operationell. Inte heller de retoriska resonemangen är av en operationell natur.

Fastän mycket i den grekiska matematiken handlar om relationer så är det generellt inte där fokuset ligger, utan på objekten och deras egenskaper. I synnerhet i problemformuleringarna syns en klar skillnad, där den grekiska matematiken har en stadig grund i konstruktioner som inte återfinns i modern algebra. Det som i moderna ögon skulle ses som en lösning på ett av de grekiska problemen är ofta enbart ett omskrivning av problemet. Att bevisa en viss relation mellan två påståenden är inte en lösning för den som lägger fokus på att konstruera faktiska objekt.

Slutligen är den grekiska matematiken på det stora hela inte ontologiskt oberoende, utan förutsätter ofta en intuitiv tolkning av de begrepp som används.

Allt som allt kan vi därför konstatera att Unguru har rätt i sin bedömning att den grekiska matematiken inte uppfyller Mahoneys definition av algebra. Detta är dock inte en särskilt kontroversiell slutsats. Inte heller van der Waerden (1976, s. 199) tycker annorlunda, men han håller därmot inte med Unguru om vilken betydelse det har. Enligt van der Waerden (1976, s. 199) beskriver definitionen inte det han själv kallar algebra, och fokuserar i sitt resonemang istället på andra egenskaper hos den grekiska matematiken. Dessutom håller van der Waerden inte med om att modern notation och terminologi är ofrånkomligen sammanflätat med de egenskaper som beskrivs i definitionen[26].

3.2 Grekisk matematik enligt van der Waerden

Vid en första anblick av grekisk matematik är det uppenbart att den ytligt inte har samma form som den moderna matematiken. Den beskriver i ord och med geometriska diagram vad som idag skulle beskrivas med symboliska uttryck. Vi kan därför direkt lämna tanken att grekisk matematik skulle uppfylla van der Waerdens bokstavliga definition av algebra, eftersom hanteringen av algebraiska uttryck kräver just formella symboler. Istället får vi undersöka huruvida grekernas resonemang och tankar liknar de vi använder idag, vilket är den poäng som van der Waerden vill föra fram.

3.2.1 Ekvationslösning

En väsentlig del av vad van der Waerden ser som algebra är lösandet av ekvationer, och han menar att många problem i den grekiska matematiken handlar om just det. Unguru (1975, s. 90) å andra sidan menar att de antika grekerna inte hade några ekvationer, och därmed inte heller löste dem. För honom kommer deras geometriska frågeställningar och våra moderna ekvationsproblem från två olika tankevärldar, och när vi översätter mellan dessa världar så ändrar vi problemens natur.

Som exempel kan vi betrakta Proposition II.11 i *Elementa*:

[26] Detta är vad som uttrycks genomgående i hela hans replik till Unguru, och vid flera tillfällen i *Science Awakening*. Bland annat uttrycker han att Unguru överskattar symbolernas betydelse i matematiken (van der Waerden, 1976, s. 205)

> *To cut a given straight line so that the rectangle contained by the whole and one of the segments is equal to the square on the remaining segment.*[27]

Enligt van der Waerden (1976, s. 207) så motsvarar detta att finna ett x som uppfyller den symboliska ekvationen $a(a-x) = x^2$ (eller ekvivalent, $x^2 + ax = a^2$).

Innehållsmässigt är det inte svårt att se likheten, men vi måste fråga oss ifall formen ändå har betydelse. Vi kan bland annat notera att den första formuleringen talar om konstruktionen av en punkt, medan den andra talar om att uttrycka värdet på x (i termer av a).

Det kan tyckas vara en subtil skillnad, men den innebär att lösningarna blir av fundamentalt olika natur. När vi formulerar problemet som en ekvation så består lösningen av ett direkt uttryckt förhållande mellan storheterna x och a, men vi har inte därmed funnit hur vi konstruerar den efterfrågade punkten på linjen. För att kunna tillämpa II.11 på det sätt som görs i Proposition IV.10 så är det just den punkten som behövs, inte hur den förhåller sig till hela linjen. Euklides skulle därför behöva tillämpa ytterliggare satser för att även få fram den punkt som han får fram direkt när han löser II.11.

Om vi istället formulerar II.11 på det sätt som Euklides gör så blir själva konstruktionen svaret. Det vi får fram är inte ett reellt tal, inte ett värde på x, för det svarar inte på den ställda frågan, som är just hur punkten konstrueras. Svaret är istället en metod, en algoritm för att få fram en punkt som uppfyller det sökta sambandet.

De två frågeställningarna är av så olika natur att vi idag inte skulle se Euklides geometriska konstruktion som en lösning på ekvationsproblemet, eftersom det inte ger ett värde på x (i termer av a). På samma sätt skulle Euklides förmodligen inte se en modern lösning som ett svar på hans ursprungliga fråga, med tanke på hur den uttrycks:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$

Denna lösning ger oss ingen metod för att konstruera linjesegmentet x (eller någon motsvarande punkt) utifrån ett givet linjesegment a, ens om vi försöker tolka det geometriskt. Att subtrahera halva a från sidan på en kvadrat är inte ett problem, däremot att överhuvudtaget uppfatta det som står innanför rottecknet som en kvadrat.

[27] Heath, 1908a, s. 402

Lösningen på ekvationen kan alltså inte trivialt översättas till en konstruktion, och den konstruerade punkt som uppfyller det efterfrågade sambandet kan inte heller trivialt översättas till ett algebraiskt samband. Det tycks därför som att Proposition II.11 just inte är ett ekvationsproblem.

3.2.2 Lösningsmetoder

Skillnaden mellan Euklides geometriska formulering av Proposition II.11, och van der Waerdens översättning till ekvationsform, återspeglas även i lösningsmetoden.

När vi uttrycker II.11 som en ekvation så löser vi den sedan så som vi löser alla ekvationer: Vi betraktar sambandet som uppfyllt genom att uttrycka det som $x^2 + ax = a^2$, men eftersom det inte direkt går att utläsa värdet på den sökta variabeln x, så förenklar vi sambandet tills det står på en form som explicit uttrycker x i termer av a. Allt vi gör är att manipulera vårt första uttryck enligt ett antal regler, och i varje steg på vägen så ger vårt uttryck samma information om x, bara på olika invecklad form.

Om vi istället betraktar hur Euklides löser II.11, så ser vi att han börjar med en serie konstruktioner av linjer och figurer, till han konstuerat en viss punkt som han menar uppfyller det sökta sambandet. För att bevisa detta utgår han ifrån ett enkelt samband som följer direkt av konstruktionen, och visar att detta implicerar ett annat samband, som i sin tur implicerar ett annat, tills han når just det samband som propositionen efterfrågar.[28]

Vi ser alltså att de olika versionerna av problemet använder implikationskedjor som går åt olika håll. Ekvationsmetoden utgår ifrån det komplicerade sambandet och reducerar det till något enklare, medan det geometriska beviset utgår ifrån ett trivialt samband och visar att det komplicerade sambandet är en konsekvens av det. Ekvationsmetoden antar direkt sambandet uppfyllt, men den geometriska metoden gör inget sådant antagande.

Istället för att förenkla ett samband så uttrycks x på två olika sätt, orginalsambandet och konstruktionen, och vi visar sedan att de beskriver samma punkt. Dessa två uttryck blir också våra enda formuleringar av x. Vi kommer aldrig till någon enklare form av x i termer av a, utan det enklaste sättet att beskriva x förblir frågan vi utgick ifrån.

Den geometriska frågan och ekvationen undersöker därför två olika saker. Euklides svarar på frågan om x finns och hur vi hittar den, och ekvationen svarar på frågan om hur x förhåller sig till a givet att x finns.

[28]Heath, 1908a, s. 402-403

Det är såklart möjligt att just Proposition II.11 inte var ett bra exempel från van der Waerdens sida, men det visar sig i själva verket att det finns få eller inga liknande problemformuleringar i *Elementa* som gör sig bra som ekvationer, av samma anledning.

Däremot är det inte så att alla propositioner frågar efter konstruktioner, eller överhuvudtaget uttrycker ett problem att lösa, utan flertalet uttrycker och bevisar istället något samband eller påstående. Enligt van der Waerden (1976, s. 203-205) handlar vissa av dessa propositioner om att visa att någon algebraisk identitet är geometriskt giltig.

3.2.3 Algebraiska identiteter

I Proposition II.6, som van der Waerden (1976, s. 207-208) tar upp som exempel på geometrisk algebra, beskriver Euklides ett samband:

> *If a straight line be bisected and a straight line be added to it in a straight line, the rectangle contained by the whole with the added straight line and the added straight line together with the square on the half is equal to the square on the straight line made up of the half and the added straight line.*[29]

Detta kan sägas motsvara följande algebraiska samband:

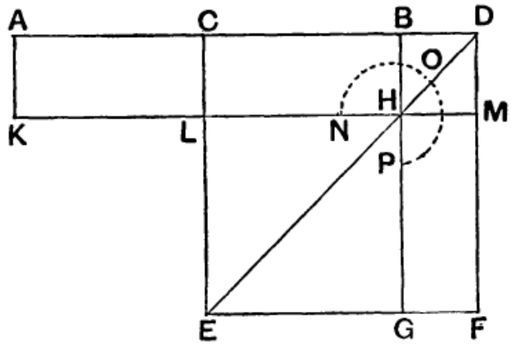
$$(a+b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}+b\right)^2$$

I sitt bevis börjar Euklides med att konstruera allt som är növändigt för resonemanget, och får på så vis fram följande diagram:

Det Euklides sedan utgår ifrån är den linje som i problemformuleringen delades på mitten, och konstaterar att de två delarna (AC och CB) är lika. Därefter följer en lång kedja av implikationer. Att AC och CB är lika innebär att rektanglarna AL och CH är lika, och eftersom rektanglarna CH och HF är lika så följer det att även AL och HF är lika. Vi adderar sedan rektangeln CM till både AL och HF, vilket bevarar likheten.

Vi har nu att AL tillsammans med CM är lika med CM tillsammans med HF. Här noterar Euklides att CM och HF också kan beskrivas som kvadraten CF minus

[29] Heath, 1908a, s. 385



Figur 3.2: Illustration av Proposition II.6 (Heath, 1908a, s. 386)

kvadraten LG. Genom att lägga till LG till detta så kompletterar vi kvadraten, och det eftersökta sambandet är därmed uppfyllt.

Kort sagt utgår Euklieds ifrån en given sanning, att de två halvorna av AB är lika varandra, och visar sedan en serie av implikationer som leder till mer komplicerade, men logiskt ekvivalenta, påståenden om likhet. Ifall vi försöker direktöversätta resonemanget till ett modernt symbolspråk får vi följande (där a och b är längden på AB respektive BD):

1. $\frac{a}{2} = \frac{a}{2}$
2. $\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right) b = \left(\frac{a}{2}\right) b$
3. $\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right) b + \left(b + \frac{a}{2}\right) b = \left(\frac{a}{2}\right) b + \left(b + \frac{a}{2}\right) b$
4. $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right) b + \left(b + \frac{a}{2}\right) b = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$
5. $\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right) b + \left(b + \frac{a}{2}\right) b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2$
6. $\Leftrightarrow (a+b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2$

Vid två tillfällen (steg 3 och 5) används det faktum att om vi lägger till lika saker till lika saker så är resultaten lika, vilket är en grundsten i ekvationstänkande. Steg 2 tycks även det bygga på principen om likabehandling bevarar likhet, men rent formellt så motiverar Euklides det istället med att det rör sig om två parallellogram med lika bas och lika höjd är lika. Steg 4 motiveras helt och hållet geometriskt, genom att observera att de två rektanglarna också kan tolkas som skillnaden mellan två kvadrater.

Ett par steg i beviset har även utelämnats, eftersom de inte betyder något i översatt form. När Euklides till exempel substituerar CH med HF, eftersom de är lika, så blir översättningen meningslös eftersom vi uttrycker båda som $\left(\frac{a}{2}\right) b$.

Sett till helheten så finns en tydlig likhet med modernt ekvationstänkande. Kärnan i resonemanget är att utnyttja ekvivalenser och implikationer mellan olika påståenden om storheters förhållande till varandra, bland annat genom att addera lika till lika.

Däremot så ser vi också att II.6 blir väldigt lik II.4 ifall vi tolkar dem algebraiskt (översatt till ekvationsform beskriver II.4 hur $(a + b)^2$ kan utvecklas, jämfört med $\left(\frac{a}{2} + b\right)^2$ i II.6), men ändå är de geometriska bevisen för dem väldigt olika. I beviset för II.4 så sker inget tilläggande av lika till lika, utan istället kretsar beviset kring vinklar, helt olikt vad som sker i beviset för II.6.[30] Det får oss att undra ifall Euklides själv såg de algebraiska tolkningarna, eller om det är vi som läser in dem för att vi skolats i ett algebraiskt tänkande.

3.2.4 Algebra i geometrisk förklädnad

Van der Waerden (1975, s. 203) menar att grekerna inte bara hade metoder av algebraisk natur, utan att de hade ett i grunden algebraiskt tänkande. Att de ändå formulerade så mycket geometriskt berodde enligt honom på deras syn på tal. I grekisk matematik var tal hela eller på sin höjd rationella, och var således begränsade i vad de kunde uttrycka på ett sätt som linjer inte är.[31]

Att den bakomliggande tanken vore algebraisk skulle enligt van der Waerden förklara det faktum att Euklides tar med propositioner som (enligt van der Waerden) är geometriskt ointressanta eller triviala.[32]

Som exempel på sådana propositioner tar van der Waerden upp II.1-4. Både II.2[33] och II.3[34] är specialfall av II.1[35], som geometriskt säger att varje rektangel kan delas upp i mindre rektanglar genom att dela den längs linjer som är parallella med en av sidorna. Van der Waerden (1976, s. 204) argumenterar att detta syns direkt när vi tittar på en rektangel och det skulle därför vara onödigt att ha med dessa propositioner från ett geometriskt perspektiv. Om vi däremot betraktar påståendet algebraiskt så besvarar det frågan om hur vi multiplicerar en summa av storheter med en annan storhet:

[30] Heath, 1908a, s. 379-382
[31] van der Waerden, 1975, s. 125-126
[32] Ibid, s. 204
[33] Heath, 1908a, s. 376
[34] Ibid, s. 378
[35] Ibid, s. 375

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

Detta är vad vi idag skulle beskriva som den distributiva egenskapen hos multiplikation (med avseende på addition).

Att ett antal propositioner tycks geometriskt ointressanta kan dock ha andra förklaringar än att den bakomliggande tanken inte är geometrisk. Att till synes uppenbara propositioner inkluderas kan till exempel bero på en rigorös formalism.

Ifall vi läser någon av de böcker i *Elementa* som handlar om tal snarare än geometriska figurer, så finner vi propositioner som kan tyckas lika uppenbara och ointressanta som de van der Waerden tar upp. Exempelvis Proposition VII.16 säger att varje produkt du kan bilda av två tal är lika, vilket algebraiskt helt enkelt säger att $ab = ba$.[36] Ifall vi ser denna typ av påståenden som triviala, och anser att så triviala påståenden vittnar om att det finns en annan bakomliggande tanke än vad som uttrycks, då måste vi rimligen fråga oss vad det egentliga syftet med VII.16 är.

På liknande sätt kan det tyckas att Proposition VII.18[37], som algebraiskt uttrycker $b : c = ba : ca$, är ganska uppenbar (i synnerhet efter att Euklides just bevisat VII.17[38], som uttrycker det snarlika påståendet $b : c = ab : ac$). Ifall vi inte tror att även dessa har en annan bakomliggande tanke än vad som explicit uttrycks, så känns det omotiverat att tro något annat om II.1-3.

Det känns istället rimligt att förmoda att dessa propositioner finns med antingen för att Euklides inte tycker de är så självklara, eller för att han anser att även intuitiva självklarheter kräver formella bevis. För att bättre förstå varför Euklides väljer att inkludera propositioner som dessa i *Elementa* bör vi inte bara undersöka vad de säger och hur de bevisas, utan även hur de tillämpas i andra propositioner.

Proposition II.1 tillämpas aldrig i *Elementa*, men det gör däremot II.2 och II.3 som är olika specialfall av den. Vi ser att II.3 tillmäpas på ett sätt som kan tyckas vara algebraiskt, i Proposition IX.15[39]. Denna proposition handlar om tal, och även de kvadrater som talas om där är just kvadrattal, men ändå kan Euklides tillämpa de resultat han visat geometriskt i II.3. Detta tycks stödja van der Waerdens tes, att propositionen i grunden handlar om ett algebraiskt påstående.

Ifall vi däremot tittar på Proposition II.2, så tillämpas den i den tydligt geometriska Proposition XIII.10[40]. Detta antyder att II.2 inte är helt geometriskt ointressant, då den underlättar ett senare geometriskt bevis.

[36] Heath, 1908b, s. 316
[37] Ibid, s. 318
[38] Ibid, s. 317
[39] Ibid, s. 404-405
[40] Heath, 1908c, s. 457-460

Proposition II.4[41] tillämpas oftare än II.2 och II.3. Det rör sig mest om propositioner kring kommensurabilitet, som inte är uppenbart geometriska. Vi ser dock att II.4 (motsvarande $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$) har ett bevis som inte är så trivialt som van der Waerden (1976, s. 204) säger. Han antyder att det går att se visuellt, men Euklides bevis är ganska långt och handlar om att visa att de figurer som konstrueras överhuvudtaget är två kvadrater och två rektanglar.

Beviset är bara uppenbart om vi ser det geometriska som en teknisk detalj och inte som kärnan av propositionen. På samma sätt kan vi säga att II.11, som vi gick igenom tidigare, bara blir meningsfull på ekvationsform om vi förutsätter att Euklides var ute efter en lösning till ekvationen, snarare än att konstruera en viss punkt.

Vi har däremot ingen anledning att tro att det är syftet med II.11, eftersom Euklides ingenstans talar om hur den sökta punkten förhåller sig till hela linjen. Dessutom tillämpas propositionen i senare konstruktioner, där det alltså blir nödvändigt att just konstruera en punkt med de efterfrågade egenskaperna. Ifall II.11 i grunden handlar om att finna värdet på x så skulle den vara otillämpbar i konstruktioner. Det tycks därför som om van der Waerden, genom att betrakta problemet som en ekvation, missförstår vad Euklides ville uppnå med propositionen, och förutsätter att de tillämpningar och slutsatser han själv ser i propositionen är de enda rimliga.

3.2.5 Slutsats

När det gäller hanterandet av uttryck bär den grekiska matematiken ibland klara likheter med moderna metoder. Att bevara likhet genom att lägga till eller ta bort lika saker är vanligt förekommande, och många bevis bygger på att steg för steg visa att ett likhetsförhållande är logiskt ekvivalent med ett annat. Däremot finns det ett stort antal avgörande skillnader mellan det som uttryckligen formuleras och de algebraiska tolkningarna som van der Waerden gör, och dessa skillnader syns både i detaljerna och i helhetsbilden.

Tydligast blir skillnaden när vi betraktar de problem som Euklides formulerar, och som van der Waerden ser som ekvivalenta med att lösa ekvationer. De geometriska problemen efterfrågar konstruktionen av en punkt, inte ett uttryck för hur en variabel x beror på några parametrar. Euklides tycks onekligen ha verktygen för att kunna lösa ekvationer, men han har inte en modern syn på just vad det innebär att lösa dem. I modern tid handlar lösningen om att reda ut ett komplicerat förhållande, som indirekt bestämmer värdet på den sökta variabeln, och på så sätt få ett mer lättförståeligt förhållande som uttrycker värdet direkt. Euklides uttrycker sig tydligt annorlunda, och frågar istället om hur vi konstruerar en punkt eller figur som

[41] Heath, 1908a, s. 379-380

uppfyller ett visst förhållande. Den skillnaden syns både i problemformuleringen, lösningen och bevisföringen.

Eftersom det inte finns några tecken på att Euklides faktiskt sökte lösnignen på någon ekvation, så bygger van der Waerdens översättningar på löst grundade antaganden om vad han egentligen hade i åtanke när problemet forumlerades. Enligt van der Waerden så är fallet så, att geometrin och dess konstruktioner inte var det centrala i matematiken för Euklides (åtminstone inte i de första böckerna). Denna teori baserar han bland annat på att vissa propositioner tycks geometriskt ointressanta, och därför måste finnas med för att fylla ett algebraiskt syfte. Det resonemanget brister emellertid på ett antal punkter, inte minst för att det tycks förbise hur propositionerna faktiskt tillämpas, och därtill underskattar den nivå av formalism som Euklides håller sig till.

De algebraiska resultat och resonemang som van der Waerden tycker sig se i *Elementa* är tydligt närbesläktade med de som Euklides uttryckligen nedtecknat, men det finns inga tydliga tecken på att Euklides själv såg dem. Istället verkar Ungurus ståndpunkt sannolik, att de verkar finnas där bara för den som skolats i ett modernt algebraiskt tänkande och därför har ett annat synsätt på matematik, som bland anant färgar vad som bedöms som intressant.[42]

Sammanfattningsvis så ser vi alltså spår av ett algebraiskt tänkande (enligt van der Waerdens definition) i *Elementa*, men fokuset tycks inte ligga där. Det är inte avsaknaden av verktyg som får Euklides att inte lösa ekvationer, utan snarare en skillnad i synen på matematikens natur och dess syfte. Målet med de problem som formuleras är inte att få fram förhållanden mellan okända och kända, utan att konstruera geometriska objekt.

Vi finner det därför osannolikt att Euklides i grunden var algebraiker, och att de argument som van der Waerden tar upp inte är starka nog att motivera det antagandet.

[42] Unguru, 1975, s. 86-87

Del 4

Slutsats

Det genomgående temat i Mahoneys definition av algebra är abstraktion, och det binder samman definitionens tre egenskaper. Den moderna matematiken, och algebran i synnerhet, skiljer sig väsentligt från den grekiska matematiken i det att den är betydligt mer abstrakt. De objekt som behandlas är helt abstrakta, och den operationella symbolismen i dess notation skapar ytterligare ett lager av abstraktion mellan oss och de eventuella spår av intuitiv förståelse som kan förekomma hos de behandlade objekten. I den grekiska matematiken behandlas till stor del intuitiva koncept, och de behandlas förhållandevis direkt, inte genom flera lager av abstraktion.

Med avseende på van der Waerdens definition tycks den tydligaste skillnaden mellan modern och grekisk matematik vara synen på matematikens syfte. De frågeställningar som görs i *Elementa* är väldigt olika de vi skulle formulera idag. Fokuset ligger på konstruktioner, och lösningarna på deras problem tar sig formen av en impliktationskedja från triviala sanningar till komplexa påståenden. Mycket som idag skulle ses som lösningen på ett problem skulle kanske inte ses som en lösning från ett grekiskt perspektiv, utan enbart som en omformulering av problemet (istället för att konstruera en punkt med en given egenskap så ger lösningen en ekvivalent egenskap som beskriver samma punkt).

Vi kan därmed konstatera att den grekiska matematiken inte var algebraisk, åtminstone inte enligt de två definitioner vi undersökt. Möjligen kan vi argumentera som van der Waerden, att det ändå fanns en bakomliggande tanke som var algebraisk, men vi finner inte mycket som tyder på detta.

4.1 Modern notation

En stor del av debatten mellan Unguru och van der Waerden handlar om huruvida det är missvisande att använda en modern notation för att beskriva antika problem och resonemang. Enligt van der Waerden (1975, s. 119) innebär översättningen till en modern notation mest att resonemangen blir lättare att följa, medan Unguru menar att det ger en skev bild av det dåtida matematiska tankesättet[1].

Ifall vi översätter grekisk matematik till modern notation inser vi direkt att vi måste göra ett antal begränsningar i notationen, jämfört med hur vi brukar använda den idag. Några negativa tal finns till exempel inte, så vi måste undvika att subtrahera större tal ifrån mindre. Vi kan inte heller jämföra objekt av olika dimension, som x^2 och x, och inte addera dem till varandra. Detta behöver inte innebära något större problem, annat än att vi måste vara uppmärksamma på vilka restriktioner vi arbetar under, men översättningen medför också ett par allvarligare komplikationer.

Vi såg till exempel i fallet med Proposition II.11 att det formulerade problemet blir till sin natur annorlunda när det översätts. Den omskrivning till ekvationsform som van der Waerden (1976, s. 207) låter göra, är bara motiverad (om någonsin) under antagandet att den fråga som Euklides egentligen sökte svaret på var en annan än den han uttryckligen formulerade. Att van der Waerden ändå godkänner och använder sådana översättningar hänger samman just med hans övertygelse om att den grekiska matematiken (eller åtminstone delar av den) var i grunden algebraisk, och att den geometriska utformningen bara var ett sätt de valde att formulera sina algebraiska tankar.

Vi ser även att ett antal propositioner i *Elementa* säger mycket snarlika saker algebraiskt, även när bevisen för dem ser väsentligt olika ut. Den som ser de tydliga sambanden i de symboliska översättningarna, den kommer inte lättare förstå varför Euklides inte tycktes se dem som så lika. För att förstå den dåtida synen på matematik måste vi förstå inte de matematiska resultat som vi idag kan urskilja i deras texter, utan de resultat de själva såg.

Även med Mahoneys definition i åtanke så får vi anledning att stödja Ungurus inställning till översättningarna. En väsentlig del av vad som utmärker den moderna notationen är den operationella symbolismen, som till sin natur är sådan att den flyttar bort fokus från de objekt som behandlas till de symboler som representerar dem. Den grekiska matematiken byggde starkt på visualisering av alla resonemang, så den som använder en modern notation för att underlätta förståelsen, den kommer möjligen att förstå de matematiska resultaten, men kommer samtidigt att förstå dem på ett annat sätt än de dåtida matematikerna. Själva anledningen till att en modern notation upplevs underlätta förståelsen är inte bara att det ökar läsbarheten (även om det sannolikt är en bidragande faktor) utan även att den tydliggör samband som

[1] Unguru (1975) uttrycker detta på åtskilliga ställen, bland annat s. 86, s. 99-100 och s. 103-105

inte är uppenbara (eller rentav inte finns) för den som inte är skolad i ett modernt, algebraiskt tänkande.

När van der Waerden talar om att vissa propositioner i *Elementa* är ekvivalenta med moderna ekvationer eller algebraiska identiteter, då måste vi fråga oss vad för ekvivalens vi talar om. De matematiska påståenden som i någon mening kan ses som matematiskt ekvivalenta påståenden behöver inte vara idéhistoriskt ekvivalenta, vilket kanske är mer relevant i ett matematikhistoriskt sammanhang.

Vi bör vara försiktiga dock med att överdriva problematiken kring modern notation i matematikhistoriska texter. Tillsammans med geometriska diagram och ett retoriskt, geometriskt resonemang som tydligt binder samman notationen med de objekt som representeras och de operationer som utförs på dem, så är det svårt att se någon allvarlig fara i att göra vissa förkortningar som underlättar läsbarheten. Det verkliga problemet ligger inte i själva notationen, utan det mer abstrakta synsätt som kan följa med ifall vi inte aktivt försöker undvika det.

Bilaga A

Abstrakt algebra

Efter att ha undersökt hur den grekiska matematiken förhåller sig till våra två givna definitioner av algebra, så kan det vara intressant att jämföra hur abstrakt algebra från modern tid förhåller sig till samma definitioner. Då ämnet är mycket brett, och inte heller är vårt huvudfokus, tittar vi bara hastigt på ett (godtyckligt valt) exempel, i form av en sats om symmetrigrupper:

> *A_n is generated by all 3-cycles.*[1]

Beviset är förhållandevis enkelt. Vi noterar att $(a\ b\ c) = (a\ b)(c\ b)$ för $a \neq b \neq c$, och konstaterar därmed att alla 3-cykler är jämna och därför ingår i A_n. Det återstår då att visa att varje jämn permutation kan skrivas som en produkt av 3-cykler. Det räcker att visa att alla produkter $(a\ b)(c\ d)$ kan skrivas så (eftersom dessa per definition genererar A_n), och för detta gör vi en falluppdelning:

1. Ifall $\{a, b\}$ och $\{c, d\}$ är lika, då är produkten $(a\ b)(c\ d)$ identitetspermutationen, vilket trivialt är en produkt av 3-cykler (till exempel är $\sigma^3 = 1$ för alla 3-cykler σ).
2. Ifall $\{a, b\} \cap \{b, c\}$ består av exakt ett element, då kan vi utan inskränkning anta att $b = d$ (och $a \neq c$), och konstaterar då att $(a\ b)(c\ d) = (a\ b)(c\ b) = (a\ b\ c)$.
3. Ifall $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \emptyset$, då noterar vi att $(a\ b)(c\ d) = (a\ b)(c\ b)(b\ c)(d\ c) = (a\ b\ c)(b\ c\ d)$.

[1] Proposition 4.3 i Grillet, 2007, s. 60

Ungurus definition

I förhållande till Ungurus (eller egentligen Mahoneys) definition av algebra noterar vi att vi använder en tydligt operationell symbolism, i synnerhet i det tredje fallet, när vi injekterar en identitetspermutation i uttrycket $(a\ b)(c\ d)$ för att kunna gruppera våra faktorer på ett sätt som tillåter en omskrivning enligt vår givna likhet $(a\ b\ c) = (a\ b)(c\ b)$. Även i det andra fallet är resonemanget rent typografiskt, och anspelar inte på någon tolkning av uttrycken eller omskrivningarna.

De objekt som behandlas är permutationer, vilket i sig är ett intuitivt begrepp, men de besitter inga egenskaper utöver de som formellt definierats. Resonemanget förs inte heller med anspelning på att objekten eller operationerna ska tolkas, trots att de enskilda stegen mycket lätt kan motiveras intuitivt.

Vad gäller relationsfokus så kan vi till att börja med konstatera att vi behandlar funktioner (mer specifikt permutationer) som objekt, vilket i sig är ett tecken på såväl algebraisk abstraktion som relationsfokus, men vi noterar även att satsen inte direkt handlar om permutationer, utan egentligen om relationen mellan olika klasser av permutationer. Målet är att visa hur gruppen av jämna permutationer förhåller sig till mängden av 3-cykler. Detta överensstämmer mycket väl med det som Mahoney själv beskriver i sin definition:

> *Even when certain relations become themselves objects, say the set of group morphisms, one seeks the relations that link these new objects.*[2]

Van der Waerdens definition

Det är svårt att se något spår av ekvationer i problemet. Vi fastställer ingen likhet som manipuleras, och vi söker definitivt inte bestämma något okänt utifrån kända värden. Det känns däremot inte helt långsökt att säga att vi behandlar algebraiska uttryck. I omskrivningen $(a\ b)(c\ d) = (a\ b)(c\ b)(b\ c)(d\ c) = (a\ b\ c)(b\ c\ d)$ så manipulerar vi en produkt av två objekt och gör en omskrivning till en alternativ form, på ett sätt som liknar den elementära algebra som van der Waerdens defintion handlar om.

Ifall problemet alls representerar något som uppfyller van der Waerdens definition så är det just i det avseendet, att vi manipulerar algebraiska uttryck, men kopplingen är svag. I synnerhet finns det inget som särkiljer den abstrakta algebran från någon annan del av modern matematik, eftersom symboliska uttryck används och manipuleras överallt.

[2]Mahoney, 1971

Av allt att döma har inte van der Waerden någon ambition att inkludera abstrakt algebra i sin definition, utan det tycks snarare röra sig om elementär algebra. Detta görs tydligt inte minst i hans egna ord:

> *I mean algebra in the sense of AL-KHWARIZMI, or in the sense of CARDANO'S "Ars magna", or in the sense of our school algebra.*[3]

[3] van der Waerden, 1976, s. 199

Litteraturförteckning

[1] Freudenthal, H. (1977). What is Algebra and What has it been in History?, *Archive for History of Exact Sciences* 16(3), 189-200. doi:10.1007/BF00328154

[2] Grillet, P. A. (Andra utgåvan) (2007). *Abstract Algebra*, New York, NY: Springer-Verlag

[3] Heath, T. L. (1908a). *The Thirteen Books of Euclid's Elements: Volume I*, Cambridge: Cambridge University Press

[4] Heath, T. L. (1908b). *The Thirteen Books of Euclid's Elements: Volume II*, Cambridge: Cambridge University Press

[5] Heath, T. L. (1908c). *The Thirteen Books of Euclid's Elements: Volume III*, Cambridge: Cambridge University Press

[6] Heath, T. L. (1921). *A History of Greek Mathematics: Volume II*, Oxford: Oxford University Press

[7] Mahoney, M. S. (okänt år) *The Beginnings of Algebraic Thought in the Seventeenth Century*, (Översatt av okänd). Hämtad 4:e maj, 2016, från Princeton University http://www.princeton.edu/ hos/Mahoney/articles/beginnings/beginnings.htm (Orginalarbete publicerat 1971)

[8] Martinez, A. A. (2006). *Negative Math: How Mathematical Rules Can Be Positively Bent*, Princeton, NJ: Princeton University Press

[9] Morris, C. G. (1992a). Algebraic expression. I *Academic Press dictionary of science and technology* (s. 74). Cambridge, MA: Academic Press

[10] Morris, C. G. (1992b). Algebraic expression. I *Academic Press dictionary of science and technology* (s. 763). Cambridge, MA: Academic Press

[11] Unguru, S. (1975). On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics, *Archive for History of Exact Sciences* 15(1), 67-114. doi:10.1007/BF00327233

[12] Unguru, S. (1979). History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of the Art *Isis* 70(4), 555-565. doi:10.1086/352342

[13] van der Waerdel, B.L. (Fjärde utgåvan) (1975). *Science Awakening*, (Översättning av Arnold Dresden) Dordrecht: Kluwer academic publishers (Orginalarbete publicerat 1950)

[14] van der Waerdel, B.L. (1976). Defence of a 'shocking' point of view, *Archive for History of Exact Sciences* 15(3), 199-210. doi:10.1007/BF00412256

[15] Weil, A. (1978). Who Betrayed Euclid (Extract from a letter to the Editor) *Archive for History of Exact Sciences* 19(2), 91-93. doi:10.1007/BF00328609