UPPSALA UNIVERSITET

Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Educational Sciences 23

X - men sen då? Algebrans stora idéer från första klass till högre matematik

Med fokus på tidig algebra i Sverige

LARS MADEJ

ACTA
UNIVERSITATIS
UPSALIENSIS
UPPSALA
2021

ISBN 978-91-513-1076-3
urn:nbn:se:uu:diva-425573

Dissertation presented at Uppsala University to be publicly examined in Eva Netzelius, Blåsenhus, von Kramers allé 1, Uppsala, Friday, 22 January 2021 at 13:15 for the degree of Doctor of Philosophy. The examination will be conducted in Swedish. Faculty examiner: Professor Timo Tossavainen (Luleå University of Technology).

Abstract
Madej, L. 2021. X - men sen då? Algebrans stora idéer från första klass till högre matematik. Med fokus på tidig algebra i Sverige. *Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Educational Sciences* 23. 101 pp. Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis. ISBN 978-91-513-1076-3.

The overall aim of this thesis is to increase the knowledge of the state of algebraic thinking in the earlier years, so called early algebra, in the Swedish primary school. First, using the Big Ideas of Algebra (Blanton et al., *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87, 2015) as a theoretical framework, the thesis investigates which types of algebraic thinking can be identified in the Swedish mathematics curriculum and in two textbooks series for Grades 1-6. Second, as students' understanding of the equal sign as a symbol for a relation is an important factor for algebraic success, students' knowledge of it is studied by using an assessment form based on Matthews et al. (*Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 316-350, 2012).

The results of the empirical studies show that Equivalences, Expressions, Equations, and Inequalities (EEEI) were the most prominent Big Idea in the Swedish context. The Big Idea of Generalized Arithmetic (GA) is not represented in the Central content in Grades 1-6 and only slightly represented in the textbooks. Furthermore, there are big differences between the two textbook series, both regarding the total amount of algebraic content and regarding how well each Big Idea is represented in the textbooks. As textbooks are important artefacts in Swedish mathematics classrooms, opportunities to learn early algebra in a classroom might depend on which textbook is used. Concerning students' understanding of the equal sign, the study shows that they, in general, are able to describe the meaning of the equal sign as relational, but they are less able to use the relational structure of an equality. This implies that "the meaning of the equal sign", which is part of the algebraic content in the Swedish mathematics curriculum in Grades 1-3, might be learnt as a definition by word rather than by its implications in mathematics. Besides the empirical contributions, the thesis also offers a discussion whether the Big Ideas can be found in mathematics at the university level and in research in abstract algebra and it is argued that algebraic thinking is present in all levels of mathematics, from early algebra in lower primary school to research in mathematics.

Keywords: Early algebra, curriculum, mathematics textbooks, primary school mathematics, generalized arithmetic, conceptual knowledge, knowledge levels, mathematics education

Lars Madej, Department of Education, Box 2136, Uppsala University, SE-750 02 Uppsala, Sweden.

© Lars Madej 2021

ISBN 978-91-513-1076-3
urn:nbn:se:uu:diva-425573 (http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:uu:diva-425573)

Avhandlingens artiklar

This thesis is based on the following papers, which are referred to in the text by their Roman numerals.

I Dieterich, E., Lindberg[1], L. (2003). Dissident maps on the seven-dimensional Euclidean space. *Colloquium Mathematicum, 97*(2), 251–276. DOI: 10.4064/cm97-2-10

II Lindberg[1], L. (2004). On the doubling of quadratic algebras. *Colloquium Mathematicum, 100*(1), 119–139. DOI: 10.4064/cm100-1-12

III Lindberg[1], L. (2004) *Doubled quadratic division algebras*. Licentiatuppsats, Uppsala: Uppsala universitet, U.U.D.M. Report, 2004 (34).

IV Dieterich, E., Fieseler, K., Lindberg[1], L. (2006). Liftings of dissident maps. *Journal of pure and applied algebra,* 204(1), 133–154. DOI: 10.1016/j.jpaa.2005.04.005

V Bråting K., Hemmi K., & Madej, L. (2018). Teoretiska och praktiska perspektiv på generaliserad aritmetik. I J. Häggström, Y. Liljekvist, J. Bergman Ärlebäck, M. Fahlgren, & O. Olande (Eds.) (2018). *Perspectives on professional development of mathematics teachers. Proceedings of MADIF11: the eleventh research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education, Karlstad, January 23–24, 2018* (pp. 27–36). Gothenburg: Swedish Society for Research in Mathematics Education, University of Gothenburg.

VI Bråting, K., Madej, L., Hemmi, K. (2019). Development of algebraic thinking: opportunities offered by the Swedish curriculum and elementary mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education, 24*(1), 27–49.

VII Madej, L. (submitted). Primary school students' knowledge of the equal sign – the Swedish case.

Reprints were made with permission from the respective publishers.

[1] My surname was Lindberg at the time of writing.

Innehåll

Förord 7

Inledning 10
Övergripande syfte och frågeställningar 14
Kappans disposition 15

Bakgrund och tidigare forskning 16
Centrala begrepp och begreppsanvändning 16
Uttryck 17
Likheter och likhetstecknet 17
Ekvivalenser 18
Ekvationer och olikheter 19
Variabler 19
Mönster 21
Utvecklingen av forskning kring tidig algebra under det senaste seklet 22
1960-talet och algebra i den nya matematiken 23
1970-talet och Piagets stadieteori 24
1980-talet och en början till modern tidig algebra 25
1990-talet och den moderna tidiga algebran 26
Modern forskning om tidig algebra 27
Variabler 28
Ekvationslösning och likhetstecknets betydelse 30
Samband mellan och inom matematiska områden 32
Avslutande kommentarer och sammanfattning 34

Teoretiska ramar 36
Konceptuell och procedurell kunskap 36
Algebrans stora idéer 38
Stor idé 1: EEEI – Ekvivalenser, uttryck, ekvationer och olikheter 40
Stor idé 2: GA – Generaliserad aritmetik 43
Stor idé 3: FT – Funktionellt tänkande 45
Stor idé 4: VAR - Variabel 48
Stor idé 5: PR – Proportionellt Resonemang 50
Avslutande kommentarer om de fem stora idéerna 53
Om valet av teoretiskt ramverk 54

Metodologi 57

Datamaterial, urval och insamling 57
Läroplan och läroböcker 57
Elevlösningar 58
Analysverktyg 59
Läroplan och läroböcker 59
Elevlösningar 60
Studiernas tillförlitlighet 62
Etiska aspekter på studierna 64
Avgränsningar 65

Sammanfattning och resultat av artiklarna 66
Avhandlingens matematiska bidrag (Artiklar I–IV) 66
Teoretiska och praktiska perspektiv på generaliserad aritmetik (Artikel V) 68
Development of algebraic thinking: opportunities offered by the Swedish curriculum and elementary mathematics textbooks (Artikel VI) 69
Primary School Students' Knowledge of the Equal Sign – the Swedish Case (Artikel VII) 70

Avslutande diskussion 73
Algebrans stora idéer i abstrakt algebra 73
Möjligheter till tidig algebra i Sverige 75
Elevers beskrivning och användning av likhetstecknets betydelse 77
Didaktiska implikationer 78
Vidare forskning 80

English summary 82
Theoretical approach 82
Method 83
Results 84
Discussion 84

Referenser 86

Bilaga 1: Test använt vid delstudie 2 98

Förord

> "The adolescent who has mastered algebraic concepts has gained a vantage point from which he sees concepts of arithmetic in a broader perspective"
>
> (Vygotskij, 1934/1986, s. 202)

När jag skulle skriva dessa förord fick jag rådet att vara personlig, men inte för personlig och att inför skrivandet fundera över hur och varför denna avhandling kommit till. När jag tänkte i dessa banor insåg jag att min resa till denna slutprodukt hade börjat redan i mina tidiga skolår, även om jag då såklart var helt omedveten om detta. Delar av det som jag beskriver i denna avhandling fick jag uppleva i skolmatematiken när jag gick i låg- och mellanstadiet och det har garanterat präglat min syn på matematik och undervisning. Detta innefattar möjligheten att själv få upptäcka matematiken och se hur det som verkar vara olika matematiska innehåll knyts samman till en helhet. Det handlar om ett algebraiskt tänkande, även om det inte sker med ett formellt algebraiskt symbolspråk. Med risk för att mitt förord blir lite väl långt och att jag är något för personlig och detaljerad känner jag ändå att jag behöver berätta om allt detta.

De ord jag inledde detta förord med skrevs redan 1934 av Lev Vygotskij och visar att se aritmetik och algebra som starkt sammanflätade inte är nytt. Jag tillhörde den grupp av elever som aldrig hade problem med matematiken i skolan och när jag ser tillbaka på min skoltid var det just en förmåga att se aritmetiken i ett bredare perspektiv som underlättade för mig i mina matematikstudier, såväl i grundskola, gymnasium som vid universitetet. Det är dock först vid skrivandet av avhandlingen som denna koppling blivit helt klar för mig och inget som jag har tidigare explicit kunnat beskriva, varken som elev, student eller senare som lärare. Kopplingen mellan aritmetik och algebra har ändå hela tiden funnits där för mig som ett sätt att angripa och beskriva matematiken, men utan någon större reflektion runt detta. Den fördjupning av min förståelse för dessa matematiska sammanhang, som skrivandet av avhandlingen har medfört, har både gett mig själv en fördjupad kunskap om algebra som generalisering av aritmetik och en möjlighet till att förmedla detta i en svensk text. Det sistnämnda är något jag ser ett verkligt behov av och min förhoppning är att avhandlingen ska kunna ge lärare inspiration till hur elever kan stöttas i sin process att förstå matematiken mer på djupet och därigenom få uppleva det som matematiker benämner som matematikens skönhet.

Vägen till denna slutprodukt har absolut inte varit rak, det är nog till och med så att beskriva den som lång och krokig är en underdrift. Många personer har påverkat mig under hela denna process, som alltså egentligen påbörjades redan när jag var ett litet barn. Som elev hade jag flera lärare jag såg upp till, framför allt mina lärare i låg- och mellanstadiet. Troligtvis var detta anledningen till att det tidigt väcktes en tanke hos mig om att jag skulle bli lärare. Tack Margit Cassel och Eva-Lena Härdell för att ni lät mig hållas med matematiken och verkligen utvecklas i min egen takt. Ni har troligtvis betytt mer för min matematiska utveckling än vad ni är medvetna om. Även min barndomskamrat Patrik Näsfors bidrog till att mitt matematikintresse hölls vid liv och utvecklades vid denna tid. Jag vet inte hur många gånger som vi satt och spelade olika matematiska spel och räknade tillsammans, även om vi såklart också gjorde en massa andra roliga saker. I ljuset av min avhandling är detta exempel på hur otroligt viktiga de tidigaste skolåren är och jag är därför extra glad över att jag i och med denna avhandling kan bidra med kunskap om matematik i tidiga skolår.

Senare i gymnasiet lockade matematiken alldeles för mycket så jag övergav tillfälligt mina planer på att bli lärare för att istället studera matematik. Avhandlingen hade såklart aldrig blivit av om jag som 19-åring inte hade flyttat till Uppsala för matematikstudier. Här vill jag tacka mina föräldrar Erik, som tyvärr inte finns med oss längre, och Agneta. Jag kommer fortfarande ihåg att ni halvt på skämt och halvt allvarligt sa att det inte spelar någon roll vad jag väljer för gymnasieprogram men ”se till att välja något så du kan komma härifrån”. Vilket jag alltså gjorde. Utan er uppmuntran hade jag kanske varit kvar i min lilla hemby och denna avhandling hade då aldrig blivit av.

Matematikstudierna ledde även fram till att en första tanke om att disputera i matematik uppstod och tre år med forskarstudier inriktat på dubblade åttadimensionella reella divsionsalgebror följde. Det var tre fantastiska år där jag verkligen fick djupdyka i algebrans värld. Tack till min dåvarande handledare Ernst Dieterich, som verkligen trodde på mig och var den som fick mig att söka en doktorandtjänst. Tack även till Karl-Heinz Fieseler som tillsammans med Ernst gav mig denna första inblick i vad det innebär att vara forskare. Under hela den här tiden fanns ändå drömmen om läraryrket kvar och efter avklarat försvar av licentiatavhandlingen avbröt jag mina doktorandstudier i matematik för att läsa in en lärarexamen. Efter ett antal år som yrkesverksam lärare fick jag sedan chansen att undervisa blivande lärare vid Institutionen för pedagogik, didaktik och utbildningsstudier (EDU) vid Uppsala universitet.

Helt plötsligt hade det gått 10 år sedan licentiatexamen och under alla dessa år hade jag inte tänkt tanken på att jag skulle vilja disputera när en möjlighet till att bli doktorand igen uppkommer. Genom ett projekt under ledning av min biträdande handledare Kirsti Hemmi samt genom EDUs satsning på matematikdidaktik, under ledning av prefekt Henrik Edgren, löses finansieringen för mina doktorandstudier och helt plötsligt är jag delvis student igen. Tack

till er båda för att jag fått denna möjlighet. Ett extra stort tack till min huvudhandledare Kajsa Bråting som har styrt upp mitt arbete när jag börjat hamna på villospår, varit ett stort stöd, engagerad i mitt arbete och i slutfasen av detta skrivande verkligen styrt mig framåt mot mållinjen. De många givande synpunkter och råd du och Kirsti kommit med under dessa år och all den tid ni har lagt ner på detta har varit ovärderligt för mig.

Arbetet med denna avhandling hade inte heller varit möjligt att genomföra utan stödet från min familj. Mina barn, Anton och Oscar, även om pappa inte alltid har haft energi kvar efter långa stunders skrivande så ger ni mig mycket glädje och en möjlighet för mig att koppla av. Att bara vara med er och inte bry mig om något annat har varit en välbehövlig paus från jobbet. Jag lovar att spendera mer tid med er än vad jag kunnat göra den senaste tiden. Min fru, Agnieszka, som jag ibland inte förstår hur du har stått ut med att jag jobbar och tränar, jobbar och tränar, och återigen jobbar och tränar. Att jag har fått ta den tid jag behöver med träningen för att orka med arbetet har varit ovärderligt.

Sist men inte minst vill jag tacka alla mina kollegor både vid EDU och inom nätverket Nordic Network for Algebra Learning (N^2Al). Ni som har deltagit i nätverket har lyssnat på mina idéer och gett värdefull återkoppling som har påverkat slutresultatet i en positiv riktning. Ett extra tack till läsgruppen som kom med givande synpunkter inför slutskrivningen av avhandlingen. Jag vill även tacka alla doktorander här vid EDU som jag har pratat med om avhandlingsrelaterade ämnen, men även alla andra (o)möjliga ämnen, över en kopp kaffe. Jag borde egentligen inte nämna några namn för att inte glömma andra personer som har varit viktiga för mig under mitt arbete med avhandlingen, men vill rikta ett särskilt tack till tre personer. Caroline Sims för våra samtal rörande särskilt begåvade elever. Kristina Palm Kaplan för alla våra givande vetenskapliga diskussioner (i ditt fall inte över en kopp kaffe, men väl kaffesubstitutet te). Tomas Persson för att du står ut med att jag gång på gång stör dig i ditt arbete med mina frågor och för att du delar med dig av alla dina helt underbart udda kunskaper. Hur många går runt med en bild av den sista matematik som George Rasch skrev ner innan han dog? Troligtvis bara Tomas.

Uppsala, november 2020

Inledning

I den här avhandlingen undersöker jag algebraiskt tänkande i den svenska grundskolans tidiga år samt beskriver hur detta algebraiska tänkande även ligger till grund för högre matematik. Med algebraiskt *tänkande* avser jag det som Kaput (2008) beskriver som kärnan i algebra (core aspects). Det vill säga, en form av tänkande som inkluderar att skapa och beskriva generaliseringar och att resonera med hjälp av algebrans formella språk. Algebraiskt tänkande är dock inte begränsat till att ett formellt algebraiskt språk måste användas. Att uttrycka sig algebraiskt kan lika väl ske genom att använda talspråk (Kieran, 1989) eller gester, bilder och andra semiotiska resurser (Radford, 2018).

Algebra har länge varit en del av matematiken som många elever har haft svårt för (bl a Carraher & Schliemann, 2007; Davis, 1985; Kieran, 1981; 2007; Matthews & Fuchs, 2020). Svenska elever är inget undantag, i den internationella mätningen TIMSS[2] har de svenska elevernas resultat i algebra legat under det internationella genomsnittet ända sedan 1960-talet (Murray & Liljefors, 1983; Skolverket, 2008; 2012; 2016). Samtidigt som algebra är svårt för många elever anses algebran vara ett mycket centralt område i matematiken och kallas ibland för en ”gatekeeper” (ung. portvakt) till vidare studier i matematik (Kieran, 2007; Matthews & Fuchs, 2020; Schoenfeldt, 1995).

Som ett led i att förbättra svenska elevers kunskaper i algebra har det genom åren genomförts ett flertal olika åtgärder (Hemmi m fl, 2018). Ett exempel är boken *Algebra för alla*[3] (Bergsten m fl, 1997), där titeln beskriver tanken med boken – att algebra ska vara tillgängligt för alla. Boken har använts på lärarutbildningen vid ett flertal lärosäten runt om i Sverige. Ett annat exempel på en åtgärd som syftar till att förbättra elevers kunskaper i algebra är att man i den nuvarande svenska kursplanen i matematik fört in algebra redan i årskurs 1-3 (Bråting, 2019).

Att tidigarelägga algebra följer en internationell trend som brukar kallas för ”*The early algebra movement*” (Kieran m fl, 2016). Grundtanken med tidig algebra är att underlätta övergången från aritmetik till algebra genom att, med utgångspunkt i elevernas kunskaper i aritmetik, tidigt införa ett algebraiskt

[2] TIMSS är en förkortning av Trends in International Mathematics and Science Study. TIMSS föregicks av SIMS (The Second International Mathematics Study) från 1980 och FIMS (The First International Mathematics Study) från 1964. Sveriges resultat hamnade klart under genomsnittet i båda dessa test (Murray & Liljefors, 1983).

[3] Algebra för alla har nyligen uppdaterats och ges nu ut med titeln *Algebra för grundskolan* (Häggström m fl, 2019).

tänkande i matematikämnet (Carpenter & Levi, 2000; Carraher m fl, 2006; Fujii & Stephens, 2001; 2008). Tidig algebra handlar alltså inte om att flytta den algebra som vi alla känner igen från högstadiet eller gymnasiet till tidigare skolår (Carraher m fl, 2008). Istället kan de grundläggande idéerna i algebra, det vill säga det algebraiska tänkandet, introduceras tidigt i skolan utan att det för den skull handlar om formell algebra. Det algebraiska innehållet i de lägre årskurserna i Lgr11 följer detta sätt att se på tidig algebra (Bråting, 2019). Till exempel återfinns mönster som centralt innehåll i algebra redan från årskurs 1 och kopplingen till algebraiskt tänkande beskrivs i Skolverkets kommentarmaterial till matematik på följande sätt:

> Matematiska mönster är ytterligare en aspekt av kunskapsområdet algebra. När eleverna får möta ett innehåll där mönster successivt kan ersättas med tal och bokstavsbeteckningar kan de tillägna sig ett algebraiskt tänkande och kunnande. I årskurserna 1–3 och 4–6 är innehållet hur mönster i talföljder och geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas. (Skolverket, 2017b, s. 16)

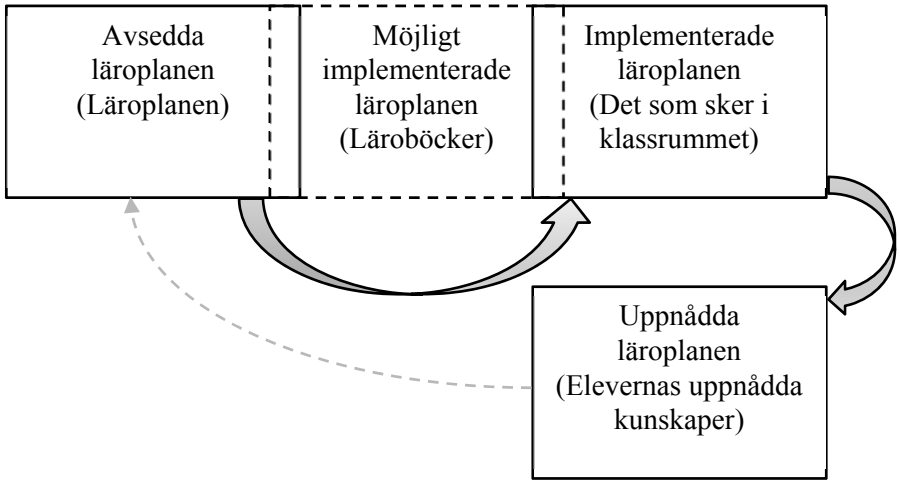
Den här avhandlingen består av två delar, en licentiatavhandling i matematik och en fortsättning i matematikdidaktik[4]. I den matematikdidaktiska delen undersöker jag vilken typ av algebra som förekommer i svenska styrdokument och läromedel för tidiga skolår samt hur denna form av algebraiskt tänkande framträder i elevlösningar beträffande likhetstecknets innebörd.

Licentiatavhandlingen med tillhörande artiklar är ett bidrag till den abstrakta algebran och behandlar främst så kallade divisionsalgebror. I detta matematiska arbete framträder samma algebraiska tänkande som kännetecknar det som inom tidig algebra kallas för *Generaliserad Aritmetik* (Blanton, 2012). I ljuset av den didaktiska delen av denna avhandling visar detta att det går att introducera ett tankesätt i tidiga skolår som även återfinns i matematik på forskarnivå vilket innebär att matematiken i grund och botten skulle kunna ha en gemensam nämnare från de första skolåren ända till forskarstudier vid universitetet. Detta visar även vilken sorts matematisk kunskap som hamnar i förgrunden i denna avhandling, nämligen *konceptuell* kunskap (Hiebert & Lefevre, 1986; Skemp, 1976). Även mitt fokus på centrala matematiska begrepp som likhetstecknet och dess innebörd gör att betoningen i avhandlingen ligger på konceptuell matematisk kunskap till skillnad från procedurell kunskap (Hiebert & Lefevre, 1986). Dessa begrepp förklaras mer ingående i inledningen till avhandlingens *Teoretiska ramar*, men jag vill redan nu poängtera att dessa två begrepp inte ska användas för att värdera kunskap eller för att försöka dela upp all matematisk kunskap i dessa två kunskapstyper. Procedurell och konceptuell kunskap samverkar och viss kunskap skulle även kunna

[4] Studierna i avhandlingens didaktiska del är delar av ett större forskningsprojekt finansierat av Vetenskapsrådet, *Mot en forskningsbaserad undervisning i algebra - Diakrona och synkrona analyser av styrdokument, läromedel och lärares interaktion med dem* (Hemmi m fl, 2018).

tillhöra båda delar (Hiebert & Lefevre, 1986). Trots detta ger denna distinktion möjlighet till att diskutera hur elever lär sig matematik, vilken kunskapssyn som sätts i förgrunden och därmed även vilken kunskap som riskeras att bortses från i samband med tidig algebra.

Forskningsfältet *tidig algebra* kan sägas ha sin början på 1980-talet (Davis, 1985; se även Kieran m fl, 2016). Fältet har därefter sakta växt fram till att nu på senare tid få allt större påverkan på skolmatematiken såväl internationellt som i Sverige (se kapitlet *Bakgrund och tidigare forskning*). Denna påverkan synliggörs genom att många länder, däribland Sverige som jag redan nämnt, har reviderat läroplanerna för att introducera algebraiskt tänkande redan i tidiga skolår. Tidigare har skolalgebran introducerats först på högstadiet. Att implementera förändringar av skolans ämnesinnehåll är dock mer komplext än att enbart ändra text i officiella dokument, så som i kursplaner. Huruvida förändringar får avsedd effekt beror på vad som i slutändan sker i klassrumssituationen (Cohen & Loewenberg Ball, 1990; Hiebert m fl, 2005; Stein & Lane, 1996). Detta faktum kan beskrivas med hjälp av International Association for the Evaluation of Educational Achievements (IEA) tredelade läroplansmodell (Valverde m fl, 2002). I modellen lägger Valverde m fl även till läroböcker som en fjärde dimension i form av den *möjligt implementerade* läroplanen vilken placeras mellan den *avsedda* och den *implementerade* läroplanen. Den tredje dimensionen är den *uppnådda* läroplanen, se Figur 1.



Figur 1:Läroböcker och IEA:s läroplansmodell anpassad till denna avhandling efter Valverde m fl (2002)

Modellen i Figur 1 lyfter fram att läroböcker är medierande artefakter mellan den skrivna läroplanen och läraren i klassrummet och har därigenom en stor påverkan på skolmatematiken (Valverde m fl, 2002). Denna avhandling gör nedslag i flera av dimensionerna i modellen. I Artikel VI analyserar jag

läroplan och läromedel och därmed placeras den artikeln i de två första dimensionerna – den *avsedda* och den *möjligt implementerade läroplanen*. I Artikel VII analyserar jag elevlösningar för att studera elevernas kunskaper om likhetstecknet, vilket placerar artikeln inom dimensionen den *uppnådda läroplanen*. Däremot har inte vad som sker i klassrummet studerats i denna avhandling, men en stor mängd forskning har visat att läroböcker i matematik i stor utsträckning styr matematikundervisningen både internationellt och i Sverige (Ball & Cohen, 1996; Brown, 2009; Jablonka & Johansson, 2010; Johansson, 2006; Lloyd m fl, 2009; Nicole & Crespo, 2006; Remillard m fl, 2014; Stein m fl, 2007; Tarr m fl, 2008). Forskning har även visat att svenska lärares undervisning ofta baseras på läroboken snarare än lärarhandledningen (Boesen m fl, 2014; Engvall, 2013; Hemmi, Krzywacki m fl, 2019; Hemmi & Ryve, 2015; Koljonen, 2017; 2019; Ryve & Hemmi, 2019). Genom att analysera läroböcker framträder därmed en bild av vilka möjligheter som ges genom läromedlet, även om det inte är säkert att dessa möjligheter sedan tillgängliggörs i klassrummet (Hiebert & Grouws, 2007; Remillard, 2000).

Fördelen med att använda modellen i Figur 1 för att rama in denna avhandling är att den framhåller läroböckers medierande roll. Även om andra läroplansteoretiska modeller har likheter med denna modell så framträder den medierande rollen hos läromedel oftast inte lika tydligt. I andra modeller ses läromedel till exempel som en del av en arena (Lindensjö & Lundgren, 2000) eller som en del av en nivå (Goodlad m fl, 1979) och blir därmed inte explicit framträdande i modellerna. Ytterligare en alternativ modell för att rama in avhandlingen ges av Chevallards transpositionsmodell (Chevallard & Bosch, 2014). Denna modell har fördelen att min licentiatavhandling kan placeras som en del av ”scholary knowledge”, men även i denna modell framträder inte läroböckernas medierande roll. Detta gör att den första matematikdidaktiska delstudien därmed inte tydligt kan placeras i transpositionsmodellen.

Den didaktiska delen av denna avhandling är ett bidrag till det matematikdidaktiska forskningsfältet, mera specifikt till forskningsområdet tidig algebra (Kieran m fl, 2016), och rör sig som tidigare nämnt inom tre av fyra delar av den läroplansteoretiska modellen i Figur 1. Såväl läroplaner som läroböcker studeras genom att innehållet klassificeras utifrån Algebrans stora idéer (Blanton m fl, 2015; se även kapitlet *Teoretiska ramar*). Dessutom studeras utfallet i form av hur elever beskriver och arbetar med likhetstecknet. Till det senare har Matthews m fl:s (2012) kunskapsnivåer (se avsnittet *Analysverktyg*) använts som analytiskt verktyg. Det finns flera anledningar till att jag valt ut kunskap om just likhetstecknet. För det första är likhetstecknet framskrivet i den svenska kursplanen i matematik inom det centrala innehållet ”Matematiska likheter och likhetstecknets betydelse” (Skolverket, 2019, s. 55), vilket gör att det är ett begrepp som svenska elever ska ha mött i tidiga skolår. För det andra är likheter ett centralt begrepp inom algebra (Sousa, 2017). Tidig kunskap om vad likhetstecknet innebär har även visats vara en stark prediktor

för elevers prestationer i algebra några år senare (Alibali m fl, 2007; Matthews m fl, 2020).

Dessa studier resulterade i tre artiklar (Artiklar V, VI och VII). Utöver dessa artiklar består avhandlingen även av artiklar med tillhörande licentiatavhandling inom algebra (Artiklar I, II, III och IV). Genom detta upplägg kombinerar avhandlingen det som ibland brukar kallas för "den rena matematiken" med matematikdidaktik för att visa på hur tidig algebra kan medföra att till synes avancerade algebraiska resonemang kan börja framträda redan i tidiga skolår. Det tankesätt som används vid studier av divisionsalgebror (se Artiklar I, II, III och IV), bygger på en grundläggande tanke om algebra som generaliserad aritmetik – en av Algebrans stora idéer (Blanton m fl, 2015) inom det matematikdidaktiska forskningsfältet tidig algebra. Dessa stora idéer ligger till grund för denna avhandling.

Under arbetet med avhandlingen blev det allt tydligare för mig hur dessa stora idéer kan ses som något som finns i all algebra, oavsett om det är så kallad tidig algebra, algebra i senare skolår, algebra inom universitetsmatematik eller inom forskning i matematik. Även om fokus i avhandlingen är grundskolans tidigare år ska avhandlingen läsas med detta i åtanke. Det vill säga, det som med hjälp av Algebrans stora idéer beskrivs i avhandlingen ska ses som en del av en större helhet och ett bidrag till att synliggöra att tidig algebra kan påverka elevers matematiska kunskaper i senare skolår.

Övergripande syfte och frågeställningar

Det övergripande syftet med denna avhandling är att bidra med kunskap om algebraiskt tänkande i den svenska grundskolans tidiga år samt att beskriva hur detta algebraiska tänkande även ligger till grund för universitetsmatematiken. Detta görs genom att analysera innehåll i den svenska kursplanen i matematik och i svenska läroböcker utifrån Algebrans stora idéer samt genom att undersöka huruvida elevlösningar uppvisar en specifik typ av algebraiskt tänkande. Resultaten av undersökningarna diskuteras såväl ur ett nationellt, internationellt som ett matematikdidaktiskt perspektiv. Syftet specificeras genom avhandlingens tre frågeställningar:

1. Vilken sorts algebraiskt tänkande är gemensamt för den tidiga algebran och algebra på universitetsnivå?
2. Vilka möjligheter till tidig algebra erbjuds i svenska kursplanen i matematik och läroböcker i matematik för skolans tidiga år?
3. Hur beskriver svenska elever likhetstecknets betydelse och vilken innebörd av likhetstecknet framkommer i deras uppgiftslösningar?

Kappans disposition

Detta kapitel inleddes med en översikt över avhandlingens positionering inom det matematikdidaktiska forskningsfältet. Vidare beskrevs avhandlingens övergripande syfte och frågeställningarna presenterades. Nästkommande kapitel behandlar *Bakgrund och tidigare forskning*, där jag förklarar för avhandlingen relevanta matematiska begrepp samt ger en översikt över både utvecklingen av tidig algebra som forskningsfält och för avhandlingen relevant forskning om tidig algebra. Därefter behandlas avhandlingens *Teoretiska ramar*, vilka består av *Algebrans stora idéer*.

Avhandlingens fjärde kapitel, *Metodologi*, behandlar de metoder, inklusive urval och analysverktyg, som använts vid de olika delstudierna. I kapitlet diskuteras även de etiska aspekter som är relevanta för studierna. Kapitlet avslutas med de avgränsningar jag har nödgats göra i arbetet med denna avhandling. Femte kapitlet innehåller en *Sammanfattning och resultat av artiklarna* som ingår i avhandlingen. Först beskrivs de matematiska artiklarna och licentiatavhandlingen gemensamt, därefter beskrivs var och en av de didaktiska artiklarna. Avhandlingen avslutas med en *Avslutande diskussion* av resultaten, didaktiska implikationer av dessa samt förslag på vidare forskning.

Bakgrund och tidigare forskning

I detta kapitel behandlar jag såväl bakgrund som tidigare forskning angående tidig algebra och närbesläktade forskningsämnen. Jag inleder med en beskrivning av för avhandlingen centrala matematiska begrepp och hur begrepp på engelska används i denna avhandling. Under rubriken *Utvecklingen av forskning kring tidig algebra under det senaste seklet* beskriver jag kortfattat uppkomsten och utvecklingen av detta forskningsfält. Därefter lyfter jag fram för avhandlingen relevant *Modern forskning om tidig algebra*. Avslutningsvis genomförs en *Sammanfattning* av kapitlet.

Centrala begrepp och begreppsanvändning

I detta avsnitt förklaras de matematiska begrepp som är av vikt för denna avhandling, det vill säga matematiska begrepp kopplade till skolalgebra. De didaktiska begrepp som används i avhandlingen förklaras däremot inte i detta avsnitt utan är en del av avhandlingens teoretiska ramverk.

För att underlätta för läsaren kommer jag även att översätta alla engelska begrepp till svenska. Till exempel kommer ”Big Ideas” (Blanton m fl, 2015) skrivas som ”Algebrans stora idéer” eller enbart ”stora idéer” och det väl vedertagna begreppet ”early algebra” (Kieran, m fl, 2016) översätts således till ”tidig algebra”. Vissa förkortningar kommer ändå att vara den engelska förkortningen, trots att förkortningen skulle se annorlunda ut på svenska. Ett exempel på detta är EEEI, vilket är en förkortning för ”*Equivalences*, *Expressions*, *Equations* and *Inequalities*” (Blanton m fl, 2015). Även om den svenska förkortningen borde vara EUEO – *Ekvivalenser*, *Uttryck*, *Ekvationer* och *Olikheter* – så väljer jag att hålla kvar vid EEEI av den enkla anledningen att förkortningen är internationellt vedertagen.

Vad som är algebra respektive skolalgebra är inte helt enkelt att definiera (Usiskin, 1988). Ofta beskrivs att skolalgebra till stor del handlar om bokstäver och att manipulera symboler (Stephens, 2008; Usiskin, 1988), vilket innebär att *variabler* och hantering av dessa hamnar i förgrunden. Variabler förekommer dock i många olika algebraiska sammanhang och får, beroende på sammanhanget, olika innebörd. I linje med detta kommer jag inleda med att förklara begreppen uttryck, likheter, ekvivalenser, ekvationer och olikheter för att därefter behandla variabler och därigenom återkoppla till hur variabler

framträder i de tidigare förklarade begreppen. Avslutningsvis beskriver jag mönster både ur ett allmänt och ett skolmatematiskt perspektiv.

Uttryck

De flesta har troligtvis en god bild av vad ett (matematiskt) *uttryck* är, men det kan vara svårare att sätta ord på denna intuitiva bild. Ett uttryck kan rent allmänt beskrivas som en ”meningsfull sammanställning av tecken” (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 21), vilket egentligen räcker bra som beskrivning. Mer specifikt innebär det att ett matematiskt uttryck är en sammanställning av matematiska symboler, det vill säga att ett utryck kan bestå av siffror som bygger upp tal och symboler för variabler och räkneoperationer. Om ett uttryck saknar variabler, exempelvis uttrycket $3 + \sqrt[3]{64} - 1/8$, kallas det för ett *aritmetiskt uttryck*. På motsvarande sätt är ett *algebraiskt uttryck* ett uttryck där variabler förekommer (Kiselman & Mouwitz, 2008). Uttryck kan sedan användas för att till exempel bygga upp likheter, olikheter och ekvationer. Likheter är i sin tur en mycket begränsad form av ekvivalens.

Likheter och likhetstecknet

Ett av de för avhandlingen mest centrala begreppen är likhetstecknets *relationella* egenskap. Att likhetstecknet innebär en relation betyder att likhetstecknet symboliserar att två objekt är identiska (Kiselman & Mouwitz, 2008). Att så är fallet syns redan i den allra första beskrivningen av symbolen ”=”, vilken härstammar från den walesiske matematikern Robert Recorde (1557). Recorde beskriver införandet av likhetstecknet på följande sätt:

> To avoide the tediouse repetition of these words: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles or Gemowe lines of one lengthe thus =, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. (s. 118, vänster sida) [5]

I samband med införandet av likhetstecknet beskriver Recorde även hur samma operation på båda sidor om tecknet bevarar likheten. Det vill säga, att likhetstecknet beskriver en relation mellan uttrycken på de två sidorna om likhetstecknet. I enlighet med ovanstående kommer jag i denna avhandling beskriva andra tolkningar än en relationell tolkning av likhetstecknet som formellt felaktiga. Detta trots att likhetstecknet i vissa situationer, till exempel vid aritmetiska beräkningar eller vid derivering av funktioner, kan tolkas som att det har en operationell innebörd (Prediger, 2010).

En *likhet* är en relation som innebär att två objekt är identiska (Kiselman & Mouwitz, 2008). Ett exempel på detta är likheten 13 = 13. En annan form av

[5] Sidorna i boken är onumrerade. Sidnumret hänvisar till sida i pdf-filen.

likhet är $x + 2 = y + 7$, vilket å ena sidan innebär att de två algebraiska uttrycken $x + 2$ och $y + 7$ representerar exakt samma objekt och därmed är en likhet. Å andra sidan är dessa uttryck uppenbart olika så i en strikt mening är detta inte en likhet, utan en ekvivalens. Denna form av likhet kan även ses som en ekvation, vilket beskrivs nedan efter att ekvivalenser har förklarats.

Ekvivalenser

En *ekvivalens* ses som en mer generell likhet där objekten är lika om det bortses från oviktiga egenskaper. Vilka dessa oviktiga egenskaper är framgår av sammanhanget. Gattegno (1974) uttrycker detta som att en ekvivalens är en bredare relation än en likhet och att ekvivalens innebär att för vissa syften så är det möjligt att ersätta ett objekt med ett annat. Således är det sammanhanget som avgör om det är en likhet eller en ekvivalens. Likheten 13 = 13 ser uppenbarligen ut som just en likhet, det är exakt samma tal på båda sidor likhetstecknet. Det finns ändå åtminstone en skillnad mellan de två ”13” i likheten och det är att de har olika position på detta papper. Därmed är de alltså inte helt identiska. Denna positionsegenskap är i det här fallet så uppenbart oväsentligt att vi ändå säger att talen är lika. Så vad som är en likhet och vad som är en ekvivalens beror helt på vad som avses med identiskt. Därmed kan $1 + 4 = 3 + 2$ både ses som en likhet och en ekvivalens beroende på hur vi tolkar innebörden av ett uttryck. Utgår vi från uttryck och inte dess värden så är uttrycken ekvivalenta, men utgår vi från uttryck som representanter för värden så är detta en likhet. Enligt mig visar detta exempel även att en strikt tolkning av skillnaderna mellan ekvivalens och likhet inte alltid är nödvändig eller ens lämplig. Med ett sådant synsätt blir det underförstått att det som kallas för en likhet mycket väl egentligen skulle kunna vara en ekvivalens och inte en likhet. För mig är skillnaden mellan dessa två begrepp att vissa egenskaper är tillräckligt oväsentliga för att de i ett givet sammanhang inte kommer väcka någon som helst uppmärksamhet. Objekten är då så pass identiska att det kan kallas för en likhet istället för en ekvivalens. Det innebär alltså att det är sammanhanget som är avgörande för vad som är likhet eller ekvivalens. Jag kommer fortsättningsvis använda begreppen likhet och ekvivalens i enlighet med detta. För att ytterligare förtydliga vad en ekvivalens innebär ger jag några exempel på ekvivalensrelationer och noterar speciellt vilken eller vilka oväsentliga egenskaper som reduceras bort i och med ekvivalensrelationen.

Det första exemplet är den så kallade moduloräkningen, vilket lite löst kan beskrivas som räkning med rester vid division med ett visst heltal. Mer formellt innebär det att två heltal x och y är *kongruenta* modulo n, viket skrivs $x \equiv y (\mathrm{mod}\ n)$, om och endast om $x = y + kn$, för något heltal k. Detta får som följd att x och y ger upphov till samma rest vid division med n. Till exempel är talen 6 och 11 kongruenta modulo 5 eftersom båda ger resten 1 vid division med 5. I detta sammanhang är alltså den oväsentliga informationen multiplar av 5 och det enda som är intressant är den kvarvarande termen, det vill säga

resten vid division med 5. Så alla tal 1, 6, 11, 16 och så vidare kan i detta fall ersättas med 1 då alla dessa är kongruenta modulo 5. Däremot är de såklart inte lika då de betecknar olika objekt. Kongruens är ett alltså ett exempel på en ekvivalensrelation eftersom objekten inte är identiska, men om en oväsentlig egenskap bortses så kan de olika objekten ersätta varandra.

Ett annat exempel på en ekvivalensrelation är likformighet inom geometri. Två geometriska objekt är likformiga (ekvivalenta) om de har exakt samma form. I detta fall är till exempel storlek på objekten, objektens position och hur de är roterade oväsentliga egenskaper som bortses från.

Efter ovanstående förklaring av uttryck, likheter och ekvivalenser återstår det att förklara ekvationer och olikheter innan variabler beskrivs.

Ekvationer och olikheter

En *ekvation* är en ”matematisk utsaga som innehåller en likhet” (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 94). En ekvation signalerar att det finns en lösning, vilket är det eller de tal som gör att likheten är sann, men om likheten aldrig kan vara sann sägs ekvationen vara *olösbar*. Exempel på ekvationer finns i Tabell 1 nedan.

Språkligt sett tyder en *olikhet* på något som inte är lika. Även om en olikhet beskriver en ”logisk relation som innebär att två objekt inte är identiska” (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 60), så är begreppet mer komplext än så. I sin enklaste form beskriver en olikhet storleksförhållandet mellan två tal, till exempel att $2 < 4$. Det kan även beteckna enkla olikheter som $x < 4$, där olikheten i detta fall anger att talet x är mindre än 4. Det vanligaste är ändå att det som avses med en olikhet är en slags ekvation, där lösningen ges av en eller flera enkla olikheter.

Variabler

I tidigare begreppsförklaringar har *variabler* använts, dock utan att nämna ordet variabel explicit och troligtvis utan att du som läsare reagerat på det. Dessa förklaringar visar även att en variabel kan användas i olika sammanhang och då ha olika innebörd, vilket sammanställs i Tabell 1 och förklaras mer detaljerat nedanför tabellen.

En variabel definieras som en ”storhet som kan anta värden i en given mängd” (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 21). Detta innebär att variabeln inte betecknar objektet i sig, utan enbart dess *värde*. Ordet värde signaler att det är ett numeriskt värde, men så behöver inte nödvändigtvis vara fallet. Några exempel på storheter är fart och hastighet. Skillnaden mellan fart och hastighet är att farten är ett enda värde, hur fort någonting rör sig, medan hastighet är kombinationen fart i en viss riktning. Hastighet är därmed ett exempel på en storhet som är en vektor och inte kan betecknas med ett enda numeriskt värde. Hastighet kan till exempel beskrivas med en vektor, där vektorns *längd* visar

hur fort ett objekt rör sig och vektorns *riktning* ger då självfallet vilken riktning objektet förflyttar sig i.

Tabell 1: Olika användningsområden för variabler

Exempel	**Betydelse**
$a + b = b + a$ $(a + b) + c = a + (b + c)$	Variabler i *matematiska lagar* och *samband*. I detta fall kommutativa och associativa lagarna för addition. Dessa variabler beskriver alla ett *godtyckligt* tal, men de varierar inte.
$3a + 2 = 14$ $b^2 = 16$ $c = c + 1$ $x = x$ $2d < 4 +$ d	Variabler i samband med *ekvationer* och *olikheter*. Exemplen visar fyra ekvationer och en olikhet.
$y = 3x + 2$ $f(x) = 3x + 2$	Variabler i samband med *funktioner*. Variablerna beskriver här en samvariation.
$3n + 2$ $ax + b$	Variabel i ett *uttryck*. Variablerna n och x kan här ses som en platshållare för ett *obekant tal*. De två variablerna a och b betecknar *parametrar.*
$c = c + 1$	Variabler i samband med *programmering*. Exemplet ska tolkas som en *tilldelning* av ett värde.

Tabell 1 visar fem olika tolkningar av variabler. Den första tolkningen av variabler i sammanhanget *matematiska lagar* och *samband* innebär att variablerna betecknar godtyckliga tal, men de varierar inte.

Variabler i samband med *ekvationer* och *olikheter* exemplifieras i Tabell 1 med fyra ekvationer och en olikhet. I detta sammanhang kan variabeln anta alla de värden som gör att likheten eller olikheten är sann. Variabeln kan på så sätt beskrivas som en symbol för ett eller flera *obekanta tal*. Variabeln kan även beteckna noll eller oändligt många värden, vilket åskådliggörs i och med de olika exemplen. Variabeln a i ekvationen $3a + 2 = 14$ kan anta ett värde ($a = 4$). I nästa exempel, $b^2 = 16$, kan variabeln anta två värden ($b = \pm 4$). Den tredje ekvationen, $c = c + 1$, saknar lösning, vilket innebär att c inte kan anta något värde alls. Den sista ekvationen, $x = x$ är en så kallad *identitet* (Kiselman

& Mouwitz, 2008), det vill säga den är sann för alla värden på x. Avslutningsvis visar olikheten $2d < 4 + d$ att en variabel kan anta oändligt många värden ($d < 4$) i detta sammanhang.

Den tredje tolkningen av variabler görs i samband med funktioner. Vid funktioner som $f(x) = 3x + 2$ (som även brukar skrivas $y = 3x + 2$) är x en *oberoende* variabel och y eller $f(x)$ *beror* på x. Detta innebär att variablerna *samvarierar*. Däremot uppstår en annan situation när ett funktionsvärde ska beräknas. Om vi till exempel sätter $x = 2$ finns inte längre någon variation och istället övergår variabeln y eller $f(2)$ till att beteckna ett obekant tal, precis som för variabler i uttryck.

I *uttrycket* $ax+b$ är x en variabel, medan a och b betecknar *parametrar*. Att a och b är parametrar innebär att de är variabler ”som är konstant[a] under en viss process men som ändå kan ändras” (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 18). Det vill säga, uttrycket kan studeras för olika värden på konstanterna a och b. Här har a och b olika innebörd beroende på om vi arbetar med dem som parametrar i allmänhet, det vill säga att de kan ändras och anta olika värden, eller om vi behandlar dem som givna, men obekanta, tal.

Det sista exemplet ska ses i ett *programmeringssammanhang*. Även om $c = c + 1$ är skrivet på exakt samma sätt som den olösliga matematiska ekvationen $c = c + 1$ så är innebörden en helt annan. Skillnaden mot situationen med ekvationen är att givet programmeringsspråkets *syntax* så ska först befintligt värde i variabeln c (på höger sida om likhetstecknet) ökas med ett. Därefter *tilldelas* c (på vänster sida om likhetstecknet) detta beräknade värde. I programmeringssammanhang används likhetstecknet ibland som en *tilldelningsoperator* och inte som en relationell likhet (Bråting & Kilhman, 2020).

Förutom att de olika exemplen på variabler visar att sammanhanget avgör variabelns innebörd visar de även att variabeln kan ändra innebörd om situationen ändras under det pågående arbetet. Detta framkom såväl vid beräkning av funktionsvärde (från samvarierande variabler till en variabel som obekant tal) som det fall då en variabel betecknar en parameter.

Mönster

Det sista begreppet jag diskuterar i detta avsnitt är *mönster*. I de enklaste fallen kan mönster beskrivas som en serie eller en sekvens som upprepas. Dessa mönster brukar beskrivas som AB, ABC eller ABB (Markworth, 2016). Ett exempel på mönstret AB är färgmönstret röd, blå, röd, blå och så vidare, det vill säga att två färger upprepas. På motsvarande sätt ges ABC av mönster som röd, blå, gul, röd, blå, gul och ABB av röd, blå, blå, röd, blå, blå. I mönstret röd, blå, röd, blå … drar vi alla troligtvis slutsatsen att nästa färg kommer vara röd och därefter kommer återigen blå för att fortsätta på samma sätt.

Mönster i skolmatematiken kan även finnas i en *talföljd*. En talföljd är egentligen precis det som namnet antyder, det vill säga en ”följd av tal” (Ki-

selman & Mouwitz, 2008, s. 112). Det behöver alltså inte finnas något mönster i en talföljd. De talföljder som avses i den här avhandlingen är däremot de specifika talföljder i vilka det finns ett mönster. Ett mönster i dessa fall utgår från en regel som upprepas. Exempel på sådana talföljder är *aritmetiska* och *geometriska* talföljder, det vill säga talföljder där *differensen* respektive *kvoten* av två på varandra följande tal är konstant (Kiselman & Mouwitz, 2008; se även Bråting m fl, 2017). Ytterligare exempel på en talföljd är 1, 4, 9, 16 … där regeln består i att ett tal beskrivs genom talets position i kvadrat.

Ovanstående är två olika sorter av mönster, men de har tydliga gemensamma inslag som skulle kunna beskrivas generellt. En sådan generell beskrivning av mönster ges av Resnik (1981) genom formuleringen att ”ett mönster är en komplex entitet som består av ett eller flera objekt, vilka jag kallar *positioner*, stående i olika relationer” (s. 532, min översättning). Kärnan i denna definition är att alla mönster innehåller en *relation*. Jag väljer att följa denna definition av mönster på grund av att definitionen är allmänt hållen och därmed fungerar för allehanda typer av mönster. I detta avsnitts första exempel är med Resniks (1981) terminologi positionerna *färger* och relationen att *varannan färg är röd och varannan blå*. I exemplet med kvadrattalen är positionerna *tal* och relationen att *talet är kvadraten på positionens plats* i talföljden.

Utvecklingen av forskning kring tidig algebra under det senaste seklet

Forskning om tidig algebra var inget som utan förvarning uppstod i slutet av 1900-talet utan kan ses som en naturlig utveckling av skolalgebraisk forskning under det senaste seklet. Under första halvan av 1900-talet handlade denna forskning till stor del om svårigheter i algebra, mera specifikt i de senare skolåren eftersom algebra under den tiden inte undervisades i tidiga skolår (Kieran, 2007). Ett exempel på detta är Monroes (1915) forskning som visar att algebraiska manipulationer och ekvationslösning kräver att eleven rutinmässigt bemästrar detta, precis som det krävs att elever kan multiplikationstabellerna utantill. Här finns inget spår av ett algebraiskt tänkande, utan fokus är på *görandet*, det vill säga att rutinmässigt kunna utföra uppgifterna. Algebra hade då sin givna plats i de senare skolåren och vid universitetet, men detta kom att förändras under 1960-talet. I samband med den så kallade Sputnikkrisen kom USA och Västeuropa att satsa på naturvetenskap, teknik och matematik i ett försök att komma ikapp Sovjetunions försprång i rymdteknologi (Kilpatrick, 2012; se även Kay, 2013; Kilborn, 1977; Unenge, 1999). Västvärlden i övrigt, inklusive Sverige, följde efter de amerikanska satsningarna med liknande förändringar i skolsystemen (Kilpatrick, 2012; Landahl, 2017;

Lenz, 2015). Sputnikkrisen skulle på så sätt även kunna ses som startskottet för forskning angående tidig algebra, även om forskningen då handlade om huruvida algebra bör spridas över i princip alla skolår (Davis, 1995). Här framträder början till en förskjutning av algebran mot tidigare skolår, även om forskning kring svårigheter i algebra fortfarande bedrevs och bedrivs än idag. Denna förskjutning av algebra mot tidigare skolår är en del av den så kallade *nya matematiken*, vilken främst har blivit känd för sitt fokus på mängder och mängdlära (Prytz, 2017).

1960-talet och algebra i den nya matematiken

Mängder och mängdlära var inte det enda som var nytt i den nya matematiken. I detta för skolan nya matematiska innehåll är även *abstrakt algebra* och *boolesk algebra* framskrivet (Kline, 1973), vilket tyder på intentionen att tidigarelägga universitetsalgebra till skolan även om just denna typ av algebra behandlades i skolans senare år. Till exempel finns boolesk algebra inkluderat i kursplanen för gymnasiets digitalteknik i samband med gymnasieutredningen 1960 (SOU 1963:42).

Abstrakt algebra innebär studier av olika matematiska strukturer, till exempel *kroppar*. En kropp kan beskrivas som en mängd där multiplikation, division, addition och subtraktion är definierade och dessa räknesätt beter sig på samma sätt som de fyra räknesätten gör på de reella talen. Några exempel på kroppar är de reella talen, de komplexa talen samt de rationella talen tillsammans med de vanliga fyra räknesätten. Se även min licentiatavhandling (Artikel III), där jag i kapitel 1-5 kortfattat behandlar algebror över godtyckliga kroppar, med karaktäristik skild från 2, för att sedan använda detta som grund för divisionsalgebror över de reella talen.

Boolesk algebra används inom vitt skilda områden som exempelvis biologi, kemi, design av elektroniska kretsar och datavetenskap (Givant & Halmos, 2009). Just dess användning inom design av elektroniska kretsar och datavetenskap var anledningen till att boolesk algebra var en del av innehållet i den nya matematiken (Kline, 1973). Boolesk algebra beskriver hur det är möjligt att räkna med satslogik (Givant & Halmos, 2009). Här översätts en sats (ett påstående) sanningsvärde till 1 för sant och 0 för falskt. Dessa värden kan sedan användas för att beräkna sanningsvärdet för olika kombinationer av satser. Om a och b är logiska satser innebär till exempel den logiska operatorn *eller* (betecknas $\vee$) att $a \vee b$ är sant om minst en av a och b är sann, annars falskt. Denna logiska operation kan översättas till vanlig addition $a + b$ med undantaget att $1 + 1 = 1$. På motsvarande sätt går det att beräkna värdet av andra logiska operationer. Värt att notera är att boolesk algebra och dess operationer *och*, *eller* samt *negation* är ekvivalenta med mängdalgebra och operationerna *snitt*, *union* respektive *komplement* (Givant & Halmos, 2009; Kline, 1973). Det innebär att genom den nya matematiken mötte elever tidigt

samma tankar som finns i boolesk algebra genom att de undervisades i mängdlära.

Att abstrakt algebra och boolesk algebra var delar av innehållet i den nya matematiken är alltså ett exempel på hur vissa delar av universitetsmatematiken tidigareläggs. Detta innebär även att det är matematikens underliggande struktur som är i förgrunden, vilket Cai m fl (2010) beskriver som att närma sig matematiken *strukturellt*. Förutom att den nya matematiken innebar en förskjutning av när algebra introduceras i skolan så innehöll den nya matematiken även ett förändrat arbetssätt (Prytz, 2017). Bland annat skulle elever lära sig genom att upptäcka och förstå matematiken (Corle, 1964), till exempel genom att ta fram hypoteser utifrån ett givet problem och sedan kontrollera om hypoteserna är sanna. Här framträder en idé om att matematik mer är ett sätt att tänka än något befintligt som återupprepas, men fortfarande med den formella matematiken som utgångspunkt. Trots stor kritik från flera håll genomfördes läroplansreformer i stora delar av västvärlden i riktning mot denna nya matematik. Det dröjde inte länge efter införandet innan kritiken mot den nya matematiken och framför allt mängdläran som inslag i skolmatematiken blev allt kraftigare.

1970-talet och Piagets stadieteori

Under första halvan av 1970-talet utlöste kritiken mot den nya matematiken en motreaktion på det som kan beskrivas som en ”[ö]verteoretisering av den elementära matematikundervisningen” för att använda Lindströms (1968) boktitel. Fokus skiftade nu till primärt två saker. Det första är att Sverige och västvärlden i stort återigen följer USA med ett fokus på problemlösning i skolmatematiken (Unenge, 1999). Det andra är att överteoretiseringen ledde till att forskning och debatt även kom att handla om när barn är mogna för att kunna lära sig viss matematik. Genom detta skifte får Piagets stadieteori stort genomslag och blir på sätt och vis startskottet för det som under 1980-talet leder till utvecklingen av ”modern” tidig algebra (Kieran, 2007).

Utan att gå in på djupet av Piagets teori är det värt att nämna att en del av denna teori är att kunskapsutvecklingen sker i stadier (Piaget, 1952). Till exempel börjar enligt Piaget barnet bygga upp sin begreppsbild av tal utifrån konkreta objekt. Steg för steg blir barnet sedan i sin utveckling allt mer frigjord från de konkreta objekten och att fysiskt arbeta med dessa. Slutligen kan barnet arbeta med talen mentalt utan att behöva några fysiska föremål. Detta exemplifierar att allt har sin specifika plats i kedjan av barnets utveckling (Piaget, 1952). Synsättet om en viss ordning i utvecklingen och lärandet kan skönjas även i den tidiga algebran, till exempel genom att generalisering efterföljer arbetet med det specifika. Det finns även en tanke i Piagets teori om att den kognitiva utvecklingen skulle kunna påskyndas genom de yttre förutsättningarna för barnet (Kamii, 1982), men även om utvecklingen kan påskyndas så följer den oavsett detta en given ordning.

1980-talet och en början till modern tidig algebra

Piagets teori har kritiserats såväl för att underskatta yngre barns förmåga (Gelman & Gallistel, 1978/1986; Gelman m fl, 1986) som att överskatta vad äldre barn klarar av (Eggen & Kauchak, 2004). Kritiken mot denna teori blev allt mer intensiv under 1980-talet. Sfard (2008) uttrycker att det teoretiska tomrum som uppstod för de som då övergav Piagets teori behövde fyllas med något annat. Vygotskij, som motsade Piaget på många punkter, blev då ett enkelt val för dessa personer. I och med detta fylldes tomrummet med Vygotskijs princip att alla mänskliga processer är av social natur (Sfard, 2008; se även Vygotskij, 1930-1934/1978). Effekten av denna kritik mot Piagets teori och den efterföljande övergången till ett mer sociokulturellt perspektiv kan tydligt ses inom forskning om den tidiga algebran. Tidig algebra utgår från att även yngre barn kan lära sig tänka algebraiskt och de gör det i ett *samspel* med läraren och klasskamraterna.

Innan denna utvecklingsprocess av tidig algebra kunde uppstå behövdes såklart en start. En viktig tidig inspirationskälla, som kanske till och med skulle kunna ses som en formell start, till den tidiga algebran är konferensen ICME-5 i Adelaide 1984 (Kieran m fl, 2016). Vid denna konferens fanns det som kallades för en ”action group” i algebra riktat mot ålderskategorin 7-12 år (Carss, 1986). Det är värt att notera att det vid denna tid inte var en enhetlig utgångspunkt för diskussionerna. För att undvika den förvirring som kunde uppstå på grund av olika syn på vad algebra innebär ändrades namnet till ”Developing Algebraic Thinking in Younger Students” (Davis, 1985). Redan här framkommer det att tidig algebra inte handlar om algebra med formella symboler utan om ett sätt att tänka.

Olikheterna i grundsynen på vad algebra innebär bestod i att en del forskare fokuserade på *utvecklingen* från aritmetik till algebra medan andra forskare betonade *likheterna* mellan aritmetik och algebra. Det förstnämnda synsättet innebar att eleverna kommer att behöva ändra sina uppfattningar om olika matematiska begrepp allt eftersom nya situationer uppstår (t ex Filloy & Rojano, 1989). Det andra synsättet, vilket betonade likheterna mellan aritmetik och algebra, innebar istället att fokus ligger på kontinuiteten i matematiken och likheterna mellan de matematiska strukturerna (t ex Kieran, 1989). Även om grundsynen var olika mynnade diskussionerna vid ICME-5 ut i en samsyn om att algebraundervisningen behövde reformeras (Davis, 1985). Det som gruppen vid ICME-5 rekommenderade var att *nyckelbegrepp* i algebra behövde identifieras och att yngre elever skulle ges möjlighet att bygga upp en korrekt bild av dessa begrepp. Denna process behövde *individualiseras* så att varje elev kan förstå begreppen utifrån sina egna förutsättningar. Vidare skulle eleverna fås att *reflektera* över vad de gör och slutmålet kan sammanfattas med att det skulle hjälpa eleverna framåt och med tiden utveckla ett allt mer *kraftfullt verktyg* för matematiken (Davis, 1985). Vidare rekommenderades att en

lämplig undervisningsstrategi vore att låta eleverna upptäcka matematiken genom att de själva får *uppfinna* lösningsmetoden istället för att få den presenterad för sig. Det fanns även en samsyn om att formell algebra inte hör hemma i tidigare skolår. Sammantaget visar detta att vid denna tidpunkt börjar ett helt nytt forskningsområde ta form. Att detta var något stort märkte även deltagare vid konferensen och en av dessa uttryckte det med orden ”This marks the birth of mathematics education as a serious discipline” (Davis, 1985, s. 204).

1990-talet och den moderna tidiga algebran

Processen som påbörjades under 1980-talet mynnar slutligen ut i det som ses som tidig algebra idag. Det vill säga, att det är ett algebraiskt tanke- och arbetssätt som tidigareläggs och inte den formella algebran (Blanton & Kaput, 2005; Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019; Britt & Irvin, 2011; Cai & Moyer, 2008; Davis, 1985; Hewitt, 2014; Kaput, 2008; Kieran, 1989; 1992; Kieran m fl, 2016). I detta sätt att tänka algebraiskt ingår bland annat att utifrån det man redan känner till ta fram en hypotes, beskriva denna och även motivera om hypotesen är korrekt eller ej (Blanton m fl, 2015; Kaput, 2008; Kieran m fl, 2016). Forskning om skolalgebra under 1980- och 1990-talen visar även att många elever har problem med övergången från aritmetik till algebra (Kieran, 1981; 1992; Linchevski, 1995; Linchevski & Herscovics; 1996; Usiskin, 1988; Wagner & Kieran, 1989). Ett viktigt bidrag i denna forskning är Kierans (1989; 1992) studier som tydligt visar att problemen i algebra till stor del beror på hur aritmetik lärs ut i skolan. Kieran hänför problemen i övergången från aritmetik till algebra till en undervisningstradition i aritmetik som inte behandlar matematikens *relationella* aspekter utan enbart fokuserar på själva beräkningarna (Kieran, 1989; 1992).

Betoningen av relationella aspekter av matematiken innebär en förflyttning från den nya matematikens strukturella sätt att närma sig matematik till det Cai m fl (2010) beskriver som ett *funktionellt perspektiv* på matematik. Dessa resultat leder vidare till synsättet att en förutsättning för att problem ska kunna uppstå i en övergång mellan aritmetik och algebra är att en sådan övergång överhuvudtaget existerar. Genom att inta en ny position och inte se uppdelningen som given kan en annan bild av skolmatematiken framträda. Då kommer istället uppdelningen att te sig som artificiell (Carpenter & Levi, 2000; Carraher m fl, 2006; Fujii & Stephens, 2001; 2008). Med artificiell avser jag att problem i algebra inte uppstår på grund av att det skulle finnas en övergång mellan aritmetik och algebra. Istället beror problemen på att den kontinuitet som finns i matematiken inte blir synlig på grund av såväl missade tillfällen till *generaliseringar* som elevers *felaktiga uppfattningar* om matematiska begrepp och notationer i tidiga skolår (Carraher m fl, 2006). Bland annat visas att uppfatta likhetstecknet som något som ger *svaret* på något istället för att innebära en *relation* orsakar problem när elever möter mer formell algebra

(Cai m fl, 2005; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 1981; 1989; 1992; Li m fl, 2008).

När det gäller *generaliseringar* visar Kaput (1995) att barns tidiga försök att generalisera sker muntligt snarare än skriftligt med algebraiska symboler. Här har lärare en viktig roll genom att de både behöver skapa och identifiera möjligheter till generalisering i tidigare skolår. Det vill säga, eleverna behöver ledas till att, från det specifika, upptäcka det generella och på så sätt förberedas för en mer formell algebra i framtiden. I viss mån framträder även *formalisering* då dessa generaliseringar senare formellt kan beskrivas genom det algebraiska språket (Bastable & Schifter, 2008). Detta synsätt på tidig algebra leder sedan fram till Kaputs (2008) *innehållssträngar* (*content strands*) och *grundläggande aspekter* (*core aspects*) i algebra. Med avstamp i dessa begrepp utvecklar sedan Blanton m fl (2015) *Algebrans stora idéer*. Såväl innehållssträngar och grundläggande aspekter som Algebrans stora idéer beskrivs ingående i avsnittet *Teoretiska ramar*.

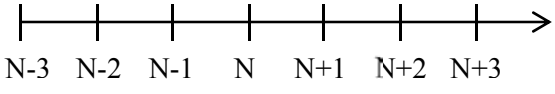
Det är viktigt att understryka att tidig algebra inte innebär ”algebra tidigt” (Carraher m fl, 2008). Det vill säga, till skillnad från tidig algebra på 1960- och 1970-talet handlar den moderna tidiga algebran inte om att flytta algebra från högstadiet och gymnasiet till tidiga skolår. Denna moderna syn på tidig algebra har fått stort genomslag internationellt och har getts namnet ”*The Early Algebra Movement”* (Kieran m fl, 2016). I nästkommande avsnitt behandlar jag modern forskning kring tidig algebra av relevans för denna avhandling.

Modern forskning om tidig algebra

Det som kännetecknar tidig algebra, som den beskrivs i den moderna forskningslitteraturen, är att den utgår från elevernas kunskaper om aritmetik för att tidigt införa ett algebraiskt tänkande. Ett sådant arbetssätt syftar till att undvika en alltför strikt övergång från aritmetik till algebra och därigenom eliminera de problem som kan uppstå när dessa matematiska områden behandlas separat från varandra (Carpenter & Levi, 2000; Carraher m fl, 2006; Fujii & Stephens, 2001; 2008). Denna forskning är relativt ny och historiskt sett har, som tidigare nämnts, forskning om algebra i skolan ofta fokuserat på svårigheter i såväl specifikt algebra som matematik i allmänhet (Kieran, 2007). Svårigheterna undersöks genom att studera de fel eleverna gör (t ex Booth m fl, 2014; Clement, 1982; Laursen, 1978; Molina m fl, 2017; Monroe, 1915). Till exempel visar Clement (1982) hur elever felaktigt generaliserar algoritmer och minnesregler till situationer där dessa inte fungerar. Det vill säga, eleverna försöker hitta samband mellan olika matematiska situationer, men skapar då samband som inte existerar. Som exempel på detta ger Clement den så kallade korsmultiplikationen där $\frac{a}{b}/\frac{x}{y}$ beräknas genom att multiplicera i ett kors, det

vill säga ay och bx vilket sedan ger kvoten $\frac{ay}{bx}$. Denna minnesregel riskerar att tillämpas även för de övriga räknesätten och därmed kan till exempel felaktigheter som $\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = ay - bx$ uppstå (Clement, 1982).

Istället för att primärt studera de fel eleverna gör i algebra fokuserar forskning om tidig algebra på hur elever kan stöttas i sin utveckling av algebraiskt tänkande. På så sätt blir den formella algebran en förlängning av det eleverna kan sedan tidigare istället för något nytt som kräver att eleverna byter tankesätt (Kieran, 2018). Ett genomgående resultat i denna forskning är att barn tidigt är kapabla att generalisera och till viss del även använda ett algebraiskt symbolspråk (Carraher m fl, 2006; Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019). Förutom att visa att barn tidigt är kapabla att generalisera visar Carraher m fl (2006) även möjligheter till en ”algebrafiering” av aritmetik där symboler för variabler introduceras i tidiga skolår. Bland annat visar Carraher m fl att elever i årskurs 2 kan förstå hur den vanliga tallinjen och räkneoperationer kopplas samman med en variabel tallinje (Figur 2) och att eleverna kan använda detta på ett sätt som innebär att de beskriver funktioner. Den variabla tallinjen är därigenom en algebraisk generalisering av tallinjen och aritmetiska operationer vilket leder in eleverna till det tänkande som ligger till grund för funktionsbegreppet.



Figur 2: N-tallinje med utgångspunkt i ett godtyckligt tal N (Carraher m fl, 2006)

Även Blanton, Isler-Baykal m fl (2019) visar att elever tidigt kan använda sig av det algebraiska symbolspråket, till exempel när de ska beskriva två samvarierande kvantiteter eller generella aritmetiska egenskaper som att addition är kommutativt. De visar även att elever i allmänhet lyckas bättre med att beskriva samband med hjälp av variabler än vad de gör om de försöker använda ord för beskrivningen. Det vill säga, även om det är generaliseringar och inte symbolspråket som är i fokus så innebär variabelnotationen en tillgång till ett kraftfullt verktyg som kan underlätta för eleverna (Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019).

Variabler

En formell variabelnotation är alltså ett verktyg som kan underlätta, men som ändå inte är absolut nödvändigt, för tidig algebra. Aritmetiska samband kan även beskrivas algebraiskt utan att införa variabler (Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019). Exempelvis visar Bastable och Schifter (2008) att även om läraren

inte avser att introducera algebra i aritmetik, och därmed inte heller använder en formell variabelnotation, så innebär en förflyttning från specifika aritmetiska situationer till generella påståenden ett algebraiskt tänkande. Genom att fånga upp och bygga vidare på elevernas frågor och tankar om olika matematiska koncept kan läraren hjälpa eleverna att upptäcka generaliseringar utifrån det specifika (Bastable & Schifter, 2008; Carraher m fl, 2006). Ett ytterligare exempel på att användning av variabelnotation inte är nödvändig för att tidigt introducera ett algebraiskt tänkande visar Britt och Irwin (2008; 2011) genom att introducera eleverna till så kallade *kvasivariabler*, vilka innebär att tal behandlas som om de vore variabler (Fujii & Stephens, 2001; 2008; Irwin & Britt, 2005). Ett exempel på en kvasivariabel är talet 38 i likheten $63 – 38 + 38 = 63$. Genom att beskriva att likheten är sann även om 38 byts ut mot något annat tal behandlas 38 som om det vore en variabel, det vill säga att just denna likhet är sann generaliseras till att gälla alla likheter där samma tal subtraheras och adderas. Oavsett om variabelnotation introduceras eller ej visar forskning om tidig algebra att generaliserad aritmetik (Blanton m fl, 2015), till exempel generaliseringar av aritmetiska operationer och samband, är en central aspekt av algebraiskt tänkande i tidiga skolår (Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019; Britt & Irwin, 2008; 2011; Kieran, 2018).

Variabler, oavsett om det är en formell variabelnotation, kvasivariabler eller beskrivet med ord, spelar därmed en central roll i såväl tidig algebra som algebra i allmänhet. I min tidigare beskrivning av variabelbegreppet listade jag fler olika innebörder av variabler beroende på i vilket sammanhang variabeln förekommer. Även om elever kan hantera variabler med en innebörd i ett visst sammanhang behöver inte betyda att de behärskar variabler som har en annan innebörd (Bardini m fl, 2005). Bardini m fl visar att elever som klarar att skriva en formel för en talföljd, till exempel $n = 2x + 1$, kanske inte tolkar x eller n i den formeln som variabler som varierar. Istället beskriver eleverna variablerna i detta fall som *tillfälligt obekanta* tal, där n får ett värde så fort x har givits ett värde (Bardini m fl, 2005). Allmänt visar Bardini m fl att eleverna har svårigheter med att hantera variabler som betecknar något obestämbart (se Usiskin, 1988), till exempel när en variabel betecknar en parameter, eftersom eleverna förväntar sig att de ska få fram ett numeriskt resultat. Även Ely och Adams (2012) visar att elever ofta tolkar variabler som ett obekant tal och har svårigheter med att förstå variabler som något som varierar eller som platshållare, exempelvis variabler som parametrar. Dessa resultat visar således att även om eleverna klarar av att lösa uppgifter med hjälp av algebra så behöver det inte betyda att de är medvetna om de olika aspekterna av en variabel. Kilhamn (2014) visar att denna avsaknad av medvetenhet inte enbart gäller elever utan kan även gälla för lärare. Trots att lärarna har tillräckliga kunskaper om variabler för att kunna växla mellan olika tolkningar av variabler och för att kunna lösa de uppgifter som finns i läroboken så kanske de inte är fullt medvetna om variablernas olika betydelser i olika sammanhang (Kilhamn, 2014).

Att elever ofta tolkar variabler som obekanta tal och att variabelns värde ska räknas fram kan bero på att elever ofta möter uppgifter som 3 + ? = 7 och därigenom leds till att uppfatta variabler som beteckningar för obekanta tal (Knuth m fl, 2005). I Sverige förekommer denna typ av uppgifter genom så kallade *luckuppgifter* (Hemmi, Lepik m fl, 2019) där det finns ett tomrum istället för en symbol, 3 + __ = 7. Dessa sorters problem går oftast att lösa genom att eleverna prövar sig fram till svaret eller med hjälp av någon beräkningsstrategi. Även i senare skolår används sådana strategier när eleverna ska lösa matematiska problem eller ekvationer istället för att de använder sig av en algebraisk strategi (Kilhamn m fl, 2019; Stacey & MacGregor, 2000). Stacey och MacGregor drar från sin studie slutsatsen att denna typ av ”enkla” problem gör att eleverna inte ser någon poäng med införandet av algebra och att för dem blir algebra bara något som ökar svårighetsgraden på problemet. Effekten av detta blir därmed att eleverna löser dessa enklare uppgifter utan problem med hjälp av beräkningsstrategier eller genom att pröva sig fram, men får problem med ekvationslösning i allmänhet.

Ekvationslösning och likhetstecknets betydelse

Hur formell ekvationslösning introduceras i klassrummet har bland annat undersökts av Röj-Lindberg och Partanen (2019). Deras resultat från finska klassrum stämmer överens med Stacey och MacGregors (2000) slutsatser som jag beskrev ovan. I de uppgifter som användes i de finska klassrummen fanns det obekanta talet enbart på en sida om likhetstecknet, dessutom oftast på vänster sida, medan det på den högra sidan om likhetstecknet fanns endast ett tal. Det vill säga, oavsett lärarens intentioner så var uppgifter som skulle lösas och tillvägagångssättet i klassrummet inte sådant att en allmän algebraisk lösningsmetod var nödvändig. Detta är inget unikt för Finland. I likhet med det som Röj-Lindberg och Partanen (2019) visar så fokuserar till exempel även den sydkoreanska läroboken[6] på sammanhang där operationerna är på vänster sida om likhetstecknet (Ki & Cheong, 2008).

En allmän metod för ekvationslösning bygger på transformationer av algebraiska uttryck som bevarar likheten, det vill säga att ekvationen omformas till en ny, ekvivalent ekvation. Det innebär att likhetstecknet då används som en symbol för en relation där uttrycken på båda sidor om likhetstecknet behandlas som objekt i sig och ett eventuellt numeriskt värde är ointressant (Hewitt, 2012). Därigenom får likhetstecknets relationella betydelse en framträdande roll (Cai m fl, 2005; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 1981; 2018; Knuth, 2005; Li m fl, 2008; Matthews & Fuchs, 2020). Som tidigare nämnts har många forskare visat att elever uppfattar likhetstecknet som en signal för att göra något eller som att det betecknar resultatet av en aritmetisk operation istället för en symbol som betecknar en relation (Cai m fl, 2005;

[6] Sydkorea har enbart en läroboksserie som därmed används av alla lärare (Pang, 2013).

Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 1981; Li m fl, 2008; Pang & Kim, 2018; Renvick, 1932; Tall m fl, 2014; Theis, 2005; Vermeulen & Meyer, 2017; Vincent m fl, 2015). Detta är inte något unikt för elever i grundskolan. Kieran (1981) visar att elever tolkar likhetstecknet på detta sätt genom hela skolsystemet. Även Tossavainen m fl (2011) visar att universitetsstudenter har en ofullständig förståelse av likheter. Vidare visar Kieran (1981) att när universitetsstudenter deriverar funktioner kan man skönja en operationell tolkning av likhetstecknet, även om denna är något mer sofistikerad än den tolkning som elever gör i grundskolan. Att derivering ses som en operation är egentligen inget konstigt eftersom derivering innebär en process där något görs med funktionen. Det kan då medföra att likhetstecknet även i detta fall tolkas som en operation:

$$\sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} D_x(x^2+1)$$

(Clement, 1980, citerad i Kieran, 1981)

Kedjan av uttryck ovan visar det som Kieran (1981) benämner som en något mer sofistikerad, men fortfarande operationell, innebörd av likhetstecknet. Det behöver dock inte vara någon motsägelse att, beroende på situationen, tolka ett uttryck som en process eller som ett objekt. Hewitt (2012) visar att redan 9-10 år gamla elever kan uppvisa en flexibilitet genom att ibland tolka och hantera uttryck som objekt i samband med ekvationslösning och ibland som en process där uttryckets värde ska räknas fram i samband med att variabeln ersätts med ett tal. Därmed har likhetstecknet en relationell innebörd för de eleverna åtminstone i de situationer likhetstecknet måste tolkas som en relation. I en del matematiska kontexter fungerar det både att se uttrycken på båda sidorna om likhetstecknet som processer och som objekt. I det sistnämnda fallet används likhetstecknets relationella innebörd för att jämföra objekten istället för att behöva utföra beräkningar. Det innebär vidare att eleverna behöver välja metod när de löser dessa problem. Pang och Kim (2018) visar att elever som är väl förtrogna med beräkningar kan ta till beräkningar som ett sätt att lösa ekvationer även om de uttryckligen får instruktionen att inte använda beräkningar. Det vill säga, eftersom skolmatematiken i Sydkorea bland annat innebär stor färdighetsträning (Pang, 2013) kan eleverna då välja en beräkningsmetod före en jämförande metod eftersom de upplever sig trygga med detta. Trots det är det ändå över hälften av eleverna i årskurs 6 i Pang och Kims (2018) studie som använder likhetstecknets relationella innebörd för att lösa uppgifter som 47 + __ = 48 + 76. De jämför de två uttrycken och kommer då fram till att det saknade talet måste vara ett mer än 76 eftersom 47 är ett mindre än 48. Att använda strukturen i likheten istället för att räkna fram talet

visar enligt Matthews m fl (2012) på olika nivåer av kunskap om likhetstecknet. Matthews m fl:s kunskapsnivåer används som analytiskt verktyg i Artikel VII vilket beskrivs mer ingående i kapitlet *Metodologi*.

Samband mellan och inom matematiska områden

Att likhetstecknet och likheters struktur används i såväl aritmetiska som algebraiska sammanhang är ett grundläggande exempel på hur olika matematiska områden knyts ihop till en helhet. Dessa samband möjliggör även tillfällen i undervisningen till framåtblickar samt repetition av tidigare kunskaper. Det finns bokstavligen hundratals studier som visar repetition utspridd över tid är bättre för att befästa kunskap än mer koncentrerade inlärningstillfällen (Cepeda m fl, 2006) och att detta även är en av de bästa metoderna för inlärning (Dunlosky m fl, 2013). Detta motiverar i sin tur forskning om hur samband mellan och inom olika matematiska områden används i undervisningen.

En sådan studie genomfördes av Hiebert m fl (2005) där forskarna filmade matematiklektioner i amerikanska klassrum i anslutning till TIMSS 1999. Studien visar att 17% av uppgifterna i de studerade klassrummen hade en formulering som tyder på att fokus ligger på att skapa samband i matematiken. Trots detta så blev i princip aldrig sambanden synliga för eleverna i klassrummet. Detta berodde på att uppgifterna istället oftast arbetades med på ett sådant sätt att det blev rena procedurer i fokus utan anknytning till tidigare studerade matematiska områden (Hiebert m fl, 2005). Givvin m fl (2019) visar liknande resultat. I denna studie visas hur lärare i algebraundervisningen fokuserar på formalia och vad som kan ses som regler och inte knyter an till elevernas tidigare matematiska erfarenheter. Därmed bortses från kopplingar som kan göras mellan algebra och aritmetik.

Även i svensk forskning finns resultat i linje med detta. Kilhamn m fl (2019) visar bland annat hur lärare lägger tyngdpunkten på de enskilda uppgifterna samt de beräkningar som genomförs, vilket till exempel innebär att varje ekvation behandlas som om den vore unik. Därmed blir det upp till eleverna själva att generalisera utifrån de enskilda fallen och på egen hand upptäcka de samband som finns. Som tidigare nämnt visar Clement (1982) att om eleverna lämnas själva med att upptäcka sambanden kan de skapa icke-existerande och felaktiga samband. Kilhamn m fl (2019) visar även hur lärare utifrån beräkningssituationer leder eleverna fram till variabler, men att uppgiften då är så pass enkel att det inte finns någon anledning för eleverna att använda sig av variabler. Detta är i linje med Staceys och MacGregors (2000) slutsats att eftersom uppgifterna enkelt går att lösa med aritmetiska resonemang eller genom att pröva sig fram med olika värden blir algebra något som gör uppgifterna mer komplicerade istället för ett hjälpande verktyg.

Ett konkret exempel på samband i matematiken i tidiga skolår är sambanden mellan de fyra räknesätten, vilket även är en av punkterna i det centrala

innehållet i Lgr11 (Skolverket, 2019). Bråting (2019) påpekar att i Lgr11 poängteras särskilt de olika räknesättens tillämpningar i olika situationer. Därmed skulle tyngdpunkten kunna hamna mer på val av metod än de strukturella sambanden mellan räknesätten. Att explicit skriva fram räknesättens inbördes relationer i läroplanen är inte unikt för den svenska läroplanen. Till exempel finns liknande formuleringar i både den finska och den estniska läroplanen (Hemmi m fl, 2020). Hemmi, Lepik m fl (2019) visar däremot att det är skillnad på hur dessa inbördes relationer behandlas i läroböcker för de tidigaste skolåren i Sverige, Finland (finska respektive finlandssvenska) och Estland. Resultaten visar att läromedlen i Estland och de finska läromedlen lyfter fram prioriteringsreglerna i årskurs 2 och använder räknesättens inversa operationer vid informell ekvationslösning. Detta är exempel på hur Estland tydligt är influerat av den så kallade Davydovskolan (se Davydov 1990; 2008) och även att vissa sådana drag kan skönjas i finska läromedel. Däremot förekommer inte detta i de finlandssvenska eller de svenska läroböckerna, istället används räknesättens inversa egenskaper i samband med talfamiljer. De påvisade skillnaderna mellan de finska och de finlandssvenska läromedlen stärker även Pehkonen m fl:s (2018) resultat. Pehkonen m fl visar att det finns skillnader i elevers resultat och lärares relation till läromedel beroende på vilken språkgrupp eleverna tillhör, vilket alltså delvis kan bero på läromedelsskillnader (Hemmi, Lepik m fl, 2019).

Även mönster är exempel på samband genom det faktum att mönstrets positioner står i relation till varandra (Resnik, 1981), det vill säga det finns ett samband mellan mönstrets olika positioner. Istället för att upptäcka och använda samband mellan olika matematiska områden handlar arbete med matematiska mönster om att upptäcka och beskriva mönster i exempelvis en talföljd. Mönster är därigenom även grundläggande för ett funktionellt tänkande (Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019; Cai m fl, 2010; Carraher & Schliemann, 2019). Eftersom funktionellt tänkande även utgör en egen stor idé beskrivs detta mer ingående i nästa kapitel *Teoretiska ramar*.

Bråting (2019) visar att mönster är relativt nytt i den svenska läroplanen i och med att mönster finns som centralt innehåll i Lgr11 för såväl årskurs 1-3 som 4-6, men uttrycks inte explicit i den tidigare läroplanen Lgr80. Eleverna ska såväl konstruera som beskriva och uttrycka mönster i form av talföljder som geometriska mönster. Även den finska läroplanen behandlar mönster till viss del i dessa årskurser (Hemmi m fl, 2020). Till skillnad från den svenska läroplanen uttrycks inte att mönstren ska beskrivas. Istället ska eleverna upptäcka regelbundenheter och fortsätta talföljder utifrån denna regelbundenhet. Eftersom en viktig del i ett funktionellt tänkande är att uttrycka och beskriva mönster (Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019) visar detta på att den svenska läroplanen ligger närmare det som innebär ett funktionellt tänkande än vad den finska läroplanen gör. Ännu längre bort från ett funktionellt angreppsätt på matematiken (Cai m fl, 2010) ligger den estniska läroplanen där mönster inte förekommer alls (Hemmi m fl, 2020).

Hur eleverna arbetar med mönster är alltså viktigt för att ett funktionellt tänkande ska förekomma. Därmed hamnar en generell beskrivning och generaliseringar av mönster i förgrunden ur detta perspektiv. Som tidigare nämnt visar Blanton, Isler-Baykal m fl (2019) att elever lyckas bättre med att beskriva samband med hjälp av variabler än med ord. Detta är i linje med Reinhardtsens (2020) doktorsavhandling som visar att elever inför algebraiska notationer först mot slutet av generaliseringsprocessen. Reinhardtsens avhandling är en del av det mer omfattande VIDEOMAT-projektet, vilket nyligen har resulterat i en bok med titeln *Encountering Algebra* (Kilhamn & Säljö, 2019). Vidare visar Reinhardtsens (2020) resultat att de algebraiska uttrycken konstrueras genom att basera dessa på de aritmetiska uttryck eleverna har skapat för enskilda positioner i mönstret. Det vill säga, eleverna generaliserar från ett aritmetiskt sammanhang till algebra. Denna typ av generalisering utgör även kärnan i den stora idén GA, vilket är en central del av avhandlingens *Teoretiska ramar*.

Avslutande kommentarer och sammanfattning

Jag inleder kapitlets sammanfattning med att påpeka att det absolut viktigaste att ha med sig från denna bakgrund och tidigare forskning är följande: tidig algebra är inte algebra tidigt (Carraher m fl, 2008). Tidig algebra handlar om att införa ett algebraiskt tänkande i tidiga skolår som möjliggör att matematiken sätts ihop till en helhet istället för att det ska uppkomma problem i en övergång mellan aritmetik och algebra (Carpenter & Levi, 2000; Carraher m fl, 2006; Fujii & Stephens, 2001; 2008; Kieran 1989; 1992). För att detta verkligen ska ske behöver lärare identifiera tillfällen för tidig algebra och genom dessa tillfällen ge eleverna möjlighet till att generalisera utifrån aritmetiska sammanhang (Carraher m fl, 2006). Flera studier visar däremot att dessa tillfällen går förlorade då läraren inte utnyttjar de möjligheter som uppstår (Givvin m fl, 2019; Kilhamn m fl, 2019).

Vidare betonas bland annat att mönster i tidiga skolår är något som bör lyftas fram som en del av tidig algebra (Blanton, Stroud m fl, 2019; Carraher & Schliemann, 2019). I till exempel den estniska läroplanen finns inte mönster uttryckligen med i tidiga skolår (Hemmi m fl, 2020), vilket visar att det inte bara finns ett sätt att införa tidig algebra. Såväl Finland som Estland lyfter fram räknesättens inversa relationer och dessa relateras även tydligt till ekvationslösning i Estland. Sammantaget visar Hemmi m fl (2020) att Estlands läroplan är i linje med Davydovläroplanen (se Davydov, 1990; 2008) vilket är ett mer strukturellt sätt (Cai m fl, 2010) att ta sig an matematiken. I arbetet med detta avsnitt har jag även sökt efter forskning om tidig algebra i fler länder än de länder som jag beskrivit forskning om eller från. Ett allmänt problem i detta sökande är att hur tidig algebra genomförs i praktiken är ett relativt obeforskat område i många länder. Sverige och även resten av Norden är inget

undantag till detta, även om forskning angående skolalgebra finns. Ett exempel på sådan forskning är det ovan nämnda VIDEOMAT-projektet. I detta projekt jämförs klassrumsstudier i Finland, Norge, Sverige och USA där eleverna är i åldersspannet 11-13 år. De elever som studeras i VIDOEMAT-projektet i Sverige tillhör årskurs 6-7, det vill säga den absolut översta delen av det åldersspann på elever som jag studerar i denna avhandling. Även om VIDEOMAT-projektet innebär ett viktigt bidrag till nordisk forskning om skolmatematik har jag valt att inte gå in på det projektet mer än ytligt då såväl elevernas ålder och projektets inriktning till stor del ligger utanför denna avhandlings fokusområde.

Det finns relativt mycket forskning om skolmatematik i de nordiska länderna (Sriraman m fl, 2010), men då inte specifikt om tidig algebra. Det går att hitta masteruppsatser eller självständiga arbeten om tidig algebra i Norden, men det finns få vetenskapliga artiklar och doktorsavhandlingar om tidig algebra i praktiken i de nordiska länderna. Det ska påpekas att det finns artiklar av forskare från de nordiska länderna som beskriver tidig algebra i allmänhet (t ex Kaas, 2019), men dessa behandlar inte specifikt tidig algebra i de nordiska länderna. Även forskning om matematik i tidiga skolår inspirerad av Davydov förekommer i Sverige (t ex Eriksson & Jansson, 2017), men då Davydov mycket förenklat snarare innebär algebra tidigt än tidig algebra har jag valt att inte gå in djupare på detta.

Teoretiska ramar

Vägen till matematiska insikter är sällan rak, men tack vare matematikens logiska struktur och språk utvecklas med tiden hur begrepp och satser presenteras och bevisas. Presentationerna av matematiska idéer, begrepp och satser blir mer koncisa och rensade från onödiga förklaringar (Tzanakis & Thomaidis, 2000). Freudenthal (1983) beskriver att detta får som följd att när en matematisk idé publiceras så beskrivs den inte på det sätt som den upptäcktes. Detta innebär att själva upptäcktsresan, med alla dess villovägar, inte syns utan det är en ”ren” form av matematiken som presenteras. En sådan tillrättalagd matematik kan påverka skola och läromedel på ett sätt som Freudenthal (1983, p. IX) beskriver som *antididaktiskt* och han argumenterar för att låta elever uppleva denna matematiska process. Det innebär till exempel att utifrån tillgänglig fakta beskriva hypoteser, pröva dessa, bevisa eller motbevisa. Omformulera hypotesen efter de nya insikterna och återigen försöka bevisa eller motbevisa. Ingenstans är vägen till det slutliga resultatet utstakad. Det Freudenthal argumenterar för ligger i linje med den tidiga algebra som beskrivs i denna avhandling.

Som jag tidigare beskrivit har denna avhandling tagit sitt avstamp i generaliserad aritmetik, GA, en av Algebrans stora idéer. GA innebär bland annat ett fokus på att undersöka samband, beskriva hypoteser, generalisera upptäckter – det vill säga att få uppleva den upptäcktsresa som Freudenthal (1983) beskriver. I enlighet med detta och att avhandlingen fokuserar på en konceptuell kunskap (Hiebert & Lefevre, 1986) fungerar Algebrans stora idéer som ett lämpligt teoretiskt ramverk för denna avhandling. Därmed kommer detta kapitel att bestå av två huvudavsnitt, *Konceptuell och procedurell kunskap* samt *Algebrans stora idéer*. I det förstnämnda avsnittet beskrivs vilken sorts matematisk kunskap som det teoretiska ramverket avser att belysa och i det efterföljande avsnittet beskrivs det teoretiska ramverket. Därefter kommer valet av Algebrans stora idéer som teoretiskt ramverk diskuteras, vilket även blir avslutningen på detta kapitel.

Konceptuell och procedurell kunskap

Inom matematikdidaktisk forskning finns inte en enhetlig syn på vad som är matematisk kunskap (Copur-Genturck, 2015). Jag utgår i denna avhandling från en syn på matematisk kunskap som har likheter med att matematik ses

som ett tudelat ämne där de båda delarna samverkar. Den första delen utgörs av den formella matematiken som innehåller bland annat bevis, samband mellan matematiska områden och begrepp samt en övergripande logisk struktur. Den andra delen består av matematiska beräkningar, det vill säga att utföra operationer för att till exempel beräkna värdet på uttryck eller för att lösa ekvationer. Eftersom denna avhandling handlar om tidig algebra kommer tanke- och förhållningssätt till centrala matematiska begrepp och idéer att hamna i förgrunden. Detta tangerar det som Hiebert och Lefevre (1986) benämner som *konceptuell kunskap* och det som Skemp (1976) kallar ”*relational understanding”* (se även Star, 2005) och där den andra delen av matematiken motsvaras av *procedurell kunskap* (Hiebert & Lefevre, 1986).

Konceptuell matematisk kunskap innebär att olika matematiska områden, begrepp och beräkningsprocedurer länkas samman till en enda helhet (Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnsson & Alibali, 1999; Skemp, 1976). Konceptuell kunskap refererar alltså aldrig till isolerade delar av information (Hiebert & Lefevre, 1986) utan är alltid kopplad till någon annan information. Ett exempel på sådan kunskap ges av Skemp (1976) genom exemplet att en cirkels omkrets kan beräknas genom formeln $O = \pi d$. Formeln i sig är ingen konceptuell kunskap, men i denna formel döljs bland annat proportionalitet. Därmed kan formeln för cirkelns omkrets knytas till proportionalitet och proportionalitet kan i sin tur kopplas till likformighet och skala, linjära funktioner och många andra matematiska områden. Genom denna sorts kunskap blir det då lättare att generalisera det man redan har lärt sig till andra matematiska områden och lösa problem som inte är standarduppgifter (Skemp, 1976).

Procedurell kunskap[7] kan ställas i kontrast till konceptuell kunskap. Procedurell kunskap innebär att kunna utföra något utan att för den skull nödvändigtvis förstå vad det är man gör eller varför det fungerar (Hiebert & Lefevre, 1986; Skemp, 1976). Ett tydligt exempel på procedurell kunskap är att lära sig multiplikationstabellerna. Det går att memorera multiplikationstabellerna utan att ha någon som helst kunskap om vad multiplikation innebär. Procedurell kunskap kan såklart ha sina fördelar eftersom det är enkelt och ”rakt på sak”. Det vill säga, det kan gå snabbt att lära sig att utföra en metod och därigenom omedelbart kunna få fram rätt svar på uppgifterna i läroboken. På så sätt blir det tydligt för eleven att denne har lärt sig något och eleven får en känsla av framgång, vilket inte ska underskattas (Skemp, 1976). Dessutom är det mindre kunskap involverad i lösningsprocessen (Skemp, 1976) och den kan därmed vara mycket effektiv. Som exempel på detta tar jag beräkningen $7 + 5$, där jag bara ”vet” att summan är 12. Innan denna beräkning är automatiserad kan eleven behöva gå via taluppdelning, där även den associativa lagen finns dold i beräkningen, det vill säga $7 + 5 = 7 + (3 + 2) = (7 + 3) + 2 = 10 + 2 = 12$. Innan $7 + 5 = 12$ är inlärt kan därmed en mer komplicerad beräkning behöva utföras; en beräkning som bygger på en större matematisk helhet än vad som

[7] Skemp (1976) betecknar detta som ”instrumental understanding”.

krävs för att kunna hantera specialfallet 7 + 5. Exemplet visar att det inte alltid är önskvärt att det är konceptuell kunskap som tillämpas. Ibland behöver beräkningar utföras snabbt och effektivt och i dessa fall blir det onödigt omständligt att gå via konceptuell kunskap istället för att räkna direkt utan att behöva reflektera över vad som utförs.

Även om procedurell kunskap kan ses som att det står i kontrast till konceptuell kunskap behöver inte det ena utesluta det andra (Skemp, 1976; Star, 2005). Att enbart förlita sig på procedurell kunskap kan dessutom göra att matematiken blir svårare, vilket till synes är en motsägelse mot min beskrivning ovan att procedurell kunskap är enkel. Enskild procedurell kunskap är enkel, men eleven behöver då lära sig proceduren för varje problemsituation. Om jag återigen tar upp exemplet med proportionalitet skulle detta innebära att eleven lär sig använda formler för likformighet i geometrin, tre olika metoder för att räkna procent (beroende på om det är ”hela”, ”delen” eller ”andelen” som efterfrågas) och ytterligare tre metoder för beräkning med skala (frågas det efter ”skalan”, ”verkligheten” eller ”bilden”). Med konceptuell kunskap som utgångspunkt hör alla dessa frågor ihop och eleven skulle i så fall kunna tillämpa proportionalitet i alla dessa situationer och inte behöva lära sig en metod för varje situation. En sådan konceptuell kunskapssyn genomsyrar denna avhandlings teoretiska ramverk, Algebrans stora idéer.

Algebrans stora idéer

Algebrans stora idéer har utvecklats och finslipats under flera år och är fortfarande under bearbetning. En tidig version av dessa finns i Blanton m fl (2011), vilket efter bearbetning mynnade ut i de fem stora idéer som presenteras i Blanton m fl (2015). I denna avhandling utgår jag från Blanton m fl (2015) där Algebrans stora idéer beskrivs som:

- EEEI – Ekvivalenser, Uttryck (Expressions), Ekvationer och Olikheter (Inequalities)
- GA – Generaliserad Aritmetik
- FT – Funktionellt Tänkande
- VAR – Variabel
- PR – Proportionellt Resonemang

Exakt vad dessa innebär kommer att förklaras senare i detta avsnitt. De stora idéerna har i sin tur sitt ursprung i det som Kaput (2008) identifierar som tre innehållssträngar (content strands) i algebra. Med algebraiska innehållssträngar avses matematiskt innehåll där algebraiskt tänkande används (Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019) och de tre strängar som Kaput (2008) identifierar är:

1. Studier av de strukturer och system som har sitt ursprung i beräkningar och relationer, inklusive de som finns i aritmetik och i resonemang med kvantiteter.
2. Studier av funktioner, relationer och kvantiteter som samvarierar.
3. Tillämpningar av såväl inommatematiska som utommatematiska modelleringar.

Utöver dessa tre innehållssträngar kan även två grundläggande aspekter (core aspects) av algebra identifieras. Båda dessa aspekter är införlivade i var och en av de tre innehållssträngarna och kan därigenom ses som centrala för all algebra (Kaput, 2008). Min syn på den första av dessa aspekter är att den utgår från algebra som ett systematiskt sätt att uttrycka generaliseringar av bland annat mönster, samband och begränsningar. Ett exempel på detta är att *beskriva* den distributiva lagen genom $a(b + c) = ab + ac$. Den andra aspekten tolkar jag på motsvarande sätt som att se på algebra som ett formellt språk där dess syntax styr hur vi för resonemang kring generaliseringar och genom denna styrning även hjälper oss med hur vi kan arbeta med generaliseringar. Inom denna aspekt ryms bland annat manipuleringar av algebraiska uttryck, till exempel genom att *använda* den distributiva lagen och omvandla uttrycket $2(x + 3)$ till det ekvivalenta uttrycket $2x + 6$. Att dessa aspekter av algebra ryms inom de olika innehållssträngarna – och att det är innehållssträngarna som ligger till grund för Algebrans stora idéer – innebär då även att manipuleringar av algebraiska uttryck *inte* finns med bland de stora idéerna. Manipulering av uttryck ska därmed ses som ett hjälpmedel för att kunna utföra det som ryms inom dessa stora idéer. Likaså finns inte heller den algebraiska beskrivningen av ett samband, till exempel den associativa lagen, i sig med som en stor idé utan blir på motsvarande sätt ett verktyg för att uttrycka sig inom respektive stor idé.

Tanken bakom att lyfta fram vad som kan ses som stora idéer inom algebra kan beskrivas som att försöka sätta fingret på vad som är algebraiskt tänkande i skolmatematiken. Därigenom lyfts blicken från det rent tekniska arbetet med bland annat manipuleringar av algebraiska uttryck, vilket är vanligt förekommande inom skolalgebran (Kieran, 2007). Med utgångspunkten att de stora idéerna är ett sätt att synliggöra vad som är algebraiskt tänkande behöver dessa idéer inte heller vara helt disjunkta – viss överlappning kan finnas utan att det för den skull påverkar något i ramverket. Detta är något som lyfts fram i Artikel VI där den stora idén variabel (VAR) inte används som en separat stor idé på grund av att den alltid förekommer tillsammans med någon annan stor idé och därmed omöjlig att studera separat. Det bör även noteras att detta är i linje med interventionsstudien i Blanton m fl (2015). Där behandlas VAR teoretiskt som en egen stor idé, men vid genomförandet av lektionerna så integrerades koncept kopplade till VAR till lektioner rörande övriga stora idéer där det var

lämpligt. Efter att Artikel VI publicerades har Blanton vidareutvecklat Algebrans stora idéer och då även tagit bort variabel som en separat stor idé (Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019).

Likaså kommer inte alla stora idéer att finnas synliga hela tiden. Även om det i matematiken i tidigare skolår enkelt går att hitta vissa av de stora idéerna så kommer andra stora idéer att inte alls vara närvarande. I Artikel VI lyfts två argument fram varför proportionellt resonemang (PR) inte är tydligt synligt i de tidigare skolåren. För det första beror det på att PR involverar två generaliserade kvantiteter och detta finns inte med i den svenska läroplanen före årskurs 7-9. I de tidigare skolåren är proportionalitetsuppgifter ofta av formen ”Anna har 7 kronor. Beata har dubbelt så mycket pengar som Anna. Hur många kronor har Beata?” Även om det är ett proportionellt samband finns här en känd kvantitet (7 kronor) och därmed bara en generaliserad kvantitet (Beatas okända antal kronor), vilket gör att detta inte helt kan placeras under den stora idén PR. För det andra, de proportionella samband som behandlas i årskurs 1-6 täcks väl av den stora idén funktionellt tänkande (FT). I dessa årskurser är det, beträffande funktioner, uteslutande linjära funktioner som behandlas och dessa uttrycks ofta i ordalydelser som beskriver en proportionalitet. Även Blanton, Isler-Baykal m fl (2019) beskriver hur PR inte framträder i deras arbete med att ta fram det de kallar för ”early algebra learning progression” för årskurs 3-5, vilket bland annat inkluderar lektionsupplägg och deras respektive ordning. Därför har inte Blanton, Isler-Baykal m fl (2019) heller med PR i sin modell för tidigare skolår. Detta gör att de ursprungliga fem stora idéerna i princip har reducerats ner till tre, åtminstone när det rör tidig algebra.

De tre didaktikartiklarna i denna avhandling (Artiklar V, VI och VII) tar sitt avstamp i dessa tre stora idéer: ekvivalenser, uttryck, ekvationer och olikheter (EEEI), generaliserad aritmetik (GA) samt funktionellt tänkande (FT). Även om fokus främst är på EEEI, GA och FT så kommer härnäst alla fem stora idéer att förklaras för att få en helhetsbild av de stora idéerna som ramverk.

Stor idé 1: EEEI – Ekvivalenser, uttryck, ekvationer och olikheter

De fyra begreppen i rubriken för denna stora idé förklarades i detalj i avsnittet *Centrala begrepp*. Begreppen i sig ger intuitivt en god bild om vad EEEI handlar om. Trots detta döljs ytterligare viktiga detaljer i dessa begrepp. Den kanske viktigaste detaljen, vilket rent utav kan ses som kärnan i denna stora idé, är matematiska relationer. Detta innebär även att denna stora idé tar sitt avstamp i Kaputs (2008) andra innehållssprång. Jag inleder med en kort fördjupning av begreppet ekvivalens ur ett relationellt perspektiv.

I beskrivningen av ekvivalenser under rubriken Centrala begrepp användes kongruens (moduloräkning) och likformighet i geometri som exempel på ekvivalenser. Dessa exempel illustrerar att EEEI inte bara finns inom algebran utan finns även närvarande i såväl aritmetiska som geometriska sammanhang. Det som är kärnan i de exemplen är att ekvivalensen är en relation mellan objekt och det är här likhetstecknets betydelse kommer in i bilden. En likhet eller olikhet är inget annat än en relation mellan två objekt. Alltså blir likhetstecknets betydelse mycket centralt för denna stora idé. Ett exempel på en uppgift om likhetstecknets betydelse är att låta en elev förklara om likheten $73 + 48 = 75 + 46$ är sann eller falsk. Om eleven räknar ut vänsterledet och högerledet var för sig, det vill säga $73 + 48 = 121$ och $75 + 46 = 121$, och därefter drar slutsatsen att likheten är sann eftersom $121 = 121$ så har eleven visat att den förstår att likhetstecknet är en relation, vilket faller in under EEEI. Att likheten är sann går även att avgöra enbart genom att fokusera på strukturen och egenskaper hos talen, i detta fall den associativa lagen. Genom att flytta 2 från 48 till 73 fås $75 + 46$ även i vänsterledet. Eftersom det då är exakt samma uttryck på båda sidor om likhetstecknet måste likheten vara sann. Det andra angreppsättet kräver en högre kunskapsnivå än det första (Matthews m fl, 2012; se även Tabell 4, s. 61). Här syns även hur en ekvivalens, $73 + 48 = 75 + 46$, genom att flytta 2 från 48 till 73, omformas till en likhet $75 + 46 = 75 + 46$. Detta motiverar att vi talar om en likhet när uttryck representerar samma objekt, även om uttrycken i sig inte är identiska.

Genom att arbeta med uppgiften $73 + 48 = 75 + 46$ på ett mer fördjupande sätt kan även den stora idén GA framträda. Jag kommer återanvända den här uppgiften senare för att visa på ett tankesätt som kan kategoriseras som GA.

Likhetstecknets betydelse och ekvivalenser spelar även en avgörande roll för ekvationer. Eftersom likhetstecknet avser en relation där uttrycken på respektive sida av likhetstecknet betecknar samma objekt innebär det att alla operationer som görs vid lösning av denna ekvation behöver bevara likheten. Detta är återigen ett exempel på ekvivalens. Om vi omformar uttrycken så att likheten bevaras har vi fått en ny ekvation som är ekvivalent med den ursprungliga ekvationen. Denna omformning, eller manipulering, av uttryck är ett exempel på den andra grundläggande aspekten av algebra (Kaput, 2008) som finns inbyggt i denna stora idé. För att tydliggöra detta tar jag ekvationen $3x + 7 = x + 9$ som ett exempel. Genom att subtrahera x från både vänster- och högerled bevaras likheten och vi får den ekvivalenta ekvationen $2x + 7 = 9$. Subtrahera sedan 7 från båda led och slutligen dividera båda leden med 2 för att få en kedja av ekvivalenta ekvationer:

1. $3x + 7 = x + 9$. Subtrahera med x i båda leden för att få
2. $2x + 7 = 9$. Subtraktion med 7 i båda leden leder fram till
3. $2x = 2$. Division med 2 i båda leden ger slutligen
4. $x = 1$

Här har vi fyra ekvivalenta ekvationer. Det som är gemensamt för alla fyra ekvationerna är att de har samma rötter (i detta fall enbart en rot, $x = 1$). Den oväsentliga informationen i denna ekvivalensrelation är *hur* ekvationen är uttryckt. Ekvationslösning skulle med detta tankesätt beskrivas som att ta fram ekvivalenta ekvationer, vilka skrivs på en alltmer enklare form, ända tills vi kan avläsa ekvationens rötter. Detta tankesätt innebär därmed att en ekvation inte är något att ”räkna ut”. Istället kan det sägas att en ekvation *analyseras* (Blanton m fl, 2015). Utifrån slutsatserna av denna analys tas ekvivalenta ekvationer fram tills det blir en så enkel ekvation att rötterna kan avläsas explicit. Detta visar även tydligt skillnaden mellan grundläggande aspekter av algebra och innehållssträngar (Kaput, 2008). Beräkningar och manipuleringar är en del av dessa grundläggande aspekter som *används* inom en innehållssträng. I detta fall i syfte att ta fram ekvivalenta ekvationer och slutligen hitta ekvationens rötter. Detta exempel visar även på vikten av att arbeta med olika former av matematiska relationer och att verkligen förstå vad en sådan relation innebär. EEEI fokuserar på precis detta och kommer då innefatta en uppsjö med olika tekniker och förmågor, men där den gemensamma nämnaren är att dessa är en konsekvens av de olika matematiska relationerna.

Det avslutande ordet i rubriken för denna stora idé är olikheter. Även olikheter är en relation och kan beskrivas på liknande sätt som likheter beskrivs ovan. Som tidigare har nämnts beskrivs en likhet som en relation där två objekt är identiska och då är alltså en olikhet en relation där två objekt inte är identiska (Kiselman & Mouwitz, 2008). På motsvarande sätt som vi kan konstruera ekvationer med hjälp av två uttryck i en likhet så kan även ekvationer konstrueras med hjälp av en olikhet. Denna typ av ekvationer kallas dock inte för ekvationer utan för just olikheter (Kiselman & Mouwitz, 2008). Slutsatsen blir att även här kan ekvivalenta olikheter konstrueras ända tills den resulterande olikheten är så enkel att rötterna framgår explicit.

I denna ovan gjorda beskrivning framkommer hur ekvivalenser spelar en central roll inom matematiken och hur de genomsyrar denna stora idé. För att förstå ekvivalenser behövs en förståelse för relationer och därmed, vilket ovanstående beskrivning visar, är likheter och olikheter mycket centrala. Bland annat kommer då följande punkter att inkluderas i EEEI (Blanton m fl, 2015):

- Lösning av ”luckuppgifter”, till exempel $3 + 8 = __ + 5$.
- Tolka likheter och olikheter och avgöra om de är sanna eller falska.
- Använda algebraiska uttryck för att beskriva matematiska modeller.
- Tolka matematiska uttryck givet en kontext.
- Förstå att symbolen = står för en relation.
- Analysera en ekvation för att bestämma dess rötter.

Stor idé 2: GA – Generaliserad aritmetik

Återigen ger rubriken en god bild av vad denna stora idé handlar om, det vill säga att algebran tar avstamp i aritmetiken. GA inkluderar bland annat aritmetikens struktur och egenskaper hos talen. Algebra kan i detta sammanhang användas för att 1) *resonera kring strukturer hos aritmetiska uttryck* samt 2) *generalisera aritmetiska samband*. Detta kan ses som de huvudsakliga delarna av GA (Artikel V). Det vill säga, resonera om, beskriva och generalisera dessa strukturer och egenskaper. I denna kortfattade beskrivning av GA syns det tydligt att generaliserad aritmetik har sitt ursprung i Kaputs (2008) första innehållssträng.

För att tydliggöra vad Blanton (2015) avser med GA tar jag upp några exempel. Jag börjar med exemplet som användes för att förklara en del av EEEI. Den exempeluppgiften handlade om att avgöra huruvida likheten $73 + 48 = 75 + 46$ är sann eller falsk. Som jag förklarade ovan så går detta att avgöra enbart genom att betrakta strukturen och genom att flytta 2 från 48 till 73 för att få 75 + 46 även i vänsterledet. I denna omflyttning används egentligen den associativa lagen, $a + (b + c) = (a + b) + c$, vilket i detta fall kan beskrivas med: $73 + 48 = 73 + (2 + 46) = (73 + 2) + 46 = 75 + 46$. Här har alltså egenskaper hos talen och uttryckets struktur använts för att dra en slutsats om att utsagan är sann, utan att behöva räkna fram respektive uttrycks värde. Talen i utsagan har använts på ett sätt som liknar hur variabler används, det vill säga talen kan ses som kvasivariabler (Carpenter & Levi, 2000; Carraher m fl, 2006; Fujii & Stephens, 2001; 2008). I nästa steg kan detta byggas vidare på för att generalisera exemplet. Om båda leden består av additionsuttryck med två termer, hur går det då att avgöra om likheten är sann eller falsk utan att räkna ut värdet av uttrycken? Detta kan beskrivas med ord, till exempel ”om det går att flytta ett visst antal från den ena termen till den andra termen och då få samma uttryck som på andra sidan likhetstecknet så är likheten sann”. Det är en ganska lång beskrivning så här kommer det algebraiska symbolspråket verkligen till sin rätt. Istället för den långa meningen går detta att beskriva genom ”en likhet på formen $a + b = (a – x) + (b + x)$ är sann”. Både beskrivningen med ord och den kortare algebraiska beskrivningen är exempel på en generalisering av ett aritmetiskt samband. Detta innebär att innan elever har lärt sig det formella symbolspråket är det möjligt att uttrycka generaliseringar med ord. Även om de algebraiska symbolerna är utelämnade är det ändå generaliserad aritmetik. Exemplet visar alltså på en möjlighet att analysera information och utifrån denna analys ta fram en hypotes och beskriva denna med ord och/eller variabler.

Ett annat exempel på algebra som generaliserad aritmetik är att undersöka vad som händer vid subtraktion av ett tal med sig självt. Även här är det lättare att uttrycka den generella egenskapen med symboler, till exempel genom $a – a = 0$. En variant på denna uppgift är att ge eleverna likheten $a – a = 0$ istället för att de själva ska konstruera denna beskrivning av sambandet. I

denna variant av uppgiften ska eleverna istället tolka vad den upprepade variabeln a innebär i detta sammanhang. Det vill säga, utifrån denna likhet beskriva att utsagan betyder att ett tal subtraherat med sig självt är 0.

Utöver dessa exempel finns det många andra aritmetiska egenskaper som kan undersökas och generaliseras. Ett antal sådana uppgifter används i det prov som elever genomför i studien som analyseras i Artikel VII i avhandlingen. En av uppgifterna, som inte analyserades i artikeln på grund av artikelns begränsade omfång, exemplifierar en sådan aritmetisk egenskap:

> 17 + 12 = 29 är sant.
>
> Är 17 + 12 + 8 = 29 + 8 sant eller falskt?
>
> Hur vet du det?

Här är tanken att det finns möjlighet att identifiera en generalisering som kan tillämpas i det specifika fallet. I detta fall består generaliseringen i att om samma tal adderas till båda sidorna om likhetstecknet så bevaras likheten, det vill säga dessa likheter är ekvivalenta. Talet 8 är här en ersättning för en variabel, det vill säga 8 är en kvasivariabel (Carpenter & Levi, 2000; Carraher m fl, 2006; Fujii & Stephens, 2001; 2008).

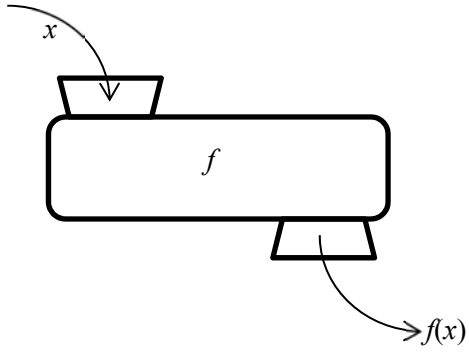
Slutligen handlar GA även om att motivera en generalisering, antingen genom att troliggöra genom exempel eller ett mer eller mindre formellt bevis. Om exempel används behövs även exemplens begränsningar uppmärksammas, det kan trots allt finnas situationer där en generalisering inte gäller om den inte kan bevisas för alla situationer. Ett exempel på detta är att kvadraten på ett tal och kvadratroten ur ett tal är varandras inversa (omvända) operationer, det vill säga $\sqrt{x^2} = x$. Detta är enbart sant för icke-negativa tal, till exempel är $\sqrt{(-2)^2} = 2$. Detta sista exempel visar även tydligt att den av Kaputs grundläggande aspekter som främst framträder inom GA är den första, det vill säga algebra som ett systematiskt sätt att beskriva bland annat generaliseringar och begränsningar (Kaput, 2008).

Dessa exempel kan sammanfattas i sex punkter om vad GA innebär (Blanton m fl, 2015):

- Analysera information för att ta fram en hypotes.
- Uttrycka hypotesen med ord eller med algebraiska uttryck.
- Beskriva innebörden av en upprepad variabel eller flera olika variabler.
- Identifiera att en generalisering går att tillämpa.
- Motivera en generalisering genom exempel eller mer eller mindre formella bevis. Undersöka exemplens begränsningar.
- Bestämma för vilka värden en generalisering är sann.

Stor idé 3: FT – Funktionellt tänkande

Kaputs andra innehållssprång innehåller studier av funktioner, relationer och samvarierande kvantiteter (Kaput, 2008). Ordet ”funktioner” avslöjar att det är i denna innehållssprång som FT har sitt ursprung, men att bara stanna upp där skulle missa en hel del av komplexiteten i denna stora idé. Kärnan inom EEEI är relationer och även när det gäller funktioner så är relationer en mycket viktig aspekt. En funktion definieras som en relation mellan två mängder där relationen består av par som uppfyller ett specifikt krav. Detta krav är att varje par består av ett tal från den första mängden (definitionsmängd) och ett tal från den andra mängden (värdemängd) på ett sådant sätt att varje tal i den första mängden förekommer som första tal i paren en och endast en gång (Kiselman & Mouwits, 2008). En populär bild för att åskådliggöra detta är den så kallade funktionsmaskinen. Givet ett tal in i maskinen fås ett tal ut. Det finns ingen möjlighet att samma tal in kan ge flera olika tal ut ur maskinen.



Figur 3: Funktionsmaskin

Det är detta som avses med att varje tal i den första mängden (tal som matas in i maskinen) förekommer som första tal i paren en och endast en gång. Eftersom det bara finns ett tal ut för varje tal som matas in i maskinen så kan det bara finnas ett par med detta första tal. En möjlig nackdel med denna funktionsmaskin skulle kunna vara att den beskriver att något *händer* med talet och att det *omvandlas* till ett nytt tal. En funktion är trots allt formellt sett en relation och inte en operation, vilket tydligare visas med en *funktionsgraf* eller en *värdetabell*. Däremot kan ett funktionsperspektiv ta sitt avstamp i operationer. Till exempel kan operationen addition med ett tal beskrivas som en funktion. Att addera med 3 kan då kopplas till funktionen $f(x) = x + 3$ (Carraher m fl, 2006).

Att funktioner innebär en relation som kan illustreras med hjälp av grafer kanske inte direkt kan ses som ett algebraiskt resonemang (Blanton & Kaput, 2005). Grafritande är inte heller en del av Kaputs (2008) grundläggande aspekter i algebra, även om en graf tydligt visar hur dessa talpar utgör den

relation som en funktion är. Även strukturen hos värdetabeller synliggör hur funktioner består av talpar. Värdetabeller har även fördelen att de lättare kan beskriva vissa typer av mönster och funktioner än vad de andra representationerna kan. Ett exempel på det är Fibonaccis talföljd, vilket är talföljden som inleds med 0 och 1 och varje efterföljande tal ges av summan av de två föregående talen. Talet på position *n* i talföljden kan beskrivas med funktionen

$$f(n) = \begin{cases} n, \text{ för } n \in \{0,1\} \\ f(n-1) + f(n-2), \text{ för } n \geq 2 \end{cases}$$

En funktion som beskrivs på detta sätt med hänvisning till tidigare funktionsvärden kallas för en *rekursiv* funktion. Inledningen av denna talföljd kan beskrivas genom följande värdetabell:

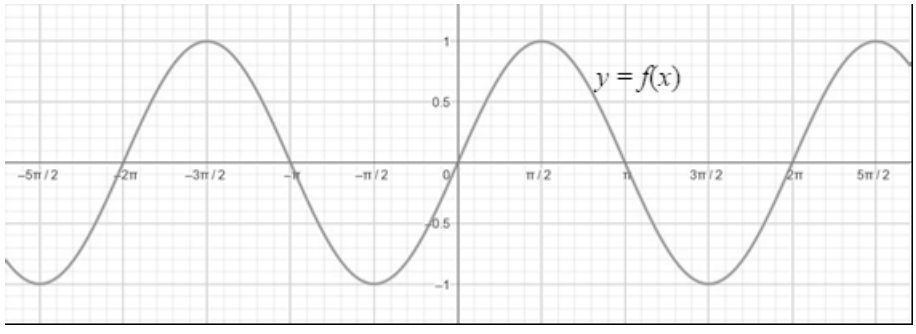
Tabell 2: Värdetabell för Fibonaccis talföljd

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
f(*n*)	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

I detta fall är värdetabellen tydlig och en graf kommer inte tydligt kunna visa hur denna talföljd är uppbyggd. Det omvända gäller vid andra typer av funktioner, till exempel trigonometriska funktioner som $f(x) = \sin x$. Värdetabellen beskriver inte hur funktionen ser ut mellan de värden som finns i tabellen och visar inte heller explicit funktionens periodicitet, medan grafen tydligt visar det som kännetecknar sinusfunktionen.

Tabell 3: Värdetabell för sinusfunktionen

x	$-\pi$	$-3\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi/4$	**0**	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
f(*x*)	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	0



Figur 4: Sinusfunktionens graf

I grafen ovan används notationen $y = f(x)$, vilket tydligt visar att y samvarierar med x. Vad x och y representerar framgår av sammanhanget och därmed blir det viktigt att kunna tolka variablernas innebörd, precis som det var i samband med den stora idén EEEI. Detta är ett exempel på hur variabler används och vad variablerna innebär återkommer i olika stora idéer och visar hur svår VAR är att separera från de andra stora idéerna. Exemplet visar även att delar av de olika stora idéerna ligger mycket nära varandra. I detta fall är det tolkning av variabler som finns i såväl EEEI, GA som i FT. Genom att gå tillbaka till EEEI och GA syns då ytterligare närbesläktade områden. Till exempel används ord eller variabler som ett verktyg för att beskriva matematiska modeller (EEEI) eller för att uttrycka en hypotes (GA). Inom FT blir då på motsvarande sätt användningsområdet för ord, variabler, grafer och funktionstabeller att beskriva ett mönster, en funktion eller relation mellan samvarierande variabler. Med samma tankesätt som inom EEEI och GA behöver då dessa mönster, samvariationer och funktioner inte bara beskrivas. För att överhuvudtaget kunna beskriva dessa måste de såklart först identifieras.

Detta ger de punkter Blanton m fl (2015) lyfter fram som exempel på vad som ryms inom den stora idén FT:

- Generera och organisera data i funktionstabeller.
- Rita en funktionsgraf.
- Identifiera betydelsen av en variabel, som används för att representera en varierande kvantitet.
- Identifiera ett rekursivt mönster och använd det för att bestämma närliggande värden.
- Identifiera samvariation (relationer) och beskriva denna med ord eller variabler.
- Identifiera en funktionsregel och beskriva denna med ord eller variabler.
- Använda en funktionsregel för att bestämma funktionsvärden.

- Givet värdet på en beroende variabel bestämma värdet på den oberoende variabeln.

Som avslutning på detta avsnitt om FT vill jag nämna att funktioner även kan kallas för *avbildningar*, men jag har valt att använda begreppet funktioner då det är standard inom matematikdidaktisk forskning och det begrepp som bland annat Blanton m fl (2015) och Kaput (2008) använder. Dessutom brukar avbildningar ses som mer generella än funktioner. Det vill säga avbildningar är med detta perspektiv funktioner där defintionsmängden och värdemängden inte nödvändigtvis består av tal (Kiselman & Mouwitz, 2008). Ett exempel på avbildningar, där de ingående mängderna inte består av tal, är så kallade *funktorer*, vilka spelar en central roll i Artiklar I - IV. För en förklaring av funktorer hänvisas till dessa artiklar då funktorer ligger utanför det didaktiska omfånget av denna avhandling.

Stor idé 4: VAR - Variabel

VAR har ursprungligen varit en egen stor idé (Blanton m fl, 2011; Blanton m fl, 2015), men har senare setts mer som en integrerad del av övriga stora idéer (Artikel VI; Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019). Eftersom VAR ändå har funnits med i processen med Artikel VI väljer jag att här beskriva den separat. Dessutom är variabler en viktig del av algebran och behöver en mer ingående förklaring. Trots detta kommer jag även att ge ett argument för varför VAR i praktiken inte bör ses som en egen idé. Detta gör även att beskrivningen av VAR inte innefattar en lista av aktiviteter, vilket har varit fallet i de tre tidigare avsnitten om EEEI, GA respektive FT.

Ett exempel på hur en variabel kan användas i fallet med vektorer är att om x betecknar en vektor kan vi definiera funktionen $f(x) = -x$, vilket innebär relationen $(x, -x)$ för alla vektorer x. Detta innebär att varje vektor x avbildas på sin omvända vektor $–x$, det vill säga vektorn har samma längd men omvänd riktning.

Figur 5: Vektorn x och dess motsatta vektor -x

Det döljs mer i begreppet variabel än bara dess definition. Variabler kan användas i många olika sammanhang. Exemplet ovan och beskrivningen av den stora idén FT beskriver användningen av variabler i en funktion. I avsnittet

om EEEI används variabler bland annat i samband med ekvationer och i beskrivningen av GA finns variabler i likheter, beskrivningar av generella samband med mera. En variabels innebörd beror alltså inte enbart på vilken storhet den betecknar utan även i vilket sammanhang variabeln används. Det innebär även att samma variabel kan byta roll beroende på vad den för tillfället används till. Jag illustrerar detta med hjälp av följande exempeluppgift:

> Anton är dubbelt så gammal som Oscar var för 3 år sedan. Om 5 år blir summan av deras åldrar 25 år. Hur gamla är Anton och Oscar?

Det är lämpligt att använda en ekvation för att lösa denna uppgift. Jag börjar med att kalla Oscars ålder för x år. Här används variabel för att *beteckna en okänd kvantitet*. I nästa steg av lösningen används variabeln för att beskriva hur Antons och Oscars åldrar beror på varandra genom att Antons ålder uttrycks med hjälp av x (Oscars ålder). Antons ålder är $2(x - 3)$ år. Nu beskriver inte längre variabeln enbart Oscars ålder utan alltså även *sambandet* mellan Oscars och Antons åldrar. Variabeln har fått en utökad betydelse. Med hjälp av detta samband kan deras åldrar om fem år uttryckas med $x + 5$ år respektive $2(x - 3) + 5$ år. Till slut används dessa uttryck för att konstruera ekvationen $x + 5 + 2(x - 3) + 5 = 25$. Nu har variabeln bytt sammanhang från att vara en beteckning för en ålder, via att vara del av en beskrivning av ett samband, till att vara *en variabel i en ekvation*. Vid lösning av ekvationen är den ursprungliga innebörden av variabeln (Oscars ålder) oväsentlig, men efter ekvationen är löst behöver lösningen tolkas utifrån denna ursprungliga betydelse. Det innebär att variabeln återigen byter sammanhang. I denna uppgift har variabeln x alltså innehaft flera olika roller beroende på var i lösningsprocessen variabeln används.

Notera att variabeln x finns två gånger i ekvationen $x + 5 + 2(x - 3) + 5 = 25$ ovan, vilket är ett exempel på ytterligare en viktig egenskap hos variabler. Om en variabel förekommer upprepade gånger i en ekvation, likhet, olikhet med mera så betecknar den samma värde. Detta kan leda elever att tro att om det är olika variabler så måste de ha olika värden (Stephens, 2008; Swan, 2000), men detta är en falsk slutsats. Olika variabler betecknar enbart värdet för olika objekt och de objekten kan ha samma värde. Ett exempel på detta är ekvationen $x + y = 2$. Denna ekvation har oändligt många lösningar, varav en är $x = y = 1$.

Ytterligare en egenskap hos variabler värd att nämna återkopplar till variabelns definition. Mer specifikt tar denna egenskap avstamp i definitionens ord ”i en given mängd”. Vilka värden variabeln kan anta beror på denna mängd. I beskrivningen av FT användes Fibonaccis talföljd som exempel, vilket mynnade ut i en funktion som betecknades med $F(n)$. Funktionens definitionsmängd är alla icke-negativa heltal, vilket innebär att n enbart kan anta heltalsvärden större än eller lika med 0. Detta n är ett exempel på en *diskret* variabel. Diskret innebär att varje element i mängden har ett positivt avstånd till alla

andra element (Kiselman & Mouwitz, 2008). I ett vardagligt språk kan detta beskrivas med att det finns språng mellan talen när de är utplacerade på en tallinje. Detta till skillnad från *kontinuerlig* som innebär att sådana språng inte förekommer. Exempel på kontinuerliga variabler finns i formeln för att omvandla temperaturangivelse mellan grader Celsius och grader Fahrenheit, $F = 1{,}8C + 32$. Här kan C anta alla värden större än eller lika med den absoluta nollpunkten, det vill säga $C \geq -273{,}15$, och därmed är C en kontinuerlig variabel.

Jag har i detta avsnitt kopplat tillbaka till tidigare beskrivna stora idéer (EEEI, GA och FT), vilket visar att variabler förekommer inom de andra stora idéerna snarare än att vara en helt separat stor idé. Trots svårigheten att separera VAR från övriga stora idéer har denna teoretiska separation lett till att viktiga nyanser av variabelbegreppet framträtt; nyanser som hade varit svåra att lyfta fram inom övriga stora idéer. Därför är det värt att i teorin behandla VAR som en egen stor idé, men i skolmatematiken är det, som tidigare nämnt, svårt att separera denna stora idé från de övriga (Artikel VI; Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019). I praktiken bör därför VAR inte behandlas separat utan som en integrerad del av de övriga stora idéerna. Avslutningsvis kan VAR sammanfattas med följande punkter (Blanton m fl, 2015):

- Innebörden av variabler kan tolkas på många olika sätt.
- En variabel representerar värdet eller måttet på ett objekt, inte objektet självt.
- Om samma variabel används mer än en gång i en ekvation, likhet, utsaga med mera så måste alla instanser av variabeln representera samma värde. Olika variabler behöver inte ha olika värden.
- Samma variabel kan ha olika roller beroende på situationen.
- En variabel kan representera en diskret eller en kontinuerlig kvantitet.

Stor idé 5: PR – Proportionellt Resonemang

Blanton m fl (2015) beskriver den stora idén PR som en möjlighet till algebraiska resonemang om två generella kvantiteter där förhållandet mellan dessa kvantiteter är konstant, vilket innebär att denna stora idé utgår från Kaputs (2008) andra innehållssträng. Ovanstående beskrivning av PR stämmer väl överens med definitionen av proportionalitet, det vill säga ett ”samband sådant att kvoten mellan storheterna är konstant” (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 98). Allmänt innebär detta att om den ena kvantiteten multipliceras eller divideras med en given faktor, så måste den andra kvantiteten multipliceras eller divideras med samma faktor för att bevara proportionaliteten. Detta ger att de enda räknesätt som används vid bevarandet av proportionalitet är multiplikation och division.

Ett vardagligt exempel på proportionalitet är hur långt något rör sig på en viss tid om farten är konstant. Här utgör alltså farten den konstanta kvoten, vilken även kallas *proportionalitetskonstant*. Det är även intressant att titta på enheterna för proportionalitetskonstanten och de båda storheterna. Till exempel om sträckan uttrycks i kilometer (km) och tiden i timmar (h) kan proportionalitetskonstanten antingen uttryckas som km/h eller h/km, två helt olika mått som används i olika sammanhang. Det första måttet visar farten, vilket bland annat kan användas för att beskriva en bils fart eller hastighetsgränser. Det andra måttet beskriver hur lång tid det tar att förflytta sig en kilometer, vilket till exempel används för att beskriva tempot för en löpare (min/km). Enligt mig innebär detta att en generalisering av PR även kan innebära en analys av de ingående enheterna för att kunna avgöra vilken proportionalitetskonstant som är relevant i just detta fall eller hur de olika enheternas inbördes relation gör att vilken beräkning som krävs för att lösa ett problem framträder. Ett exempel på detta är om farten (km/h) är given tillsammans med hur långt en person har åkt (km) så kan tre olika enheter beräknas:

1. (km/h) / km = 1/h
2. km / (km/h) = h
3. km · (km/h) = $(km)^2$/h

Av dessa tre enheter är det troligen alternativ 2 som är den som är mest intressant, det vill säga hur lång tid det tog att förflytta sig en viss sträcka vid en viss fart. Beräkningen sträckan dividerat med farten framträder då av de ingående enheterna. Detta exempel hör hemma i senare skolår och är troligtvis inte lämpligt för de tidigare skolåren. Faktum är att i tidiga skolår är PR inte särskilt framträdande om den ens förekommer alls (Artikel VI; Blanton m fl, 2015; Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019). Trots detta finns det ändå uppgifter i läroböcker för tidigare skolår som innehåller proportionella samband. Det rör sig till exempel om mönster och hur dessa mönster kan beskrivas, men i dessa uppgifter ligger fokus på FT och aldrig på PR (Artikel VI). På grund av detta är det svårt att exemplifiera vad PR kan innebära i tidigare skolår utan beskrivningen av PR får hållas mer generell. Dessutom är PR i en viss aspekt nära besläktad med delar av FT eftersom proportionalitet är kärnan hos linjära funktioner[8]. Figur 6 nedan visar ett exempel som innehåller linjära funktioner och används för att påvisa FT i Artikel VI, men som skulle kunna kopplas till PR om uppgifterna omarbetas något.

[8] Jag använder linjär funktion i kontrast till linjär avbildning. Skillnaden mellan dessa begrepp är att en linjär avbildning kräver att 0 avbildas på 0 (Lang, 1987), medan denna restriktion inte finns för en linjär funktion (Jacob, 1995). Detta är även överensstämmande med hur begreppet linjär funktion används i skolmatematiken.

84

a) Hur många stickor finns det i figur 10? Figur 100? Figur *n*?

b) Vilket nummer har figuren med 24 stickor? 60 stickor?

85

Figur	1	2	3	4	10	50	*n*
Röda stickor	1	1					
Blå stickor	1 · 2	2 · 2	3 ·				
Summa stickor	1 · 2 + 1						

Figur 6: Exempeluppgift ur Eldorado 6B, s. 98, använd i Artikel VI

Uppgift 84 i Figur 6 innehåller ett proportionellt samband mellan figurens nummer och antalet stickor i figuren. Genom hur uppgiften är konstruerad är det inte proportionaliteten som lyfts fram. Denna uppgift kan ändå användas som inspiration för att påvisa PR. Genom frågeställningen ”Hur förhåller sig antalet kanter i ett okänt antal trianglar till antalet trianglar?” hamnar fokus på det proportionella sambandet istället för på ett mönster och ett funktionellt tänkande. Uppgift 85 innehåller även den ett proportionellt samband, denna gång mellan figurens nummer och de blå stickorna. Det här visar att förändringen av storheterna (figurens nummer i relation till de blå stickorna) kan vara proportionell, även om storheterna i sig (totala antalet stickor i relation till figurens nummer) inte är det. Båda dessa samband utgör linjära funktioner och exemplifierar det faktum att alla linjära funktioner åtminstone innehåller ett proportionellt samband i förändringen.

Utöver linjära funktioner finns gott om exempel på proportionella resonemang i till synes vitt skilda matematiska områden. Till exempel kan skala ses som en samvariation av längder och procent eller andel kan vara en samvariation av antal. Att upptäcka dessa proportionella samband, analysera dessa och utifrån analysen avgöra vilket räknesätt som ska användas för att räkna ut proportionalitetskonstanten eller den andra kvantiteten blir då en central del av PR.

Jag sammanfattar detta i fyra punkter:

- Proportionalitet innebär att två storheter samvarierar på ett sådant sätt att kvoten mellan dessa storheter är konstant.
- Förändringens magnitud i linjära samband utgör en proportionalitet, även om storheterna i sig inte är proportionella.

- Proportionalitet kan generaliseras till analys av storheternas enheter.
- Analys av proportionella samband och relationer mellan givna kvantiteter visar vilket räknesätt som ska användas för att beräkna den andra kvantiteten eller proportionalitetskonstanten.

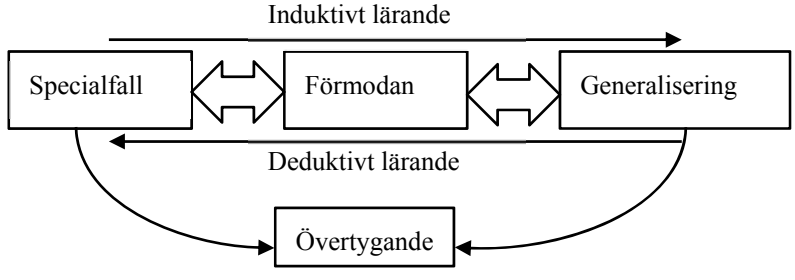
Avslutande kommentarer om de fem stora idéerna

Du som läsare har troligtvis nu reagerat på att ingen av de fem stora idéerna till synes behandlar Kaputs (2008) tredje innehållsspråk ”tillämpningar av modeller”. Även om såväl GA som FT inte direkt behandlar denna innehållsspråk så kan tillämpningar av modeller rymmas inom båda dessa två stora idéer. En av innehållspunkterna för GA som jag beskrev tidigare var att identifiera en möjlig tillämpning av en generalisering. En sådan generalisering kan mycket väl vara en matematisk modell. Motsvarande gäller för FT. En funktion kan vara en del av beskrivningen av en matematisk modell och då ryms såklart beräkning med hjälp av denna modell, det vill säga beräkning av funktionsvärden, inom FT. Även om denna innehållsspråk kan skönjas i dessa två stora idéer är den ändå inte kärnan i dessa. Istället är det Kaputs andra innehållsspråk som utgör kärnan för såväl FT, PR som EEEI. Dessa tre stora idéer tar alla avstamp i matematiska relationer och samband. Den stora idén GA tar istället avstamp i aritmetikens strukturer och tillhörande system, vilket innebär att kärnan i GA utgörs av Kaputs första innehållsspråk.

Fyra av de stora idéerna är alltså tydligt kopplade till någon av Kaputs tre innehållsspråk. Återigen framträder VAR som den stora idé som avviker från detta. VAR i sig handlar inte om studier av strukturer och system, inte om funktioner, relationer och kvantiteter som samverkar och inte heller om tillämpningar av matematiska modeller. Å ena sidan, om de stora idéerna ska ses som en fördjupning av Kaputs innehållsspråk så ska inte VAR vara en stor idé. Å andra sidan sätter VAR fingret på något som är kärnan i Kaputs grundläggande aspekter. Variabler är det främsta verktyget för att kunna *uttrycka* generaliseringar (den första grundläggande aspekten) och även grunden i det formella språk som styr hur algebran kan *användas* för att till exempel manipulera algebraiska uttryck. Detta innebär att VAR kan ses som något som lyfter fram de grundläggande aspekterna istället för att ha fokus på någon av innehållsspråken. Att lyfta fram VAR på detta sätt gör det ännu tydligare varför VAR är svår att arbeta med som en egen stor idé i praktiken, trots att den går att teoretiskt beskriva separat. Övriga fyra stora idéer är lättare att i praktiken arbeta med separat, vilket ligger i linje med att de utgår från Kaputs innehållsspråk.

Om valet av teoretiskt ramverk

I arbetet med denna avhandling har GA varit min utgångspunkt då den ligger i linje med det jag ser som en av matematikens främsta styrkor; matematik som ett logiskt system och där till synes separata innehållsområden knyts samman genom att upptäcka likheter mellan innehållsområdena, det vill säga konceptuell kunskap (Hiebert & Lefevre, 1986; Skemp, 1976). De likheter som finns mellan de olika innehållsområdena gör att generaliseringar kan upptäckas. Dessa generaliseringar kan i sin tur användas för att tillämpa befintliga kunskaper inom ett matematiskt innehållsområde för att lösa problem inom ett annat innehållsområde. GA är även i linje med de fyra processer som Burton (1984) beskriver som delar av matematiskt lärande (Figur 7). I avhandlingen fokuserar jag på algebraiskt tänkande och kunskap. När elever utvecklar ett algebraiskt tänkande och konceptuell förståelse av algebra så kan det ses som en del av deras lärandeprocess.



Figur 7: Induktivt och deduktivt lärande enligt Burton (1984)

GA innebär bland annat att analysera information för att ta fram en hypotes, det vill säga utifrån specialfall framträder en förmodan. Denna hypotes uttrycks sedan i form av en generalisering och slutligen behöver denna generalisering motiveras. Det vill säga generaliseringen måste bli tillräckligt övertygande, inte bara för den som producerat generaliseringen utan även för omgivningen. På så sätt sker ett *induktivt* lärande. GA innebär även omvändningen av denna process, ett *deduktivt* lärande. Med utgångspunkt i en generell situation kan en hypotes framträda om att denna generalisering går att tillämpa i en specifik situation, det vill säga en förflyttning från generalisering till specialfall. Även här avslutas processerna med att övertyga sig själv och andra om att generaliseringen är möjlig att tillämpa i det specifika fallet. Utifrån ett sådant perspektiv blir då GA ett sätt att se på matematiskt lärande i allmänhet och inte begränsat till enbart algebra.

Som tidigare beskrivet är forskning om generaliseringar i skolmatematiken mindre framträdande inom svensk forskning. Detta gör att de stora idéerna är lämpliga att använda för att belysa vilken typ av algebra som förekommer i skolan och därigenom synliggöra generaliseringar genom den stora idén GA.

För att förstå och beskriva ramverket så väl som möjligt har då GA, på grund av denna stora idés centrala roll i avhandlingen, behövts undersökas teoretiskt. Denna fördjupning har bland annat mynnat ut i ett paper innehållande såväl teoretiska som praktiska aspekter av GA (Artikel V), vilket presenterades på MADIF 2018. Detta paper utgår från olika definitioner av begreppet generaliserad aritmetik (se Blanton m fl, 2015; Carraher m fl, 2006; Fujii & Stephens, 2001; 2008; Kaput, 2008), fördjupar dessa och beskriver GA i ett svenskt sammanhang. Det är även värt att notera att även om GA främst framträder inom didaktisk forskning under senare år så är begreppet på intet sätt nytt (Linchevski & Herscovics, 1996; Usiskin, 1988). Dessutom kan GA användas för att beskriva mitt arbete med licentiatavhandlingen (Artikel III).

När jag ser tillbaka på mitt arbete med licentiatavhandlingen ser jag tydligt hur ett kontinuerligt växlande mellan induktivt och deduktivt lärande hjälpte mig framåt. Enklare specialfall hjälpte till att bygga upp och förstå mer generella slutsatser, vilka i sin tur prövades mot andra enkla fall för att förstå hur dessa generaliseringar fungerar mer i detalj. Specifikt kommer jag ihåg en situation när jag förstod att en trolig generalisering inte gällde i allmänhet och därigenom förändrades helt vilka resultat som kunde förväntas. Detta överraskande resultat beskrivs i kapitlet *Sammanfattning och resultat av artiklarna*, medan jag här kortfattat kommer förklara hur generaliseringar och samband är synliga i licentiatavhandlingen och artiklarna i matematik (Artiklar I, II, III och IV).

Avhandlingens matematiska bidrag handlar om reella divisionsalgebror och hur klassificering av dessa kan förenklas genom att problemet överförs till klassificering av närbesläktade strukturer och avbildningar. Det vill säga, de likheter och de samband som finns mellan dessa olika strukturer gör det möjligt att förstå reella divisionsalgebror genom de enklare strukturerna. Ytterligare exempel på hur GA är synligt i den matematiska delen av avhandlingen är att reella divisionsalgebror kan ses som en generalisering av att de enklaste exemplen på divisionsalgebror är de reella och komplexa talen, med de tillhörande operationerna multiplikation och division. Med en god bild av samband mellan reella och komplexa tal och genom att notera hur komplexa tal kan ses som en generalisering av de reella talen går det förvånansvärt enkelt att bygga upp ännu mer generella strukturer och studera dessa. Den metod som används för att bygga upp de komplexa talen från de reella talen kan generaliseras till det som i Artiklar I, II, III och IV kallas för dubbling av divisionsalgebror. Det vill säga varje befintlig reell divisionsalgebra, med dimension högst fyra, ger med denna metod upphov till en ny reell divisionsalgebra. Det innebär vidare att genom att utgå från hur de komplexa talen kan konstrueras utifrån de reella talen och generalisera denna process kan ett oändligt antal nya reella divisionsalgebror skapas. Under arbetet med licentiatavhandlingen var detta ingenting jag tänkte på som en generalisering utan det var självklart att matematiken fungerar på detta sätt. I och med arbetet med denna avhandling blev det däre-

mot tydligt att samma tankesätt förekommer, eller åtminstone borde förekomma, i matematiken genom hela grundskolan och gymnasiet för att bli ännu mer framträdande vid universitetsmatematik och inom matematisk forskning. Den stora idén GA kan på så sätt ses som en möjlig röd tråd genom skolmatematiken – en tråd som fortsätter in i universitetsmatematiken. Just det att GA så väl beskriver denna matematiska process och inkluderar både de induktiva och deduktiva processerna gör att GA, men även de stora idéerna i allmänhet, blir centrala för avhandlingen.

Även om mitt arbete ursprungligen tog avstamp i GA så har EEEI under pågående arbete med avhandlingen fått en allt mer central roll. Detta beror främst på att i en svensk kontext har EEEI en mycket framträdande roll i såväl läromedel som läroplan samtidigt som GA förekommer sparsamt (Artikel VI), men det beror även på att de olika stora idéerna på intet sätt utesluter varandra. Att enbart arbeta med GA utan att till exempel använda algebraiska uttryck är i princip omöjligt. EEEI kan på så sätt ses som en grund för GA. Samtidigt kan GA ses som en grund för EEEI genom att GA bland annat innebär att identifiera möjliga generaliseringar, i detta fall inom innehåll som kan kategoriseras som EEEI. Detta exemplifierar hur stora idéer samverkar och att det inte går att säga att en stor idé ska föregå en annan stor idé. Istället kan de stora idéerna förekomma växelvis beroende på innehåll (Blanton m fl, 2015; Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019) och tankesättet inom respektive stor idé tillämpas när så är lämpligt. Det här visar att även om mitt fokus har varit på GA så går det inte att utesluta övriga stora idéer. Alla stora idéer behövs för ett algebraiskt tänkande, vilket även är syftet med dessa stora idéer (Blanton m fl, 2011; Blanton m fl, 2015; Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019; Blanton, Stroud m fl, 2019).

Metodologi

Detta avsnitt inleds med en överblick av de ingående studierna i avhandlingen. Därefter presenteras materialet, läroplan och läroböcker samt elevlösningar, hur dessa samlats in och vilket urval som har gjorts. I nästa del beskrivs analysmetoderna, inklusive de val som har gjorts till exempel rörande verktyg för analysen och analysenhet. Avslutningsvis diskuteras etiska överväganden och studiernas reliabilitet och validitet.

Genom att studera den avsedda, den potentiellt genomförda och även den uppnådda läroplanen (Valverde m fl, 2002), vilket behandlades i avhandlingens *Inledning*, uppstår behovet av olika metoder. Det är en sak att studera vad som står i läroplanen och hur detta omsätts i läroböcker och något helt annat att studera vad utfallet i slutändan, det vill säga elevernas kunskaper, är. För att studera den avsedda och den potentiellt genomförda läroplanen har en innehållsanalys (Bryman, 2012) av dokument i form av läroplan och läromedel genomförts. Detta syftar till att upptäcka vad som framträder som läroplanens intentioner angående tidig algebra samt till att kunna beskriva vilka möjligheter till tidig algebra som eleverna erbjuds genom läroböcker. Som verktyg för innehållsanalyserna användes Algebrans stora idéer.

Artikel V utreder den stora idén GA genom konkreta exempel, men diskuterar även begreppet teoretiskt inför användningen av de stora idéerna i analysen vid den första studien (Artikel VI). Därmed kommer innehållet i Artikel V bidra med en stor del av den metodologiska diskussionen för Artikel VI. Resultaten i Artikel VI motiverar sedan den fördjupning som den andra studien (Artikel VII) innebär, där elevlösningar analyseras för att studera hur elever beskriver och använder likhetstecknet. Jag inleder med att beskriva det datamaterial som använts vid studierna.

Datamaterial, urval och insamling

Läroplan och läroböcker

I den första studien klassificeras det algebraiska innehållet i Lgr11 (Skolverket, 2011) samt i två läroboksserier i matematik för årskurs 1-6. Lgr11 har reviderats vid flera tillfällen (Skolverket, 2016; 2017a; 2018; 2019), men kursplanen i matematik har varit oförändrad ända fram till revideringen 2018. I revideringen 2018 tillkom programmering som en del av algebrainnehållet.

Eftersom detta tillägg tillkommit i slutet av arbetet med avhandlingen och efter det att Artikel V och Artikel VI publicerades har denna del av kursplanen i matematik inte beaktats.

Att välja vilka läroböcker som ska analyseras är inte helt enkelt på grund av att det saknas officiell statistik över vilka läromedel som är vanligt förekommande i svenska skolor. Förlagen delar inte heller med sig av denna information av konkurrensskäl. På grund av detta behöver urvalet göras på ett annat sätt än att välja de läromedel som kan garanteras vara mest använda. Urvalet baseras istället på att de två valda läroboksserierna är de läroböcker som flest svenska lärare använde enligt en studie av Neumann m fl (2015). I den studien uppgav 47,1% respektive 17,3% av lärarna att de använde *Matte Direkt* respektive *Matte Eldorado*, vilka därmed var de två vanligast förekommande läroböckerna. Vidare visade samma studie att det fanns en signifikant skillnad mellan vilket stöd för undervisningen lärarna anser sig få genom läroböckerna beroende på vilken bok de använder. Ytterligare ett resultat i studien beskriver hur lärarna använder de olika läromedelsserierna. Lärare som använde *Matte Direkt* lät elever i större utsträckning arbeta på egen hand i läroboken eller med annat material än lärare som använde *Matte Eldorado*. Sammantaget gör detta val av läroböcker att chansen ökar för att upptäcka olika synsätt på algebra och därmed kan ge en mer varierad beskrivning av tidig algebra i svenska läromedel. Båda läroboksserierna består av två böcker för varje årskurs, vilket ger att totalt 24 läroböcker har analyserats.

Elevlösningar

Datamaterialet i den andra studien utgörs av elevlösningar på ett test i form av ett prov bestående av 37 uppgifter, inkluderat deluppgifter. Totalt analyserades 291 elevers lösningar av detta prov. Detta material påverkas främst av tre val, urvalet av elever samt valet av provuppgifter, men även vilka instruktioner som gavs till eleverna.

Det test som användes vid datainsamlingen återges i *Bilaga 1*. Testet konstruerades av Matthews m fl (2012), vilket i sin tur baserades på uppgifter från Rittle-Johnson m fl (2011), och översattes av mig till svenska. I samband med detta anpassades några uppgifter till ett svenskt sammanhang. Testets uppgifter är även klassificerade utifrån vilken nivå av kunskap om likhetstecknet som krävs för att lösa dem med en viss strategi. Dessa kunskapsnivåer beskrivs i Tabell 4, s. 61, i avsnittet *Analysverktyg*.

Eftersom det visat sig att socioekonomisk bakgrund påverkar elevernas resultat (UNICEF, 2018; Yang Hansen & Gustafsson, 2016; 2019), valdes respondenterna ut från skolor som har olika socioekonomiska förutsättningar. Genom att använda SALSA[9] valdes tre skolor i Mellansverige där elevernas föräldrar har en utbildningsnivå över genomsnittet, i nivå med genomsnittet

[9] Skolverkets Arbetsverktyg för Lokala SambandsAnalyser.

respektive under genomsnittet för landet. Tanken med urvalet var att trots att detta är en fallstudie kunna erhålla en något mer representativ bild av svenska elevers kunskaper. Men resultatet visade att skillnaden mellan skolorna var väsentligt större än vad jag hade förmodat. Att då behandla alla elever, oavsett skola, som ett enda fall skulle vara missvisande. Därmed valde jag att behandla skolorna som tre olika fall. Efter inhämtat samtycke (se Etiska aspekter på studierna) fick eleverna i årskurs 3 och 6 på de tre skolorna genomföra testet.

I ett första steg genomfördes en pilotstudie i två klasser i årskurs 3 vid en av skolorna. Vid denna pilotstudie uppmanades eleverna att fråga om någonting var oklart så att eventuella oklarheter i uppgifterna skulle kunna förtydligas. De frågor som eleverna ställde bedömdes inte påverka provets utformning eller formuleringar så inga ändringar i provet gjordes efter pilotstudien. Därmed kunde även dessa prov inkluderas i studien. De frågor som uppstod var främst av karaktären ”Om jag inte vet/kan förklara, vad gör jag då?” på frågor där det inte fanns möjlighet att markera *vet inte*. Eleverna fick då instruktionen ”om du inte vet, skriv *vet inte*”. Likaså förekom förtydliganden som ”försök skriva hur du tänkte med ord eller med en beräkning” när elever frågade om hur de skulle förklara något.

I nästa steg samlades data in från de två andra skolorna. Som en del av universitetsstudenters självständiga arbeten samlades data in från både årskurs 3 och 6 från den ena skolan och från årskurs 3 i den andra skolan. Jag samlade sedan in data från årskurs 6 i den sistnämnda skolan samt slutförde datainsamlingen från skolan där pilotstudien hade genomförts.

Analysverktyg

Läroplan och läroböcker

Den första studien syftar till att utifrån Algebrans stora idéer klassificera det matematiska innehållet i Lgr11 och innehållet i två läroboksserier för årskurs 1-6. För att kunna genomföra denna analys krävs en operationalisering av de stora idéerna. Vid skrivandet av operationaliseringen uppstod svårigheter med gränsdragningen mellan de olika stora idéerna, vilket, som tidigare nämnts, beror på att de stora idéerna ofta samverkar. Arbetet med gränsdragningen resulterade dels i den teoretiska genomlysningen av GA (Artikel V), dels i de exempelpunkter som finns i slutet på avsnitten om respektive stor idé i avhandlingens *Teoretiska ramar*. Utifrån dessa punkter klassificerades därefter det matematiska innehållet i Lgr11 och innehållet i läroböckerna.

En annan aspekt av analysen är valet av *analysenhet*. Vid analysen av det matematiska innehållet i Lgr11 analyserades de *innehållspunkter* som finns i det centrala innehållet i matematik. Dessa kategoriserades utifrån vilken stor idé som är synlig i beskrivningen av respektive innehåll.

Ett ofta förekommande val av enhet vid läromedelsanalys är antal *uppgifter* av en viss typ (Bergwall & Hemmi, 2017; Davis, 2012; Hanna & de Bruyn, 1999; Li, 2000; Stylianides, 2009; Stylianides & Ball, 2008; Thompson m fl, 2012), i detta fall antalet uppgifter som där en viss stor idé framträder. Problemet med detta val av enhet för den aktuella studien är att de stora idéerna kräver att uppgiften läses i ett sammanhang för att intentionen med uppgiften ska framträda. Att då analysera uppgift för uppgift gör att information förbises, vilket gjorde att en större analysenhet än en uppgift krävdes (Valverde m fl, 2002). För att få en så rättvisande bild som möjligt valdes då antal *sidor* som enhet. Även om detta är en mycket mer trubbig enhet som till exempel innebär att en sida kan klassificeras som innehållandes mer än en idé överväger fördelen, det vill säga att helheten lättare synliggörs, de nackdelar som finns med denna stora enhet. Valet av sida som analysenhet har även fördelen att de teoretiska genomgångar och exempelösningar som presenteras i läroböckerna beaktas vid analysen. Slutligen, för att en sida skulle kategoriseras som tillhörandes en viss stor idé krävdes att minst halva sidan visade på ett tankesätt hörandes till denna stora idé.

Inledningsvis kategoriserade jag och Bråting innehållet i två kapitel oberoende av varandra. I de få fall kategoriseringen skiljde sig åt diskuterades detta och vi enades kring en gemensam syn. Vidare, om det under kategoriseringen uppstod osäkerhet hos någon av oss två så vände vi oss till Hemmi för en oberoende tolkning. I de tre fall som detta uppstod kom vi tre gemensamt fram till en klassificering av den aktuella sidan.

Elevlösningar

I avhandlingens andra studie undersöks hur elever beskriver och använder likhetstecknet vid lösning av en viss typ av uppgifter. Som tidigare nämnt baseras det prov som används vid studien på det prov som tagits fram av Matthews m fl (2012) i syfte att undersöka elevers kunskaper om likhetstecknet. Som en del av arbetet med att konstruera detta prov skapades en så kallad konstruktionskarta där olika nivåer av kunskap om likhetstecknet beskrivs (se Tabell 4 nedan). Dessa fyra nivåer kan användas för att kategorisera såväl vilken kunskapsnivå som krävs för att lösa en uppgift på ett visst sätt, men även för att klassificera en elevlösning utifrån den kunskapsnivå lösningen påvisar. Det förstnämnda är intressant utifrån hur ett prov kan sättas samman för att klargöra vilken kunskapsnivå en viss elev befinner sig på samt utifrån elevens resultat avgöra kunskapsnivån. Den andra aspekten kan användas för att hitta elevlösningar som använder sig av en strategi tillhörande en annan nivå än den som uppgiften är avsedd att lösa. Det sistnämnda har använts av Pang och Kim (2018) då de, med hjälp av samma prov som jag använt i min studie, undersökte om elever använde en lösningsstrategi baserad på beräkningar eller på likhetstecknets relationella struktur.

Tabell 4: Nivåer av kunskap om likhetstecknet enligt Matthews m fl (2012)

Kunskap om likhetstecknet	**Exempel**
4: Jämförande relationell	Eleven vet att likhetstecknet innebär en relation och använder detta för att effektivt lösa vissa typer av uppgifter genom transformationer. Ett exempel på detta är att likheten 67 + 86 = 68 + 85 är sann motiveras genom att jämföra talen. Eftersom 68 är ett mer än 67 och 85 är ett mindre än 86 måste de båda sidorna vara lika. Eleven behöver alltså inte räkna, istället görs enbart en jämförelse.
3: Grundläggande relationell	Eleven vet att likhetstecknet innebär en relation, men räknar ut respektive sida var för sig. Till exempel motiveras att 67 + 86 = 68 + 85 är sant genom att räkna ut sidorna var för sig, 67 + 86 = 153 och 68 + 85 = 153.
2: Flexibel operationell	Eleven löser uppgifter som stämmer överens med en operationell syn på likhetstecknet, även om beräkningarna sker på höger sida om likhetstecknet. Exempel på sådan uppgift är 8 = 6 + __.
1: Strikt operationell	Beräkningar sker på vänster sida om likhetstecknet. Exempel på detta är 6 + 2 = __ och 6 + __ = 8.

Det Pang och Kim (2018) använder sig av är att den högsta kunskapsnivån innebär att inga fullständiga beräkningar behöver utföras, medan de övriga tre nivåerna innefattar beräkningar av en eller båda sidorna om likhetstecknet. För min studie innebär detta att jag antingen kan välja att följa Matthews m fl (2012) eller Pang och Kim (2018) beroende på vad jag vill synliggöra. Eftersom jag vill kunna beskriva *hur* elever använder likhetstecknet och inte vilken kunskapsnivå de befinner sig på blir min analys att baseras på samma bakomliggande tankar som i Pang och Kims analys. På så sätt klassas enbart lösningar motsvarande den högsta kunskapsnivån 4 som *relationella* lösningar. Övriga lösningsstrategier innehåller *beräkningar*, vilket då utgör den andra typen av lösningar (nivåerna 1-3). Slutligen kategoriseras i min analys svar utan förklaring eller med en irrelevant förklaring som *ofullständiga* lösningar.

Vid en första anblick kan det te sig som att detta gör att information om huruvida lösningen använder likhetstecknets relationella innebörd eller ej tappas, men på grund av provets konstruktion är detta inte fallet. Eftersom alla uppgifter är klassificerade utifrån de fyra olika kunskapsnivåerna krävs att eleven vet att likhetstecknet är en relation för att lösa uppgifter på nivå 3 eller

4. På så sätt kan *operationella* (nivå 1 och 2) och *relationella* (nivå 3 och 4) uppgifter och därmed även lösningar särskiljas. Vidare innebär detta val att alla lösningar kategoriseras utifrån om de baseras på beräkningar eller om de är relationella oavsett vilken kunskapsnivå uppgiften bedöms kräva. Därigenom synliggörs även lösningar som använder en jämförande relationell strategi (nivå 4) på en uppgift som kräver en grundläggande relationell kunskap (nivå 3). Vidare kan även felaktiga lösningar kategoriseras utifrån denna princip för att även där synliggöra vilken strategi eleven har valt. Det visade sig dock vid analysen att kategoriseringen av felaktiga elevlösningar inte bidrog med någon ytterligare information eftersom en (jämförande) relationell kunskapsnivå aldrig var synlig i de felaktiga lösningarna i min studie. Detta stämmer överens med resultaten i Pang och Kims (2018) studie där felaktiga lösningar som uppvisade ett relationellt tänkande i princip var obefintliga. På grund av detta redovisas inte kategoriseringen av de felaktiga lösningarna i Artikel VII.

Avslutningsvis är det värt att nämna att detta val av analysverktyg även möjliggör en jämförelse med de sydkoreanska eleverna i Pang och Kims (2018) studie. Detta är även intressant då Sydkorea är bland de länder som presterar bäst i internationella mätningar över elevers matematikkunskaper (Mullis m fl, 2016; Schleicher, 2019) och kan ge en fingervisning om hur kunskaperna i de studerade svenska fallen står sig i ett internationellt perspektiv.

Studiernas tillförlitlighet

De studier som ingår i avhandlingen kan i stort sett kategoriseras som fallstudier undantaget klassificeringen av det matematiska innehållet i läroplanen. Det innebär även att studierna primärt är kvalitativa studier, även om vissa kvantitativa inslag förekommer (Bryman, 2012). Genom detta tillvägagångsätt är därmed inte generaliserbarhet av studierna i fokus. Istället syftar den första delstudien till att synliggöra exempel på tidig algebra i läroplan och läromedel och den andra delstudien undersöker hur elever använder den form av matematiska resonemang som kännetecknar tidig algebra. Resultaten i dessa studier kan användas för att välja inriktning och metod till framtida forskning om tidig algebra i svenska skolor. Likaså bidrar studierna med insikt om att även om ett test är rigoröst utformat med hög validitet och reliabilitet i en population är detta inte nödvändigtvis helt överförbart till en annan population (Matthews m fl, 2012).

Även om jag här lägger fram argument för studiernas *tillförlitlighet* är det ändå läsaren som får avgöra hur trovärdiga dessa studier är (Bryman, 2012). Vid kvalitativa studier finns inget matematiskt mått på trovärdighet, istället får trovärdigheten beskrivas på andra sätt. Jag har tidigare beskrivit tillvägagångsätt, urval, metodval, val som gjorts i samband med analysen med mera för att göra studierna så *transparenta* och *pålitliga* som möjligt. På så sätt ges

möjlighet för läsaren att avgöra i vilken grad studierna går att *överföra* till andra situationer. Även om fullständig objektivitet är omöjlig (Bryman, 2012) så visar metodbeskrivningen hur jag försökt sträva efter så hög *objektivitet* som möjligt.

Ytterligare en aspekt som stärker studiernas tillförlitlighet är den rigorösa konstruktion (Matthews m fl, 2012; Rittle-Johnson, 2011) av det test som användes vid den andra delstudien. Vid konstruktion av ett test finns flera aspekter att ta hänsyn till. En aspekt av validitet är att testet verkligen ger den information som behövs för att kunna mäta det som ska mätas, så kallad *innehållsvaliditet* (Bryman, 2012). Testuppgifterna i Rittle-Johnson m fl (2011) reviderades utifrån empiri över hur elever presterar på de olika uppgifterna i jämförelse med de olika uppgifternas svårighetsgrad. Det vill säga, med hjälp av en Rasch-modell[10] (Rasch, 1960, se även Boone m fl, 2014) bedömdes hur väl elevernas lösningar stämmer överens med den förväntade lösningsfrekvensen. Fördelen med en Rasch-modell är att den samtidigt tar hänsyn till elevernas förmåga och uppgiftens svårighetsgrad. Som exempel på hur detta kan användas utgår jag från en tänkt uppgift som bedöms kräva en grundläggande relationell kunskap om likhetstecknet (nivå 3). Om denna uppgift inte löses av elever som i övrigt uppvisar denna kunskapsnivå i den utsträckning som förväntas (eller löses i för hög frekvens av elever som inte klarar andra uppgifter på den nivån) så är sannolikheten stor för att uppgiften är felkonstruerad. Uppgifter som inte bidrog till att synliggöra elevernas kunskapsnivåer kunde på så sätt tas bort. Förutom detta värderades även uppgifterna utifrån deras betydelse för kunskap om likheter och ekvivalenser. Denna bedömning gjordes av en expertpanel bestående av fyra experter inom matematikundervisning med lång erfarenhet av forskning om elevers algebraiska tänkande. Likaså har Rittle-Johnson m fl (2011) identifierat vilken typ av fel som uppkommer i felaktiga lösningar på uppgifter som syftar till att visa kunskaper på nivå 2 eller 3, det vill säga flexibelt operationell eller grundläggande relationell kunskapsnivå. De felaktiga lösningarna påvisade en operationell syn på likhetstecknet, vilket ger ytterligare stöd för att uppgifterna testar det som avses att mätas. Sammantaget visar detta att validiteten i testet kan anses vara god. Det är dock värt att notera att hur väl elevlösningar stämmer överens med en förväntad lösningsfrekvens och vilka typer av felaktiga lösningar som framträder kan vara beroende av vilken population som studeras. Detta beskrivs i Artikel VII då den beräknade svårighetsgraden enligt Matthews m fl

[10] Det finns inte utrymme att i denna avhandling förklara vad en Rasch-modell innebär mer i detalj. Även om Rasch (1960) är ursprunget för modellen så rekommenderas Boone m fl (2014) som en mer lättläst förklaring av en Rasch-modell i praktiken. Värt att notera är även att en Rasch-modell ligger till grund för statistiska beräkningar i stora internationella mätningar som *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) och *Progress in International Reading Literacy Study* (PIRLS) (Martin m fl, 2016; 2017) samt *Programme for International Student Assessment* (PISA) (The Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2009).

(2012) inte verkar överensstämma med svenska elevers lösningsfrekvens av vissa uppgifter.

Etiska aspekter på studierna

Vid avhandlingens två delstudier behöver olika typer av etiska aspekter beaktas beroende på vilken studie som avses. I den andra delstudien involveras elever i årskurs 3 och 6, vilket ställer krav på *information*, *samtycke* och *anonymitet*/*avidentifiering* (Vetenskapsrådet, 2011).

Eftersom de deltagande eleverna är under 15 år är ett krav att *information* ges till deras *målsmän* och *samtycke* inhämtas från dessa. Eftersom det är mycket troligt att eleverna själva förstår vad denna undersökning innebär lämnas även informationen *direkt till eleverna* och de ges möjlighet att avstå från deltagande även om målsmännen gett samtycke. Information gavs skriftligen för överlämnande till målsmän samt muntligt till eleverna vid två tillfällen. Det första tillfället var när studien presenterades för eleverna och information och samtyckesblankett skickades med eleverna till målsmännen. Eleverna gavs sedan samma information vid tillfället för själva genomförandet av testet. I och med att detta informations- och samtyckeskrav berör såväl målsmän som elever är det viktigt att påpeka att det fanns elever som valde att avstå från deltagande i undersökningen även om målsmännen samtyckt till deras deltagande. En elev valde dessutom att avbryta deltagande under själva skrivandet av provet och det då påbörjade testet förstördes på plats.

Anonymitet/avidentifiering av de deltagande eleverna garanteras genom att inga personuppgifter överhuvudtaget samlades in. Den enda information om elevlösningarnas ursprung som sparats är vilken årskurs och vilken skola eleven tillhörde. Skolorna är anonymiserade i rapporteringen av studierna. Detta omöjliggör då att ett enskilt prov skulle kunna spåras till någon elev. Elever och målsmän informerades om denna avidentifiering och att detta sätt att samla in data då även innebär att efter insamling av testerna kan inte en enskild elevs test längre identifieras. Därmed är det inte heller möjligt att ta bort enskilda svar från studien efter att data har samlats in från en skola.

Beträffande den andra delstudien, som innefattar innehållsanalys av dokument och läroböcker, finns inga respondenter att ta hänsyn till. Däremot finns generella forskningsetiska aspekter angående *kvalitet* och *tillförlitlighet* att ta hänsyn till, vilka då är tillämpbara på båda delstudierna. Dessa aspekter innefattar allt från ett tydligt syfte med forskningen till bland annat forskarens val av källor, vilken analysmetod som har använts, hur data har använts och vilka möjliga felkällor som kan finnas (Vetenskapsrådet, 2011). I detta metodkapitel har just sådana aspekter behandlats och argument för studiernas tillförlitlighet har beskrivits.

Avgränsningar

En avhandling innebär ett kraftigt begränsat utrymme för hur mycket som kan behandlas. Det finns många frågor som ligger nära avhandlingens fokus som därmed måste utelämnas från avhandlingen, även om de hade varit mycket intressanta att studera. Exempel på sådana frågor är vad eleverna faktiskt lär sig eller hur de lär sig algebra. Vidare innebär detta begränsade utrymme att alla möjligheter som finns i det analytiska verktyget inte till fullo har utnyttjats eftersom att studera dessa aspekter ligger utanför avhandlingens fokus (se diskussionen om Rasch-modeller i avsnittet *Studiernas tillförlitlighet*).

Under arbetet med avhandlingen har även programmering införts i ämnet matematik i Lgr11 (Skolverket, 2018). Eftersom revideringen infördes hösten 2018 så skedde detta efter att Artikel V och VI färdigställts. Även om jag i avhandlingen nämner denna revidering och införandet av programmering i Lgr11 har jag inte kunnat ta hänsyn till dessa senaste förändringar i Lgr11 i mina delstudier.

Sammanfattning och resultat av artiklarna

Då denna avhandling befinner sig inom fältet matematikdidaktik kommer artiklarna och licentiatavhandlingen i matematik behandlas under en gemensam rubrik. Därefter sammanfattas artiklarna inom matematikdidaktik var för sig.

Avhandlingens matematiska bidrag (Artiklar I–IV)

Licentiatavhandlingen (Artikel III) är en monografi där valda resultat från de tre Artiklarna I, II och IV presenteras på ett enhetligt sätt. I slutet av denna sammanfattning kommer jag att beskriva de mest centrala resultaten samt de förmodandena som presenteras med stöd av resultaten. Eftersom denna doktorsavhandling är inom matematikdidaktik kommer jag att beskriva de viktigaste matematiska begreppen och resultaten på ett så enkelt sätt som möjligt. Med det sagt så går det inte heller att helt undvika ett formellt matematiskt språk i beskrivningen. För en fullständig matematisk beskrivning av dessa centrala begrepp samt andra begrepp och definitioner hänvisas till Artiklarna I-IV.

Licentiatavhandlingen är ett bidrag till det än idag öppna problemet om *klassificering av de reella kvadratiska*[11] *divisionsalgebrorna* genom att främst studera de *åttadimensionella dubblade*[12] *kvadratiska divisionsalgebrorna*. Med klassificering avses här att skapa en komplett och irredundant lista över alla reella divisionsalgebror. Att listan är komplett innebär att alla divisionsalgebror finns med i listan och att listan är irredundant betyder att om två divisionsalgebror är isomorfa så finns bara en av dem i listan.

En k-algebra $\mathcal{A}$ är ett vektorrum över en kropp k utrustad med en k-bilinjär multiplikation $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, (x, y) \mapsto xy$. En sådan algebra är en divisionsalgebra om och endast om algebran inte har några nolldelare, det vill säga $xy = 0$ medför att $x = 0$ eller $y = 0$ (Artikel III, se även Fraleigh, 1999). Det enklaste exemplet på en divisionsalgebra är de *reella talen* ($\mathbb{R}$) med den vanliga multiplikationen. De reella talen är alltså en reell divisionsalgebra av di-

[11] En algebra sägs vara kvadratisk om och endast om varje x^2 kan skrivas som en linjärkombination av x och 1.

[12] Givet en k-algebra $\mathcal{A}$ konstrueras dess *dubblade algebra* $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ med multiplikation $(w, x)(y, z) = (wy - zx, xy + zw)$.

mension 1. På så sätt skulle även divisionsalgebror kunna ses som en generalisering av det vi känner till från de reella talen. Nästa exempel är de *komplexa talen* ($\mathbb{C}$), med tillhörande multiplikation, vilka i detta sammanhang ses som en reell divisionsalgebra av dimension 2. De komplexa talen kan konstrueras från de reella talen med hjälp av den så kallade *dubblingen* (Artikel III). Med samma teknik kan sedan de komplexa talen dubblas till *kvarternionerna* ($\mathbb{H}$), en fyrdimensionell reell divisionsalgebra, vilken i sin tur kan dubblas till *oktonionerna* ($\mathbb{O}$), även kallad *Cayley-algebran*, en åttadimensionell reell divsionsalgebra. Vidare kan dubblingen allmänt användas för att skapa en ny algebra med dubbla dimensionen av den ursprungliga algebran. Däremot är det inte givet att om algebran är en divisionsalgebra att divisionsegenskapen bevaras vid dubblingen.

Eftersom *dissidenta avbildningar*[13] kan kopplas samman med divisionsalgebror (Artikel III, se även Osborn, 1962) är dessa ett av de viktigaste verktygen för att kunna klassificera de reella kvadratiska divisionsalgebrorna. Om en dissident avbildning är *sammansatt*[14] kallas även den tillhörande divisionsalgebran för sammansatt. Därmed studeras även dissidenta avbildningar i licentiatavhandlingen och dissidenta avbildningar är även det huvudsakliga temat i Artiklarna I och IV. Det matematiska bidraget kan sammanfattas med två huvudsakliga resultat samt två förmodanden.

1. Givet en kvadratisk och ordnad[15] k-algebra av dimension högst 4 så bevaras divisionsegenskapen vid dubbling. Om kroppen k har karaktäristik skild från 2 så kommer en 8-dimensionell kvadratisk divisionsalgebra aldrig att ge upphov till en divisionsalgebra vid dubbling.
2. Alla 4-dimensionella reella kvadratiska divisionsalgebror är sammansatta (Dieterich & Öhman, 2002), men ett överraskande resultat i Artikel III är att detta inte gäller de dubblade 8-dimensionella reella divisionsalgebrorna. Mer exakt, den enda isomorfiklassen av 8-dimensionella reella kvadratiska divisionsalgebror som både är dubblade och sammansatta representeras av oktonionerna.
3. Förmodan: Graden av en reell divisionsalgebra är 1, 3 eller 5. Denna förmodan bevisades senare av Dieterich och Rubinsztein (2010).

---

[13] Om V är ett vektorrum över en kropp k så sägs en linjär avbildning $\eta: V \wedge V \longrightarrow V$ vara *dissident* om och endast om v, w och $\eta(v \wedge w)$ är linjärt oberoende när v och w är linjärt oberoende. Om $\dim \mathcal{A} = n$ för en divisionsalgebra $\mathcal{A}$ så är $\dim V = n - 1$ för vektorrummet V. Exempelvis, om $\mathcal{A}$ är en 4-dimensionell divisionsalgebra så ger $\mathcal{A}$ upphov till en dissident avbildning $\eta: V \wedge V \longrightarrow V$ med $\dim V = 3$.

[14] En dissident avbildning η på ett Euklidiskt rum V sägs vara *sammansatt* om den kan faktoriseras som η = επ, där ε är en definit linjär endomorfism på V och $\pi: V \wedge V \longrightarrow V$ är en vektorprodukt.

[15] En ordnad kropp k är en kropp där elementen kan ordnas. Det vill säga för varje par av element a och b gäller att antingen $a < b$, $a = b$ eller $a > b$. Vidare gäller exakt en av dessa tre relationer för varje par av element a och b samt att relationerna är transitiva. Slutligen bevaras ordningen vid addition med ett element, det vill säga om $a < b$ så är $a + c < b + c$, samt vid multiplikation med ett positivt element (om $c > 0$ och $a < b$ så är $ac < ab$).

4. Förmodan: Två icke-isomorfa fyrdimensionella kvadratiska divisionsalgebror ger via dubblingen upphov till två icke-isomorfa åttadimensionella divisionsalgebror. I avhandlingen bevisas denna förmodan delvis. Denna förmodan är än idag endast delvis bevisad.

Teoretiska och praktiska perspektiv på generaliserad aritmetik (Artikel V)

Artikel V, *Teoretiska och praktiska perspektiv på generaliserad aritmetik*, uppkom i och med arbetet med Artikel VI då det vid dataanalysen uppstod ett behov av att verkligen förstå den stora idén GA på djupet. Mitt bidrag består av att jag har valt ut och anpassat de exempel som används för att åskådliggöra GA samt diskussion om hur dessa exempel innebär möjligheter till GA och när GA framträder i elevers lösningsmetoder. Slutligen ansvarade jag även för presentationen vid konferensen Madif-11.

Avstampet i denna artikel tas i det som kan identifieras som de två övergripande delarna av GA, det vill säga att 1) *resonera kring strukturer hos aritmetiska uttryck* samt 2) *generalisera aritmetiska samband* (Blanton m fl, 2015). Dessa begrepp utreds med hjälp av *kvasivariabler* (Fujii & Stephens, 2001; 2008) och den koppling mellan aritmetiska operationer och funktioner som beskrivs av Carraher m fl (2006). Detta leder dels fram till en djupare teoretisk förståelse av såväl GA som Algebrans stora idéer i allmänhet, vilket har bidragit till beskrivningen av denna avhandlings *Teoretiska ramar*, dels till en operationalisering av GA inför analysen i den första studien.

Vid flertalet tillfällen i denna avhandling (se t.ex. *Teoretiska ramar*) har det nämnts att det inte är uppgiften i sig som avgör om GA blir synligt, det är istället *hur* uppgiften arbetas med som är avgörande. I Artikel V (s. 31) beskrivs detta i en tabell (se Tabell 5 nedan) genom att ställa ett *strukturellt* angreppssätt av problemet mot en *beräkningsmässig* lösningsmetod. Detta visar även vad som särskiljer GA från EEEI.

Tabell 5: Strategierna "Beräkning" respektive "Struktur"

Är utsagan 46 + 23 = 47 + 22 sann eller falsk?		
Strategi	Tillvägagångssätt	Motivering
Beräkning	Vänster- och högerledet räknas ut var för sig	Likheten är sann eftersom 46 + 23 = 69 och 47 + 22 = 69
Struktur	Strukturen i likheten beaktas, inga beräkningar utförs	Likheten är sann eftersom man adderar 1 till 46 och subtraherar 1 från 23

Även användning av kvasivariabler kan beskrivas på ovanstående sätt. Det vill säga, om eleven räknar ut vänsterledet i 78 – 49 + 49 = 78 för att avgöra att utsagan är sann så har denne inte använt det aritmetiska uttryckets struktur och GA är inte synligt. Däremot om eleven beskriver att samma tal tas bort för att läggas till igen så menar Fujii och Stephens (2008) att denna elev använder 49 som en kvasivariabel och därmed framträder GA i elevens lösning. Det som Fujii och Stephens (2008) benämner som kvasivariabler blir därmed en del av GA.

Däremot är inte Carraher m fl:s (2006) perspektiv på generaliserad aritmetik överensstämmande med GA enligt Blanton m fl (2015). Carraher m fl (2006) beskriver tidig algebra allmänt som en generalisering av aritmetik och kvantiteter. Till exempel kan operationen ”plus 3” ses som funktionen $f(x) = x + 3$ och därmed kopplas aritmetiken till funktionsbegreppet och variabler, vilket istället för att ses som generaliserad aritmetik faller in under FT och VAR enligt Blanton m fl (2015).

Development of algebraic thinking: opportunities offered by the Swedish curriculum and elementary mathematics textbooks (Artikel VI)

I Artikel VI analyseras den svenska kursplanen i matematik samt två läroboksserier i matematik för årskurserna 1-6. Jag har i arbetet med denna artikel varit delaktig i utformandet av analysmetoden, valet av analysenhet samt ansvarat för analysen av den ena läroboksserien och för delar av diskussionen. Utöver detta har jag även tagit fram de exempel med tillhörande förklaringar som används i artikeln

Det huvudsakliga resultatet i Artikel VI är att GA är mycket svagt framskrivet i såväl läroplan som läroböcker medan EEEI och i viss mån även FT framträder tydligt. Ord som generalisera eller generalisering nämns inte överhuvudtaget i kursplanen i matematik i Lgr11. Detta avspeglas i de två analyserade läroboksserierna där den ena läroboken endast innehåller 2 sidor med GA under dessa 6 år. I denna lärobok hålls även GA, EEEI och FT separat

från varandra och förekommer aldrig i kombination med en annan stor idé på en sida. Den andra läroboken innehåller något fler sidor med GA, 28 sidor på 6 år, och i de böckerna finns sidor där mer än en stor idé är representerad. Detta är synligt i och med att såväl EEEI och FT står för cirka 50% vardera av det algebraiska innehållet i såväl årskurs 1-3 som 4-6 och GA står för 13-14%.

I den första läroboksserien är förhållandet annorlunda där EEEI står för 81% av det algebraiska innehållet i årskurs 1-3 och FT för 17%. Det vill säga, i årskurs 1-3 har denna lärobok större tonvikt på EEEI och mindre på FT än vad den andra läroboken har. Denna skillnad mellan EEEI och FT finns däremot inte i årskurserna 4-6 där de står för cirka 50% vardera av det algebraiska innehållet och därmed är mycket lik den andra läroboken i detta avseende. Observera att VAR inte har använts i analysen av läroböckerna då VAR alltid förekom i kombination med någon annan stor idé, vilket i sig är ett viktigt resultat i artikeln. Problemet att behandla VAR som en egen stor idé uppmärksammas även av Blanton, Isler-Baykal m fl (2019).

Även om andelen av det algebraiska innehållet tyder på att läroböckerna är likvärdiga i årskurs 4-6 beträffande EEEI och FT finns det skillnad i antalet sidor. Läroböckerna består av cirka 1750 sidor per läroboksserie, men där den första läroboksserien har cirka 6% algebraiskt innehåll så har den andra 11-12% algebraiskt innehåll. Utöver att den sistnämnda läroboken innehåller mer GA så är alltså den totala mängden algebraiskt innehåll dessutom dubbelt så stor jämfört med den första läroboken.

Artikel VI visar därmed att betoningen i dessa läromedel och i läroplanen främst ligger på EEEI, men i viss mån även på FT. GA är näst intill obefintligt i läroplan och den ena läroboken, men förekommer i viss omfattning i den andra läroboken.

Primary School Students' Knowledge of the Equal Sign – the Swedish Case (Artikel VII)

I Artikel VII behandlas elevers uppfattning och användning av likhetstecknet. Studien baseras på ett bedömningsformulär i form av ett prov samt en konstruktionskarta för olika nivåer av kunskap om likhetstecknet (Matthews m fl. 2012). I och med användningen av detta prov möjliggörs även en jämförelse av resultaten med resultatet i en sydkoreansk studie (Pang & Kim, 2018). De deltagande eleverna valdes från tre skolor där föräldrarnas utbildningsnivå skiljer sig åt. Jag kommer referera till dessa tre skolor som Skola A, B respektive C, där föräldrarnas utbildningsnivå, relativt de tre skolorna, är högst vid Skola A och lägst vid Skola C. Totalt svarade 172 elever i årskurs 3 och 119 elever i årskurs 6 på provets uppgifter.

Då Sydkorea är ett av de länderna med bäst resultat i TIMSS (Mullis m fl, 2016) är det något överraskande att de svenska eleverna i årskurs 6, oavsett

skola, i min studie presterar klart bättre än de sydkoreanska eleverna när det kommer till att veta att likhetstecknet inte betyder ”svaret på uppgiften”. I de tre svenska skolorna är det 52,7%, 46,7% respektive 41,2% som svarar att ”svaret på uppgiften” inte är en bra definition av likhetstecknet, vilket kan jämföras med 15,4% av de sydkoreanska eleverna i samma årskurs. De elever som presterar bäst är eleverna på skolan där föräldrarna har högst utbildning. Överlag presterar eleverna på den skola där föräldrarna har lägst utbildningsnivå sämst. Dock presterar eleverna på Skola C likvärdigt och på vissa uppgifter till och med bättre än eleverna på Skola B i årskurs 3.

Eleverna på Skola A presterar även bättre än de sydkoreanska eleverna på nästan alla uppgifter, oftast redan i årskurs 3, men framförallt i årskurs 6. Eleverna på Skola B har även de en stor positiv utveckling mellan årskurs 3 och 6. Överlag presterar eleverna i årskurs 3 på Skola B sämre än deras motsvarighet i Sydkorea, men i årskurs 6 presterar de oftast likvärdigt eller bättre än de sydkoreanska eleverna på många uppgifter. Även om eleverna på Skola C också presterar bättre i årskurs 6 jämfört med årskurs 3 så har de en mindre förbättring än eleverna på Skola B. Alla dessa resultat gäller såväl när det kommer till lösningsfrekvens oavsett metod som när det gäller andelen elever som använder strukturen i de aritmetiska uttrycken. Ett exempel på en sådan uppgift där detta resultat framträder är uppgift 3: ”Utan att addera 67 + 86, kan du säga om likheten nedan är sann eller falsk? 67 + 86 = 68 + 85”.

Däremot presterar de svenska eleverna i årskurs 3, oavsett skola, sämre än de sydkoreanska eleverna när det gäller att använda strukturen i uttrycken för att lösa luckuppgifter. Där 30,0% av de sydkoreanska eleverna i årskurs 3 använder uttryckens struktur för att lösa 43 + __ = 48 + 76 (Uppgift 24) så är det 16,7%, 10,9% respektive 8,3% av eleverna i de tre svenska skolorna som använder en lösningsmetod baserad på uttryckens struktur. I artikeln argumenterar jag för att detta kan bero på att svenska elever ofta enbart ska skriva svaret i rutan och varken behöver förklara hur de kom fram till svaret eller diskutera sin lösning med andra elever. Däremot ökar andelen elever som använder uttryckens struktur till årskurs 6 där 72,7%, 53,3% respektive 26,5% visar en sådan lösningsmetod. Detta kan jämföras med 54,4% av de sydkoreanska eleverna i årskurs 6.

Dessa resultat kombineras i artikeln till slutsatsen att en elev kan likhetstecknets definition inte nödvändigtvis innebär att eleven kan använda likhetstecknets relationella innebörd. Även att skillnaden mellan skolorna ökar från årskurs 3 till 6 framträder.

Utöver dessa resultat om i vilken utsträckning elever kan likhetstecknets definition och hur de kan tillämpa detta finns i artikeln även ett mer teoretiskt resultat. Matthews m fl (2012) påpekar att beräkningen av uppgifternas svårighetsgrad beror på populationen, vilket även framkommer i min studie. Matthews m fl (2012) beskriver att luckuppgiften 43 + __ = 48 + 76 (Uppgift 24) är lättare än att avgöra om 67 + 86 = 68 + 85 är sant eller falskt utan att addera talen (Uppgift 3). Detta stämmer överens med de resultat som Pang

och Kim (2018) får i Sydkorea, men i min studie gäller det omvända. Det vill säga, uppgift 24 var svårare än uppgift 3 för de svenska eleverna.

Avslutande diskussion

Som tidigare nämnt består denna avhandling av två delar, en matematisk del och en matematikdidaktisk del. De två delarna knyts samman med hjälp av Algebrans stora idéer som är synliga i såväl tidig algebra som i algebra vid universiteten. Detta avser även att visa det som kan klassificeras som avancerad matematik i grund och botten baseras på samma grundläggande principer som förekommer i skolmatematiken. Därmed inleds den avslutande diskussionen med att beskriva denna koppling, vilken även belyser avhandlingens första forskningsfråga:

1. Vilken sorts algebraiskt tänkande är gemensamt för den tidiga algebran och algebra på universitetsnivå?

I det efterföljande avsnittet diskuteras avhandlingens andra forskningsfråga:

2. Vilka möjligheter till tidig algebra erbjuds i svenska kursplanen i matematik och läroböcker i matematik för skolans tidigare år?

och under rubriken *Elevers beskrivning och användning av likhetstecknets betydelse* diskuteras sedan den sista forskningsfrågan:

3. Hur beskriver svenska elever likhetstecknets betydelse och vilken innebörd av likhetstecknet framkommer i deras uppgiftslösningar?

Avslutningsvis diskuteras avhandlingens *Didaktiska implikationer* och förslag på *Vidare forskning*.

Algebrans stora idéer i abstrakt algebra

Algebrans stora idéer utarbetades primärt för tidig algebra, men i detta avsnitt diskuterar jag hur Algebrans stora idéer trots detta även är synliga i avhandlingens matematiska del och den abstrakta algebran.

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ och $\mathbb{O}$ är de mest kända exemplen på reella divisionsalgebror och beskrivs till och med ibland felaktigt som de enda reella divisionsalgebrorna (se Artikel I). Detta har till och med tryckts i en vid universitet ofta använd lärobok:

> The real numbers, the complex numbers, and the quaternions are the only (up to isomorphism) associative division algebras over the real numbers (Frobenius, 1878). The only additional division algebra over the real numbers is the Cayley algebra, which is a vector space of dimension 8 over R (Bott and Milnor, 1957). (Fraleigh, 1999, s. 428)

Citatet beskriver korrekt att $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ och $\mathbb{H}$ är de enda *associativa* reella divisionsalgebrorna. Tillsammans med $\mathbb{O}$ utgör de alla *alternativa*[16] reella divsionsalgebror. Vidare är multiplikationen i $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ kommutativ. Utöver dessa två finns det även ett oändligt antal kommutativa reella divisionsalgebror med dimension 2 (Darpö & Dieterich, 2007), medan multiplikationen i $\mathbb{H}$ och $\mathbb{O}$ inte är kommutativ. Om multiplikationen i $\mathbb{H}$ och $\mathbb{O}$ begränsas till imaginärrummen är den däremot *antikommutativ*[17] (Lam, 2003).

Utifrån de reella talen kan alltså strukturer konstrueras där multiplikationen starkt påminner om den ”vanliga” multiplikationen hos reella tal. En sådan konstruktion synliggör en del av det som den stora idén GA handlar om, det vill säga de reella talen generaliseras till mer allmänna strukturer (i detta fall divisionsalgebror). Denna generalisering bygger på att egenskaper kända från de reella talen bevaras, men det är inte säkert att alla egenskaper verkligen bevaras. Därmed behöver generaliseringens begränsningar och möjligheter undersökas och förstås, vilket är en del av GA.

Med detta synsätt blir GA framträdande i arbete med algebraiska strukturer. Såväl grupper, ringar och kroppar som algebror har egenskaper som finns hos de reella talen. För att förstå de algebraiska strukturerna kan alltså jämförelse göras med hur en viss egenskap fungerar i fallet med de reella talen, undersöka detta i vad som då kan ses som en enklare exempelsituation och de hypoteser som då uppstår kan lyftas till en mer generell miljö och undersökas där. I fallet med divisionsalgebror kan sedan något mer komplicerade algebror som kvarternionerna eller oktonionerna användas som enklare fall beroende på vilken egenskap som undersöks. Denna process syns inte explicit i Artiklarna I-IV utan finns i själva arbetet bakom artiklarna.

I abstrakt algebra är variabler ett självklart inslag. Till exempel använde jag variabler för att definiera en algebra i avsnittet om *Avhandlingens matematiska bidrag* och i den beskrivningen användes två variabler. Andra exempel i Artiklar I-IV där variabler ingår är i samband med avbildningar, vilka i sin tur ger upphov till ekvationer eller olikheter. Vi kan därmed identifiera såväl den stora idén VAR som EEEI inom den abstrakta algebran. Algebrans stora idéer är alltså väl synliga i denna avhandlings matematiska bidrag, även om det är i

[16] Att en algebra är alternativ innebär att för multiplikationen gäller att $(xx)y = x(xy)$, $(xy)x = x(yx)$ och $(yx)x = y(xx)$. Det vill säga en svagare form av associativitet. Alla associativa algebror är därmed alternativa.

[17] Med antikommutativ avses en operator * som uppfyller att $x * y = - y * x$ för alla x och y. Det enklaste exemplet på en antikommutativ operation är subtraktion.

ett mycket mer avancerat sammanhang än i tidig algebra i skolan. Det tankesätt som kännetecknar tidig algebra är alltså något som även finns i matematisk forskning. Även om det såklart är ytterst få elever som senare blir matematiker visar detta ändå att tidig algebra fångar upp centrala aspekter av matematiken. Därmed innebär tidig algebra ett förhållnings- och arbetssätt som underlättar elevernas fortsatta arbete med algebra längre upp i skolåren och även vid universitetsstudier i matematik.

Möjligheter till tidig algebra i Sverige

I föregående avsnitt beskrev jag hur den stora idén GA, generaliserad aritmetik, genomsyrade *Avhandlingens matematiska bidrag*. I skarp kontrast till detta står Artikel VI som beskriver hur generalisering inte alls nämns i den svenska grundskolans kursplan i matematik och att inget av det centrala innehållet i matematik kan kategoriseras som GA. Det är då lätt att tänka sig att anledningen till avsaknad av generalisering i tidiga skolår kan bero på att generalisering anses vara för avancerat för barn i de åldrarna. En stor mängd forskning visar dock att barn tidigt är kapabla att generalisera (t ex Bastable & Schifter, 2008; Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019; Britt & Irwin, 2008; Carraher m fl, 2006). Som vi redan sett kan till exempel aritmetiska uttryck generaliseras med hjälp av kvasivariabler (Carpenter & Levi, 2000; Carraher m fl, 2006; Fujii & Stephens, 2001; 2008) och elever kan träna på funktionellt tänkande med hjälp av mönster (Blanton, Isler-Baykal m fl, 2019; Carraher & Schliemann, 2019). Eftersom läroböcker kan ses som medierande artefakter mellan den skrivna läroplanen och läraren i klassrummet (Valverde m fl, 2002) är avsaknaden av generalisering i läroplanen troligtvis en bidragande orsak till att de studerade läroböckernas algebraiska innehåll i mycket låg utsträckning kategoriseras som GA. Däremot förekommer EEEI i stor eller mycket stor omfattning i de båda studerade läromedlen i Artikel VI, med innehåll som stämmer överens med läroplanens innehållspunkter om likhetstecknets betydelse (årskurs 1-3) och enkla algebraiska uttryck och ekvationer samt ekvationslösning (årskurs 4-6). Utifrån detta behandlas variabler som platshållare i uttryck och ekvationer (se Cai m fl, 2010; Kieran, 2007), vilket brukar beskrivas som en del av en *strukturell* ansats till algebra (Cai m fl, 2010). Ett annat sätt att närma sig algebra är utifrån en *funktionell* ansats (Cai m fl, 2010). Detta är synligt i såväl den svenska kursplanen i matematik som läroböcker genom bland annat mönster och talföljder (Artikel VI), vilket är en del av den stora idén FT, men även genom att ”samband och förändring” utgör ett eget centralt innehållsområde i Lgr11.

För att belysa detta ytterligare kan en jämförelse med andra länder göras. I kontrast till den svenska läroplanen har den estniska läroplanen inte denna funktionella ansats utan där finns istället en tydligare strukturell ansats (Hemmi m fl, 2020). Till exempel nämns mönster inte alls för årskurserna 1-

6 i den estniska läroplanen (Hemmi m fl, 2020). Att mönster finns med tidigt i den svenska läroplanen och även utgör ett stort inslag i läroböckerna innebär som jag tidigare nämnt en möjlighet att knyta samman mönster med funktioner och relationer (Blanton, Stroud m fl, 2019; Carraher & Schliemann, 2019). Denna möjlighet är inte lika tydligt framskriven i den estniska läroplanen. Det är även värt att nämna att den finska läroplanen kan beskrivas som en hybrid av funktionell och strukturell ansats (Hemmi m fl, 2020).

Även om de två studerade läroböckerna har likheter angående vilken sorts tidig algebra som är synlig så finns det även stora skillnader mellan de två läroboksserierna. Denna skillnad består både i antalet sidor som har ett algebraiskt innehåll och i hur stor del av dessa sidor som kategoriseras som EEEI, GA eller FT. Trots att böckerna har nästan samma sidantal så innehåller den ena läroboken ungefär hälften så många sidor med algebra som den andra läroboken. Ytterligare en skillnad är att GA nästintill är obefintligt i läroboken med minst mängd algebra, även om GA inte heller förekommer i särskilt stor omfattning i den andra läroboken. En tredje skillnad är det faktum att de olika stora idéerna enbart förekommer separat från varandra i den första läroboken, vilket innebär en avsaknad av möjligheter till generalisering och samband i matematiken. Carraher m fl (2006) betonar att det är viktigt att läraren uppmärksammar de möjligheter till generaliseringar som finns och eftersom matematikundervisningen till stor del styrs av läroboken (t ex Boesen m fl, 2014; Engvall, 2013; Hemmi, Krzywacki m fl, 2019; Hemmi & Ryve, 2015; Koljonen, 2017; 2019; Ryve & Hemmi, 2019) innebär detta att eleverna får olika möjligheter till tidig algebra beroende på vilket läromedel som används i den aktuella klassen. Neuman m fl (2015) visar även att lärare som använder den första läroboken i större utsträckning låter eleverna arbeta enskilt i läroboken, vilket gör att läraren får ännu färre tillfällen till att uppmärksamma möjligheter till generaliseringar i undervisningen. Resultaten tyder därmed på att läroboken med minst antal sidor algebra även lägger en större tyngd vid procedurell kunskap och mindre vikt vid konceptuell kunskap jämfört med den andra läroboken.

Sammanfattningsvis visar min studie att det finns möjligheter till tidig algebra utifrån den nuvarande lydelsen av den svenska läroplanen. Tidig algebra finns i mycket varierande omfattning i olika läroböcker, vilket gör att de möjligheter till tidig algebra som uppstår i klassrummet kan variera kraftigt beroende på vilken lärobok som används i olika klasser eller skolor. Detta är något som jag kommer återkomma till under rubriken *Vidare forskning*, men innan dess diskuterar jag resultaten av den andra didaktiska studien.

Elevers beskrivning och användning av likhetstecknets betydelse

Även om ordet ”generalisering” inte finns med i den nuvarande kursplanen i matematik finns det som tidigare nämnts tydliga möjligheter till tidig algebra i Lgr11. Till exempel är ”[m]atematiska likheter och likhetstecknets betydelse” en del av det centrala innehållet för årskurs 1-3 (Skolverket, 2019, s. 55). Det finns flera aspekter av denna innehållspunkt. En av dessa aspekter är att kunna återge likhetstecknets definition, vilket en stor del av eleverna i min studie kan. Det vill säga de känner till att likhetstecknet innebär ”samma som” och inte svaret på ett problem. En annan aspekt är att kunna använda likhetstecknets relationella innebörd vid problemlösning, vilket eleverna inte behärskar lika väl som likhetstecknets definition. Från studien är det tydligt att kunna återge definitionen med ord inte nödvändigtvis innebär att eleverna kan använda likhetstecknet som en relation. Även omvändningen till detta framträder, det vill säga att använda likhetstecknets relationella innebörd behöver inte betyda att eleven kan återge likhetstecknets definition. Till exempel presterar eleverna i årskurs 3 i en skola (skola B) klart sämre än eleverna i samma årskurs i de två andra skolorna (skolor A och C) när det gäller att veta att likhetstecknet betyder ”samma som” och inte ”svaret på en uppgift”. Däremot presterar eleverna på skola B och C ungefär lika bra när de ska lösa problem genom att använda likheters struktur och därigenom likhetstecknets relationella innebörd. Detta belyser att det går alldeles utmärkt att utföra beräkningar och lösa problem utan att kunna beskriva varför problemet löses på det sättet. Däremot kan avsaknad av en förståelse för likhetstecknets relationella innebörd orsaka svårigheter när eleverna senare börjar lösa ekvationer mer formellt (t ex Carpenter m fl, 2003; Matthews & Fuchs, 2020).

Vidare visar min studie att de svenska eleverna i årskurs 6 så i klart större utsträckning än de sydkoreanska eleverna vet att likhetstecknet inte innebär ”svaret på uppgiften”. Detta visar att likhetstecknets innebörd som en punkt i det centrala innehållet i kursplanen i matematik, det vill säga som en del av den avsedda läroplanen, även är förankrad i den uppnådda läroplanen (Valverde m fl, 2002). Däremot presterar de sydkoreanska eleverna i allmänhet bättre än de svenska när det gäller användningen av likhetstecknets relationella innebörd, vilket återigen visar att kunna återge en definition inte är samma sak som att kunna tillämpa definitionen. Detta är även ett exempel på att konceptuell kunskap inte är nödvändig för procedurell kunskap och vice versa (Baroody m fl, 2007; Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnsson & Alibali, 1999). Detta diskuterar jag även i nästa avsnitt, vilket behandlar avhandlingens didaktiska implikationer.

Didaktiska implikationer

En fråga som ställs inom matematikdidaktisk forskning är huruvida undervisningens tyngdpunkt ska ligga på nyckelbegrepp och hur dessa begrepp kopplas samman till en helhet, till exempel med hjälp av Algebrans stora idéer eller andra stora idéer inom matematik, eller på procedurer och om den ena sortens kunskap bör förekomma den andra sortens kunskap. Många forskare argumenterar dock för att konceptuell och procedurell kunskap samverkar och uppkommer i en interaktion (Baroody m fl, 2007; Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnsson & Alibali, 1999). Det vill säga, stora idéer och procedurer kan behandlas samtidigt eller omväxlande istället för det ena före det andra. Dock visar Artikel VI hur den stora idén GA är näst intill obefintlig i de studerade läromedlen och därmed saknas den konceptuella kunskap som GA innebär. I enlighet med det Baroody m fl (2007) beskriver så visar den här avhandlingen att det vore fördelaktigt att tydligare lyfta fram den stora idén GA i svensk skolmatematik. Det är då viktigt att återigen peka på grundtanken bakom Algebrans stora idéer: de stora idéerna ska ses som ett förhållningssätt till algebra som påverkar arbetssättet och inte något som är fristående från övrig skolmatematik (Blanton m fl, 2015).

Till skillnad från GA är EEEI väl representerad i svenska läromedel (Artikel VI). En stor del av eleverna i studien i Artikel VII har god kunskap när det gäller likhetstecknets definition, men kan inte tillämpa denna kunskap lika väl. Detta tyder på att eleverna har en relationell uppfattning om likhetstecknet, men befinner sig på en lägre procedurell kunskapsnivå och därmed har inte koncepten kopplats samman med procedurerna på det sätt som Baroody m fl (2007) beskriver. Resultatet visar alltså att även om något betonas tydligt är det möjligt att andra aspekter riskeras att bortses från. Detta belyser att det är viktigt att även om Algebrans stora idéer i grunden innebär en kunskapssyn som är konceptuell så behöver den samverka med procedurell kunskap (Hiebert & Lefevre, 1986; Skemp, 1976; Star, 2005).

Ett samspel mellan konceptuell och procedurell kunskap kan även beskrivas som att en större tyngd på GA inte får innebära att allt fokus hamnar på GA och att GA därigenom frigörs från helheten. Med en sådan koppling mellan stora idéer (koncept) och procedurer synliggörs även att en betoning av likhetstecknets relationella innebörd inte heller måste innebära att det till exempel skulle vara förbjudet att säga att en beräkning ”blir” någonting i matematikundervisningen. Vi använder ofta verb i matematiken, till exempel addera, beräkna eller räkna. Om vi pratar om att addera 5 och 3 så signalerar det att vi gör något och då är det inte fel att säga att ”fem plus tre *blir* åtta”. Däremot utläses 5 + 3 = 8 som ”fem plus tre *är lika med* åtta” för att betona likhetstecknets innebörd. Detta påminner till viss del om diskussionen rörande huruvida elever ska behöva ändra sina uppfattningar om olika matematiska begrepp allt eftersom nya situationer uppstår eller ej (Davis, 1985). Det vill säga, det första alternativet är att ”är” används i samband med beräkningar

eftersom det underlättar för eleverna när de kommer i kontakt med likhetstecknets formella innebörd. Det blir då ingen skillnad på att tala matematik, till exempel ”fem plus tre är (lika med) åtta”, mot att skriva ner det matematiskt som 5 + 3 = 8. Det andra alternativet är att exempelvis tala om addition som en operation och därmed att det ”blir” någonting, men istället vara noggrann när beräkningen skrivs ner och då lyfta skillnaden mellan operationen addition (5 + 3) och utsagan 5 + 3 = 8. I enlighet med tidig algebra lyfts då likhetstecknets relationella betydelse i tidiga skolår, även om de fyra räknesätten beskrivs som operationer (vilket de faktiskt är) som ”blir” någonting. Detta visar även på att GA inte ska ses som ett nytt inslag som ska arbetas med separat eller måste finnas närvarande i undervisningen hela tiden. Istället ska det ses som ett tanke- och arbetssätt som hjälper till att lyfta blicken och därigenom hjälpa läraren att upptäcka de möjligheter till GA som redan finns i nuvarande undervisning (Carraher m fl, 2006). Ett sådant exempel är mönster, vilket finns med som ett centralt innehåll i kursplanen i matematik för årskurserna 1-6. Genom att se på mönsteruppgifter med Algebrans stora idéer i åtanke framträder möjligheter till GA, men även FT, VAR och EEEI beroende på vad syftet är med den aktuella uppgiften. Vidare medför den helhet som Algebrans stora idéer innebär att läraren till exempel behöver reflektera över till synes små detaljer som ”är” eller ”blir” i samband med räkneoperationer. Med varje sådant val kommer fördelar och nackdelar som behöver vägas mot varandra.

Det är inte heller enbart läraren som behöver tänka på dessa aspekter. Eftersom läroböcker i stor utsträckning styr matematikundervisningen (Ball & Cohen, 1996; Brown, 2009; Jablonka & Johansson, 2010; Johansson, 2006; Lloyd m fl, 2009; Nicole & Crespo, 2006; Remillard m fl, 2014; Stein m fl, 2007; Tarr m fl, 2008) behöver läromedelsförfattare säkerställa att möjligheter till GA ges genom läromedlen samt vara noggranna med såväl beskrivningar och språkliga aspekter. Om Algebrans stora idéer i allmänhet, och GA i synnerhet, dessutom tydligare betonas i styrdokumenten framöver behöver, med tanke på läroböckernas roll som medierande artefakter (Valverde, 2002), läromedelsförfattarnas roll tydligt belysas. Det är då viktigt att ha i åtanke att det är en sak vad som står på papperet, såväl i styrdokument som i läromedel, och vilka intentionerna bakom förändringen är, men att detta inte nödvändigtvis avspeglas i hur det tolkas av lärarna och i vad som sker i klassrummet (Cohen & Loewenberg Ball, 1990; Hiebert m fl, 2005; Stein & Lane, 1996). Till exempel räcker det inte med att erbjuda tillfällen till GA i läroboken; dessa tillfällen behöver även vara tydligt framskrivna så att lärarna vet vad som förväntas av dem och eleverna. Eftersom svenska lärares undervisning ofta baseras på läroboken snarare än lärarhandledningen (Boesen m fl, 2014; Engvall, 2013; Hemmi, Krzywacki m fl, 2019; Hemmi & Ryve, 2015; Koljonen, 2017; 2019; Ryve & Hemmi, 2019) behöver detta explicit framkomma i läroboken.

Även det faktum att olika länder har olika undervisningstraditioner behöver vägas in i sammanhanget. De aktuella undervisningstraditionerna innebär dels

att det kan finnas ett inbyggt motstånd mot vissa förändringar, men även att det som fungerar i ett land inte nödvändigtvis fungerar i ett annat land (Hiebert m fl, 2005). Även om jag i denna avhandling jämför med Sydkorea, och faktumet att de sydkoreanska eleverna presterar bättre än svenska elever i såväl TIMSS (Mullis m fl, 2016) som i de flesta delarna av min undersökning (Artikel VII), innebär det inte att Sverige ska göra exakt som Sydkorea. Vidare argumenterar Hiebert m fl (2005) för att om en förändring ska lyckas behöver hänsyn tas till helheten så det inte tolkas som ett nytt ”innehåll” separerat från det befintliga innehållet. Återigen visar detta på vikten av att Algebrans stora idéer ska ses som ett övergripande tanke- och arbetssätt och att detta inte utesluter procedurell kunskap från undervisningen.

Sammanfattningsvis visar mina studier att det kan vara fördelaktigt att betona Algebrans stora idéer i allmänhet och generaliserad aritmetik i synnerhet i den svenska skolmatematiken för att möjliggöra att eleverna kan dra nytta av de samband som finns i matematiken. Detta innebär däremot inte att till exempel beräkningar och procedurer nödvändigtvis behöver tonas ned utan istället ska beräkningar och procedurer ses som tillfällen där Algebrans stora idéer kan omsättas i problemlösningssituationer.

Vidare forskning

I avhandlingens inledning beskrev jag hur denna avhandling kan placeras i det som Valverde m fl (2002) beskriver som den avsedda, den möjligt implementerade respektive den uppnådda läroplanen (se Figur 1). Däremot har inte den implementerade läroplanen studerats i denna avhandling, det vill säga jag har inte studerat vad som sker i klassrummet. För att studera *om* lärare arbetar med Algebrans stora idéer och i så fall *på vilket sätt* detta sker behöver klassrumsstudier genomföras. Dessa studier kan med fördel kompletteras med lärarintervjuer och/eller enkäter med syftet att fånga upp lärares kunskap om bland annat generaliseringar och samband i matematiken samt hur lärarna tolkar de algebraiska delarna av kursplanen. I en sådan studie kan eventuella fortbildningsbehov för att lärarna ska kunna arbeta i enlighet med tidig algebra upptäckas. Därigenom ökar möjligheten till att tidig algebra inte enbart syns i läroplanen utan även i den implementerade läroplanen (Cohen & Loewenberg Ball, 1990; Hiebert m fl, 2005; Stein & Lane, 1996; se även Valvderde, 2002).

Att läroböcker i stor utsträckning styr matematikundervisningen (Ball & Cohen, 1996; Brown, 2009; Jablonka & Johansson, 2010; Johansson, 2006; Lloyd m fl, 2009; Nicole & Crespo, 2006; Remillard m fl, 2014; Stein m fl, 2007; Tarr m fl, 2008) samt att svenska lärares undervisning ofta baseras på läroboken snarare än lärarhandledningen (Boesen m fl, 2014; Engvall, 2013; Hemmi, Krzywacki m fl, 2019; Hemmi & Ryve, 2015; Koljonen, 2017; 2019; Ryve & Hemmi, 2019) motiverar att fler läroböcker behöver studeras. Artikel

VI visar dessutom att det är stor skillnad mellan de två analyserade läroböckerna och därför är det intressant att undersöka om övriga läromedel påminner om något av dessa två eller om andra läroböcker lägger tyngdvikten på andra aspekter. Det är även möjligt att genomföra fördjupande studier om hur en eller flera enskilda stora idéer uttrycks i de olika läroböckerna.

Artikel VII fångar upp elevers uppfattning och användning av likhetstecknet. Eftersom förståelse av likhetstecknets relationella innebörd visats vara en prediktor för senare framgång inom algebra (Alibali m fl, 2007; Matthews m fl, 2020) är elevers uppfattningar om likhetstecknet värt att studera ännu djupare. Dessutom ingår numera programmering i matematikämnet, vilket medför att likhetstecknet används i ett annat sammanhang och med en helt annan betydelse (Bråting & Kilhamn, 2020). En utgångspunkt för en sådan studie skulle kunna vara de olika tolkningar av likhetstecknet som Prediger (2010) identifierar i kombination med likhetstecknets olika innebörd i programmeringssammanhang (Bråting & Kilhamn, 2020).

En annan aspekt av Artikel VII är de stora skillnaderna mellan elevers kunskaper beroende på vilken skola de tillhör. Att skillnader förekommer beroende på socioekonomisk bakgrund är känt sedan tidigare (UNICEF, 2018; Yang Hansen & Gustafsson, 2016; 2019), men de skillnader mellan skolorna som upptäcktes i studien var för mig oväntat stora. Eftersom min studie är en fallstudie kan inga generella slutsatser göras från detta resultat. Därmed vore en större studie om tidig algebra där hänsyn tas till elevernas socioekonomiska bakgrund lämplig att genomföra.

Även om denna avhandling tillhör det matematikdidaktiska forskningsfältet handlar detta i ett större perspektiv om demokrati och eleverna som blivande vuxna aktörer i samhället. I dagens läge är det nästintill ett krav med en gymnasieutbildning för att vara anställningsbar då en majoritet av de unga arbetslösa saknar en gymnasieexamen (Olofsson & Lundahl, 2013). Då många elever har svårigheter i matematik i allmänhet och algebra i synnerhet (se bl a Carraher & Schliemann, 2007; Davis, 1985; Kieran, 1981; 2007; Matthews & Fuchs, 2020) är det troligt att algebra utgör ett hinder för en fullständig gymnasieutbildning. Därmed är det viktigt att även fortsätta studera hur tidig algebra kan hjälpa elever att tillgodogöra sig matematiken i skolans senare år och på gymnasiet. En longitudinell studie om effekten av tidig algebra i svensk skola är därför önskvärd.

English summary

The overall aim of this thesis is to contribute with research about algebraic thinking in the earlier years of the Swedish primary school. Moreover, the aim is also to describe how this algebraic thinking can be found in mathematics at the university level. These aims are specified through the following three research questions:

1. What kind of algebraic thinking does early algebra and algebra at the university level have in common?
2. What opportunities for early algebra are provided by the Swedish mathematics curriculum and by mathematics textbooks in early school years?
3. In what ways do Swedish students describe the meaning of the equal sign and what interpretations of the equal sign are present in their solutions of mathematical tasks?

The first two research questions are investigated by using the so called Big ideas of Algebra (Blanton et al., 2015) as an analytical tool. The third and final research question is investigated by using an analytic tool based on Matthews et al.'s (2012) construct map for knowledge of the equal sign as an indicator of mathematical equality. The results from these investigations are discussed from national and international, as well as, mathematical and didactical perspectives.

Theoretical approach

A starting point for this thesis is Kaput's three content strands of algebra:

1. Algebra as the study of structures and systems astracted (sic!) from computations and relations, including those arising in arithmetic (algebra as generalized arithmetic) and in quantitative reasoning.
2. Algebra as the study of functions, relations and joint variation.
3. Algebra as the application of a cluster of modeling languages both inside and outside of mathematics. (Kaput, 2005, p. 11)

The five Big ideas of algebra are represented in these three content strands (Blanton et al., 2015). The first big idea, *Equivalence, Expressions, Equations,*

and Inequalities (EEEI) includes describing relationships between and among generalized quantities. Furthermore, since a relational understanding of the equal sign has been shown to be important for solving equations (Cai et al., 2005; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 1981; 2018; Knuth, 2005; Li et al., 2008; Matthews & Fuchs, 2020) it is an important aspect of this big idea.

The next big idea, *Generalized Arithmetic* (GA), involves reasoning about the structure of arithmetic expressions and generalizing arithmetic relationships. The third big idea, *Functional Thinking* (FT), involves generalizing relationships between covarying quantities. *Variable* (VAR) is the fourth big idea and includes the different roles a variable can play in different mathematical contexts. The different roles of a variable are described in detail in the thesis.

The final big idea is *Proportional Reasoning* (PR), which refers to quantities related in such a way that the ratio between two quantities is invariant (Blanton et al., 2015).

Three of these five big ideas are used as an analytic tool to categorize the mathematical content of the Swedish mathematics curriculum and the mathematics textbooks. The reason for not using all five big ideas is that concepts related to VAR are integrated in the other big ideas. Furthermore, content that could belong to PR was treated in a way that the emphasis is on FT instead of PR in the grades investigated in this study. Therefore, the two big ideas VAR and PR are not used as part of the analytical tool. This is also in accordance with the intervention study by Blanton et al. (2019) where VAR is integrated in instruction throughout the other big ideas and PR is not explicitly addressed.

Method

The empirical material used in the first sub-study consists of the Swedish mathematics curriculum and two textbooks series in mathematics for Grades 1-6. The algebraic content of the material was classified using the three big ideas EEEI, GA and FT (Blanton et al, 2015).

The second sub-study is a case study and the empirical material used in this study consists of the answers from 291 students in grades 3 and 6 on a test developed by Matthews et al. (2012). The student sample was made by choosing three schools where the students have different socio-economic backgrounds in order to increase the possibility to get diverse answers. The students' answers were classified as either relational (using the relational structure of the equality), operational (using computations) or incomplete (incomplete, incorrect or no explanation). The results from the different schools were compared with the results from a study in South Korea using the same test as in this study (Pang & Kim, 2018).

Results

The classification of algebraic content in the section Central content in the Swedish mathematics curriculum reveals that the big ideas EEEI and FT indeed are covered. In contrast, the big idea GA is not represented in the Central content in Grades 1-6. This is reflected in the classification of the algebraic content of the two textbook series. The two textbook series consist of almost the exact same number of total pages, but algebraic content is better represented in one of them. Furthermore, a very small number of pages with algebraic content were classified as GA in the first textbook series. In the other textbook series, more pages, but still quite few, were classified as GA. A similar difference was found between the proportions of pages classified as FT in Grades 1-3. Instead, most of the algebraic content in the first textbook series was classified as EEEI. These results also show that there are big differences between the two textbook series, both regarding pages with algebraic content and the proportion of pages classified as GA, FT or EEEI.

The second sub-study, Primary school students' knowledge of the equal sign, revealed big differences between the students' knowledge levels depending on which school they attend. However, several students, regardless of which school they attend, know that the equal sign does not mean the answer to the problem. In fact, three times as many Swedish students in Grade 6 than South Korean students in the same grade state "the equal sign means the answer to the problem" is not a good definition of the equal sign. Fewer students can use the relational structure of an equality to solve problems such as $43 + __ = 48 + 76$. Compared with the results from the study by Pang and Kim (2018) we see that South Korean students in general perform better than the Swedish students in Grade 3. On the other hand, in Grade 6 students in two of the three Swedish schools perform as well as or even better than the South Korean students on some test items regarding the usage of the relational structure of an equality.

Discussion

Even though much of the early algebra research has matured around the Big ideas of Algebra, the Big ideas not only can be used as a framework for early algebra but the ideas can also be identified in abstract algebra at the university level. In particular, I identify GA as the core Big idea in my mathematics research on eight-dimensional real quadratic division algebras, that is, GA is truly present in abstract algebra.

In sharp contrast to this, the results of the first sub-study show that GA is not present in the Swedish mathematics curriculum and not well represented in the textbook series. On the other hand, EEEI is well represented in both the mathematics curriculum and in the textbook series. Furthermore, this means

that variables are often treated as placeholders or unknown numbers in the textbooks.

FT is also well represented in one of the textbooks series in Grades 1-3 and in both textbook series in Grades 4-6. Most of the tasks related to FT is in the form of patterns, which is present in all six grades. This implies that a partly functional approach to algebra (Cai et al., 2010) can be identified in both the Swedish mathematics curriculum and at least in one of the two textbook series. However, since EEEI is even more well represented, this is not the sole approach to algebra in the Swedish context. The Swedish students are able to describe the definition of the equal sign in words, but might not be able to use the relational structure of an equality. This points to the importance of connecting definitions and theories to procedures, a connection which might not be present in the Swedish case.

Since the Swedish mathematics curriculum and the textbooks are focusing on functions and equations rather than generalizations, this may imply that Swedish students do not get opportunities to generalize in mathematics. Therefore, they might not discover the connection between arithmetic and algebra, which is the core idea behind early algebra. Even though early algebra is present in the Swedish context, this implies that generalizations could be better emphasized in the Swedish curriculum to further promote early algebra.

Referenser

Alibali, M. W., Knuth, E., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. (2007). A Longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations, *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 221–247. DOI: 10.1080/10986060701360902

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What is – or might be – the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational Researcher, 25*(9), 6–8, 14. DOI: 10.3102/0013189X025009006

Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 115–131. DOI: 10.2307/30034952

Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 129–136). Melbourne: University of Melbourne.

Bastable, V., & Schifter, D. (2008). Classroom stories: examples of elementary students engaged in early algebra. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 165–184). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). *Nämnaren tema: Algebra för alla*. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikdidaktik (NCM).

Bergwall, A., & Hemmi, K. (2017). The state of proof in Finnish and Swedish mathematics textbooks – Capturing differences in approaches to upper secondary integral calculus. *Mathematical Thinking and Learning, 19*(1), 1–18. DOI: 10.1080/10986065.2017.1258615

Blanton, M., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E., & Murphy Gardiner, A. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships, *Educational Studies in Mathematics*, *102*, 193–219.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446. DOI: 10.2307/30034944

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. In R. M. Zbiek (Series Ed.), *Essential understanding series*. Reston, VA: NCTM

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: the impact of comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87. DOI: 10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Murphy Gardiner, A., Stylianou, D. A., Knuth, E., Isler-Baykal, I., & Strachota, S. (2019). Does early algebra matter? The effectiveness of an early algebra intervention in grades 3 to 5. *American Educational Research Journal, 5*, 1930–1972. DOI: 10.3102/0002831219832301

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Bahaviour, 33*(1), 72–87. DOI: 10.1016/j.jmathb.2013.10.001

Boone, W. J., Staver, J. R., & Yale, M. S. (2014). *Rasch analysis in the human sciences*. Dordrecht: Springer.

Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F., & Paré-Blagoev, E. J. (2014). Persistent and pernicious errors in algebraic problem solving. *The Journal of Problem Solving, 7*(1), 10–23.

Britt M. S., & Irwin, K. C. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study, *ZDM, 40*, 39–53. DOI: 10.1007/s11858-007-0064-x

Britt M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 137–159). Berlin: Springer.

Brown, M. W. (2009). The teacher – tool relationship. Theorizing the design and use of curriculum materials. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work. Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17–36). New York: Routledge.

Bryman, A. (2012). *Social Research Methods* (4th ed.). Oxford: Oxford University Press.

Bråting, K. (2019). Development of school algebra – a comparison between the 1980 and 2011 Swedish mathematics curricula. In E. Barbin, U. T. Jankvist, T. Hoff Kjeldsen, B. Smestad, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education ESU 8. OsloMet Skriftserie 2019 nr 11* (pp. 711–726). Oslo: Metropolitan University.

Bråting K., & Kilhamn, C. (2020). Exploring the intersection of algebraic and computational thinking, *Mathematical Thinking and Learning*. Advanced online publication. DOI: 10.1080/10986065.2020.1779012

Bråting, K., Sollervall, H., & Stadler, E. (2017). *Algebra för lärare*. Lund: Studentlitteratur.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(1), 35–49. DOI: 10.2307/748986

Cai, J., Lew, H., Morris, A., Moyer, J., Fong Ng, S., & Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades. *ZDM, 37*(1), 5–15. DOI: 10.1007/BF02655892

Cai, J., & Moyer, J. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: Some insights from international comparative studies. In C. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *70th Yearbook Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 69–182). Reston, VA: NCTM.

Cai, J., Nie, B., & Moyer, J. C. (2010). The teaching of equation solving: approaches in Standards-based and traditional curricula in the United States. *Pedagogies: An International Journal, (5)*3, 170–186. DOI: 10.1080/1554480X.2010.485724

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. Research report.* Columbus: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 470 471). https://eric.ed.gov/?id=ED470471

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 669–705). Charlotte: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Primaria (6–12 años) en Estados Unidos. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 479–522. DOI: 10.1080/02103702.2019.1638570

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87–115. DOI: 10.2307/30034843

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235–272). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Carss, M. (Ed.) (1986). *Proceedings of the fifth international congress on mathematical education*. New York: Springer.

Cepeda, N. J., Pashler, H., Vul, E., Wixted, J. T., & Rohrer, D. (2006). Distributed practice in verbal recall tasks: A review and quantitative synthesis. *Psychological Bulletin, 132*(3), 354–380. DOI: 10.1037/0033-2909.132.3.354

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2014). Didactic transposition in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer. DOI: 10.1007/978-94-007-4978-84_8

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1), 16–30. DOI: 10.2307/748434

Cohen, D. K., & Loewenberg Ball, D. (1990). Relations between policy and practice: a commentary. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 12*(3), 331–338. DOI: 10.3102/01623737012003331

Copur-Gencturk, Y. (2015). The effects of changes in mathematical knowledge on teaching: a longitudinal study of teachers' knowledge and instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(3), 280–330. DOI: 10.5951/jresematheduc.46.3.0280

Corle, C. G. (1964). The new mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *11*(4), 242–247.

Darpö, E., & Dieterich, E. (2007). Real commutative division algebras. *Algebras and Representation Theory, 10*(2), 179–196. DOI: 10.1007/s10468-006-9040-3

Davis, J. D. (2012). An examination of reasoning and proof opportunities in three differently organized secondary mathematics textbook units. *Mathematics Education Research Journal, 24*(4), 467–491. DOI: 10.1007/s13394-012-0047-2

Davis, R. B. (1985). ICME-5 report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior,* 4, 195–208.

Davis, R. B. (1995). Why are they changing school algebra and who's doing it? *Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 1–3.

Davydov, V. V. (1990). *Soviet studies in mathematics education, Vol. 2, types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula*. Reston, VA: NCTM.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study*. New York: Nova Science Publishers.

Dieterich, E., & Rubinsztein, R. (2010). The degree of an eight-dimensional real quadratic division algebra is 1, 3, or 5. *Bulletin Des Sciences Mathématiques, 134*(5), 447–453. DOI: 10.1016/j.bulsci.2009.10.001

Dieterich, E., & Öhman, J. (2002). On the classification of 4-dimensional quadratic division algebras over square-ordered fields, *Journal of the London Mathematical Society, 65*(2), 285–302. DOI: 10.1112/S0024610701003064

Dunlosky, J., Rawson, K. A., Marsh, E. J., Nathan, M. J., & Willingham, D. T. (2013). Improving students' learning with effective learning techniques: Promising directions from cognitive and educational psychology. *Psychological Science in the Public Interest, 14*, 4–58. DOI: 10.1177/1529100612453266

Eggen, P. D., & Kauchak, D. (2004). *Educational psychology: windows on classroom.* Upper Saddle River, N.J.: Merrill Prentice Hall.

Ely, R., & Adams, A.E. (2012). Unknown, placeholder, or variable: What is x? *Mathematics Education Research Journal, 24*, 19–38. DOI: 10.1007/s13394-011-0029-9

Engvall, M. (2013). *Handlingar i matematikklassrummet. En studie av undervisningsverksamheter på lågstadiet då räknemetoder för addition och subtraktion är i fokus*. (Diss. Linköpings universitet, 2013:178). Linköpings Universitet.

Eriksson, I., & Jansson, A. (2017). Designing algebraic tasks for 7-year-old students: a pilot project inspired by Davydov's learning activity concept. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 18*(2), 257–272.

Fraleigh, J. B. (1999). *A first course in abstract algebra* (6th ed.). Reading, Mass: Addison-Wesley.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19–25.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Boston/Lancaster: Dordrecht.

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: the role of the quasi-variables. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: the future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1, pp. 258–264). The University of Melbourne.

Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: seventieth yearbook* (pp. 127-140). Reston, VA: NCTM.

Gattegno, C. (1974). *The common sense of teaching mathematics*. New York: Educational solutions.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press. (Original work published 1978)

Gelman, R., Meck, E., & Merkin, S. (1986). Young children's numerical competence. *Cognitive Development, 1*, 1–29.

Givant, S. R., & Halmos, P. R. (2009). *Introduction to boolean algebras*. New York: Springer.

Givvin, K. B., Geller, E. H., & Stigler, J. W. (2019). How teachers introduce algebra and how it might affect students' beliefs about what it means to "do" mathematics. In C. Kilhamn, & R. Säljö (Eds.), *Encountering Algebra: A Comparative Study of Classrooms in Finland, Norway, Sweden, and the USA* (pp. 139–164). Cham: Springer.

Goodlad, J.I., Klein, M.F., & Tye, K.A. (1979). The domains of curriculum and their study. In J.I. Goodlad (Ed.), *Curriculum inquiry* (pp. 43–76). New York: McGraw-Hill.

Hanna, G., & de Bruyn, Y. (1999). Opportunity to learn proof in Ontario grade twelve mathematics texts. *Ontario Mathematics Gazette, 37*(4), 23–29.

Hemmi, K., Bråting, K., & Lepik, M. (2020). Curricular approaches to algebra in Estonia, Finland and Sweden – a comparative study. *Mathematical Thinking and Learning*. Advanced online publication. DOI: 10.1080/10986065.2020.1740857

Hemmi, K., Bråting, K., Liljekvist, Y., Prytz, J., Madej, L., Pejlare, J., & Palm Kaplan. K. (2018). Characterizing Swedish school algebra – initial findings from analyses of steering documents, textbooks and teachers' discourses. In E. Norén, H. Palmér & A. Cooke (Eds.), *Nordic research in mathematics education. Papers of NORMA 17* (pp. 299–308). Gothenburg: SMDF.

Hemmi, K., Krzywacki, H., & Liljekvist, T. (2019). Challenging traditional classroom practices: Swedish teachers' interplay with Finnish curriculum materials. *Journal of Curriculum Studies, 51*(3), 342–361. DOI: 10.1080/00220272.2018.1479449

Hemmi, K,. Lepik, M., Madej, L., Bråting, K., & Smedlund, J. (2019). Introduction to early algebra in Estonia, Finland and Sweden – Some distinctive features identified in textbooks for Grades 1-3. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11, February 6 – 10, 2019)* (pp. 2039–2046). Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Hemmi, K., & Ryve, A. (2015). The culture of the mathematics classroom during the first school years in Finland and Sweden. In B. Perry, A. Gervasoni, & A. MacDonald (Eds.), *Mathematics and transition to school – International perspectives* (pp. 185–198). Singapore: Springer. DOI: 10.1007/978-981-287-215-9_12

Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable? *Educational Studies in Mathematics, 81*, 139–159. DOI: 10.1007/s10649-012-9394-x

Hewitt, D. (2014). A symbolic dance: the interplay between movement, notation and mathematics on a journey toward solving equations. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(1), 1–31.

Hiebert, J. S., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Hiebert, J. S., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. S., Stiegler, J. W., Jacobs, J. K., Bogard Givvin, K., Garnier H., Garnier, H., Smith, M., Hollingsworth, H., Manaster, A., Wearne, D, & Gallimore, R. (2005). Mathematics teaching in the United States today (and tomorrow): Results from the TIMSS 1999 video study. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 27*(2), 111–132.

Häggström, J., Kilhamn, C., & Fredriksson, M. (2019). *Algebra för grundskolan*. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikdidaktik (NCM).

Irwin, K.C., & Britt, M.S. (2005). The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zealand Numeracy project. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 169–188. DOI: 10.1007/s10649-005-2755-y

Jablonka, E., & Johansson, M. (2010). Using texts and tasks: Swedish studies on mathematics textbooks. In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Palsdottir, B. Dahl, B.D. Söndergaard & L. Haapasalo (Eds.), *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education* (pp. 363–372). Charlotte: Information Age Publishing.

Jacob, B. (1995). *Linear functions and matrix theory*. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4612-4218-5

Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks*. Diss., Luleå tekniska universitet, Luleå.

Kaas, T. (2019). Tilgange til tidlig algebra. *Nordic Studies in Mathematics Education, 24* (3-4), 15–41.

Kamii, C. (1982). *Number in preschool and kindergarten: Educational implications of Piaget's theory*. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.

Kaput, J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? In D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 71-94). Columbus: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 389 539). https://eric.ed.gov/?id=ED389539

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Kay, S. (2013). America's Sputnik moments. *Survival*, *55*(2), 123–146. DOI: 10.1080/00396338.2013.784470

Ki, J. S., & Cheong, Y. O. (2008). The analysis of elementary school students' understanding of the concept of equality sign in contexts and the effects of its teaching methods [in Korean with English abstract]. *School Mathematics, 10*(4), 539–557.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317–326. DOI: 10.1007/BF00311062

Kieran C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33–56). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York: Macmillian.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, Jr., (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Greenwich, CT: Information Age.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: a fundamental path to developing early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), & G. Kaiser (Series Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 79–105). Cham: Springer.

Kieran, C., Pang, J., Schifter D., & Fong Ng, S. (2016). *Early algebra: research into its nature, its learning, its teaching*. New York: Springer.

Kilborn, V. (1977). *Hej Läroplan! Hur man bestämmer vad våra barn ska lära sig i matematik*. Mölndal: Göteborgs universitet

Kilhamn, C. (2014). When does a variable vary? Identifying mathematical content knowledge for teaching variables. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19* (3-4), 83–100.

Kilhamn, C., Hillman, T., & Säljö, R. (2019). Participation and mathematization in introductory algebra classrooms: the case of Sweden. In C. Kilhamn, & R. Säljö (Eds.), *Encountering algebra: a comparative study of classrooms in Finland, Norway, Sweden, and the USA* (pp. 33–70). Cham: Springer.

Kilhamn, C., & Säljö, R. (Eds.) (2019). *Encountering algebra: a comparative study of classrooms in Finland, Norway, Sweden, and the USA*. Cham: Springer.
Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM, 44*, 563–571. DOI: 10.1007/s11858-012-0393-2
Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.
Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: The failure of the new math*. New York: St. Martin's Press.
Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A., & Stephens, A. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: equivalence and variable. *ZDM, 37*(1), 68–76. DOI: 10.1007/BF02655899
Koljonen, T. (2017). Finnish teaching materials in the hands of a Swedish teacher: the telling case of Cecilia. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 10* (pp. 1626–1633). http://hal.Archives-ouvertes.fr/hal-01938185
Koljonen, T. (2019). Finnish and Swedish elementary school teachers' interplay with Finnish curriculum resources: An attempt at unravelling tacit cultural practices. In S. Rezat, L. Fan, M. Hattermann, J. Schumacher, & H. Wuschke (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference on Mathematics Textbook Research and Development,* ICMT 3 (pp. 61–66). DOI: 10.17619/UNIPB/1-768
Lam, T. Y. (2003). Hamilton's quarternions. In M. Hazewinkel (Ed.), *Handbook of Algebra Volume 3* (pp. 429–454). Amsterdam: Elsevier.
Lang, S. (1987). *Linear algebra* (3rd ed.). Berlin: Springer
Landahl, J. (2017). Kris och internationella jämförelser. In J. Landahl & C. Lundahl (Eds.) *Bortom Pisa: internationell och jämförande pedagogik* (pp. 41–64). Stockholm: Natur & Kultur.
Laursen, K. W. (1978). Errors in first-year algebra. *Mathematics Teacher, 71*, 194–195. https://www.jstor.org/stable/27961205
Lenz, T. (2015). Contesting education: media debates and the public sphere in Luxembourg. In D. Tröhler & T. Lenz (Eds.), *Trajectories in the development of modern school system – between the national and the global* (pp. 174–182). New York and London: Routledge.
Li, X., Ding, M., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2008). Sources of differences in children's understandings of mathematical equality: Comparative analysis of teacher guides and student texts in China and the United States. *Cognition and Instruction*, *26*, 195–217. DOI: 10.1080/07370000801980845
Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 234–241. DOI: 10.2307/749754
Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 113–120. DOI: 10.1016/0732-3123(95)90026-8
Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operating on unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 39–65. DOI: 10.1007/BF00163752
Lindensjö, B., & Lundgren, U. P. (2000). *Utbildningsreformer och politisk styrning*. Stockholm: HLS förlag.
Lindström, S. (1968). *Överteoretisering av den elementära matematikundervisningen: en kritisk granskning av förslaget till studieplan i matematik för grundskolans låg- och mellanstadium*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Lloyd, G. M., Remillard, J. T., & Herbel-Eisenmann, B. A. (2009). Teacher's use of curriculum materials: an emerging field. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 3–14). New York: Routledge.

Markworth, K. A. (2016). A repeat look at repeating patterns. *Teaching Children Mathematics, 23*(1), 22–29. DOI: 10.5951/teacchilmath.23.1.0022

Martin, M. O., Mullis, I. V. S., & Hooper, M. (Eds.). (2016). *Methods and procedures in TIMSS 2015*. https://timssandpirls.bc.edu/publications/timss/2015-methods/T15-Methods-and-Procedures-TIMSS-2015.pdf

Martin, M. O., Mullis, I. V. S., & Hooper, M. (Eds.). (2017). *Methods and procedures in PIRLS 2016*. https://timssandpirls.bc.edu/publications/pirls/2016-methods/P16_Methods_and_Procedures.pdf

Matthews, P. G., & Fuchs, L. S. (2020). Keys to the gate? Equal sign knowledge at second grade predicts fourth-grade algebra competence. *Child Development, 91*(1), e14–e28. DOI: 10.1111/cdev.13144

Matthews, P. G., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K. L., & Taylor, R. S. (2012). Measure for measure: what combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 316–350. DOI: 10.5951/jresematheduc.43.3.0316

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Consuelo Cañadas, M., & Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1137–1156. DOI: 10.1007/s10763-016-9739-5

Monroe, W. S. (1915). A test of the attainment of first-year high-school students in algebra. *School Review, 23*, 159–171. DOI: 10.1007/s10763-016-9739-5

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International results in mathematics.* Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results.

Murray, Å., & Liljefors, R. (1983). *Matematik i svensk skola*. Stockholm: Liber Utbildning.

Neuman, J., Hemmi, K., Ryve, A. & Wiberg M. (2015). Mathematics textbooks' impact on classroom instruction: examining the views of 278 Swedish teachers. In H. Silfverberg, T. Kärki, & M. Hannula (Eds.), *Proceedings of the 7th Nordic Conference on Mathematics Education*, *NORMA 14* (pp. 215–224). Turku: University of Turku.

Nicole, C. C., & Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interact and use curriculum materials. Educational studies in mathematics, 62(3), 331–355. DOI: 10.1007/s10649-006-5423-y

Olofsson, J., & Lundahl, L (2013). Unga möter ökade sociala risker: En bakgrund om ungdomsarbetslöshet och utanförskap. *Socialmedicinsk tidskrift, 90*(5), 733–742.

The Organisation for Economic Co-operation and Development (2009). *PISA Data Analysis Manual: SAS, Second Edition*. DOI: 10.1787/9789264056251-en

Pang, J. (2013). Current elementary mathematics textbooks. In J. Kim, I. Han, M. Park, & J. Lee (Eds.), *Mathematics education in Korea: curricular and teaching and learning practices* (pp. 43–61). Singapore: World Scientific.

Pang, J., & Kim, J. (2018). Characteristics of Korean students' early algebraic thinking: a generalized arithmetic perspective. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds, ICME-13 monographs* (pp. 141-165). Cham: Springer.

Pehkonen, L., Hemmi, K., Krzywacki, H., & Laine, A. (2018). A cross-cultural study of teachers' relation to curriculum materials. In, E. Norén, H. Palmér & A. Cooke (Eds.), *Nordic research in mathematics education. Papers of NORMA 17* (pp. 299–308). Gothenburg: SMDF.

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. New York: Norton.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 73–93. DOI: 10.1007/s10857-009-9119-y

Prytz, J. (2017). Nya matematiken – revolutionen som uteblev: En reform i övergången från centraliserad tilldecentraliserad styrning av skolan, 1960–1980. In A. Berg, E. Larsson, M. Michaëlsson, J. Westberg, & A. Åkerlund (Eds.), *Utbildningens revolutioner: Till studiet av utbildningshistorisk förändring* (pp. 189–210). Uppsala: Uppsala Studies of History and Education (SHED).

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds, ICME-13 monographs* (pp. 3-25). Cham: Springer.

Rasch, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests.* Copenhagen: Danish Institute for Educational Research.

Recorde, R. (1557). *The whetstone of witte whiche is the seconde parte of arithmetike: Containyng thextraction of rootes: The cossike practise, with the rule of equation: And the woorkes of surde nombers. though many stones doe beare greate price, the whetstone is for exersice ... and to your self be not vnkinde*. London: Ihon Kyngstone. Retrieved 2020-06-22 from https://search.proquest.com/docview/2240911140

Reinhardtsen, J. (2020). *Student meaning making in elementary algebra teaching - An in-depth study of classrooms in four countries* (no. 258). [Doctoral dissertation, University of Agder]. https://hdl.handle.net/11250/2655388

Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text. *The Elementary School Journal, 100*(4), 331–350. https://www.jstor.org/stable/1002145

Remillard, J. T., Harris, B., & Agodini, R. (2014). The influence of curriculum material design on opportunities for student learning. ZDM, 46(5), 736–749. DOI: 10.1007/s11858-014-0585-z

Renvick, E. M. (1932). Children's misconceptions concerning the symbols for mathematical equality. *British Journal of Educational Psychology, 2*, 173–183.

Resnik, M. D. (1981). Mathematics as a science of patterns: ontology and reference. *Noûs, 15*(4), 529–550. DOI: 10.2307/2214851

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91*(1), 175–189. DOI: 10.1037/0022-0663.91.1.175

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., & Taylor, R. S. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: a construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 85–104. DOI: 10.1037/a0021334

Ryve, A., & Hemmi, K. (2019). Educational policy to improve mathematics instruction at scale: Conceptualizing contextual factors. *Educational Studies in Mathematics, 102*(3), 379–394. DOI: 10.1007/s10649-019-09887-6

Röj-Lindberg, A-S, & Partanen, A-M. (2019). Learing to solve equations in three Swedish-speaking classrooms in Finland. In C. Kilhamn, & R. Säljö (Eds.), *Encountering algebra: a comparative study of classrooms in Finland, Norway, Sweden, and the USA* (pp. 139–164). Cham: Springer.

Schleicher, A. (2019). *PISA 2018 – insights and interpretations*. OECD. https://www.oecd.org/pisa/PISA%202018%20Insights%20and%20Interpretations%20FINAL%20PDF.pdf

Schoenfeld, A. H. (1995). Is thinking about 'algebra' a misdirection? In C. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium. Volume 2: Working group papers* (pp. 83–86). Washington, DC: U.S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement, National Institute on Student Achievement, Curriculum, and, Assessment. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385437.pdf

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511499944

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher, 26*(3), 9–15.

Skolverket (2008). *TIMSS 2007 – huvudrapport. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Author.

Skolverket (2012). *TIMSS 2011 – huvudrapport. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Author.

Skolverket (2016). *TIMSS 2015 – huvudrapport. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Author.

Skolverket (2017a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: reviderad 2017*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2017b). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik: reviderad 2017*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2018). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: reviderad 2018*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2019). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: reviderad 2019*. Stockholm: Skolverket.

SOU 1963:42 (1963). *1960 års gymnasieutredning: 4, ett nytt gymnasium*. Stockholm: Ecklesiastikdep.

Sousa, D. A. (Ed.) (2017). *How the brain learns mathematics*. Thousand Oaks, CA: Corwin.

Sriraman, B., Bergsten, C., Goodchild, S., Pálsdóttir, G., Dahl, B., & Haapasalo, L. (Eds.) (2010). *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education*. Charlotte: Information Age.

Stacey, K., & MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 149–167. DOI: 10.1016/S0732-3123(99)00026-7

Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404–411. DOI: 10.2307/30034943

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50–80. DOI: 10.1080/1380361960020103

Stein, M. K., Remillard, J. T., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influence student learning. In F.K. Lester Jr. (Eds.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 319–369). Charlotte: Information Age Publishing.

Stephens, A. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? *Journal of Mathematical Behavior, 27*, 33–47. DOI: 10.1016/j.jmathb.2007.12.002

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 258–288. DOI: 10.1080/10986060903253954

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(4), 307-332. DOI: 10.1007/s10857-008-9077-9

Swan, M. (2000). Making sense of algebra. *Mathematics Teaching, 171*, 16–19.

Tall, D. O., Lima, R. N., & Healy, L. (2014). Evolving a three-world framework for solving algebraic equations in the light of what a student has met before. *The Journal of Mathematical Behavior, 34*, 1–13. DOI: 10.1016/j.jmathb.2013.12.003

Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chávez, O., Shih, J., & Osterlind, S. J. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 247–280. https://eric.ed.gov/?id=EJ790456

Theis, L. (2005). L'Apprentissage du signe = : un obstacle cognitif important. *For the Learning of Mathematics, 25*(3), 7–12.

Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 253–295. DOI: 10.5951/jresematheduc.43.3.0253

Tossavainen, T., Attorps, I. & Väisänen, P. (2011). On mathematics students' understanding of the equation concept. *Far East Journal of Mathematical Education, 6*(2), 127–147.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 44–55.

Unenge, J. (1999). *Skolmatematiken i går, i dag och i morgon: med mina ögon sett*. Stockholm: Natur och Kultur.

UNICEF (2018). *An unfair start - inequality in children's education in rich countries*. https://www.unicef.org/publications/files/UNICEF-An-unfair-start-inequality-children-education_En.pdf [Retrieved 2020-04-29]

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A.F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook* (pp. 8–19). Reston, VA: NCTM.

Valverde, G., Bianchi, L. J., Wolfe, R., Schmidt, W. H., & Hounang, R. T. (2002). *According to the book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. New York: Springer-Verlag.

Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions, *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *21*(2), 136-147. DOI: 10.1080/18117295.2017.1321343

Vetenskapsrådet (2011). *God forskningssed*. https://www.vr.se/download/18.2412c5311624176023d25b05/1555332112063/God-forskningssed_VR_2017.pdf

Vincent, J., Bardini, C., Pierce, R., & Pearn, C. (2015). Misuse of the equals sign: an entrenched practice from early primary years to tertiary mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal, 29*(2), 31-39.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman., Eds.) (A. R. Luria, M. Lopez-Morillas & M. Cole [with J. V. Wertsch], Trans.). Cambridge, MA: Harvard University Press. (Original manuscripts [ca. 1930-1934])

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language* (A. Kozulin, Trans., Rev. and Ed.). Cambridge, MA: MIT Press. (Original work published 1934)

Wagner S., & Kieran, C. (Eds.) (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: NCTM.

Yang Hansen, K., & Gustafsson, J-E. (2016). Causes of educational segregation in Sweden – school choice or residential segregation. *Educational Research and Evaluation*, *22*(1-2), 23-44. DOI: 10.1080/13803611.2016.1178589

Yang Hansen, K., & Gustafsson, J-E. (2019). Identifying the key source of deteriorating educational equity in Sweden between 1998 and 2014. *International Journal of Educational Research*, *93*, 79-90. DOI: 10.1016/j.ijer.2018.09.012

Bilaga 1: Test använt vid delstudie 2

Nedanstående test är hämtat från Matthews m fl (2012) och översatt till svenska samt anpassat till ett svenskt sammanhang i Artikel VII. I denna bilaga är av utrymmesskäl alla *tomrum* där eleverna kan skriva lösningar och motiveringar borttagna samt alla *rutor* ersatta med ett tomrum i form av ”__”.

1. Vilka av följande likheter är sanna eller falska? Med andra ord, stämmer likheten?
Efter varje påstående, ringa in Sant, Falskt eller Vet inte.
Exempel:

	3 + 4 = 7	Sant(inringat)	Falskt	Vet inte
	3 + 4 = 12	Sant	Falskt(inringat)	Vet inte
a)	5 + 3 = 8	Sant	Falskt	Vet inte
b)	3 = 3	Sant	Falskt	Vet inte
c)	5 + 5 = 5 + 6	Sant	Falskt	Vet inte
d)	31 + 16 = 16 + 31	Sant	Falskt	Vet inte
e)	7 + 6 = 6 + 6 + 1	Sant	Falskt	Vet inte
f)	6 = 6 + 0	Sant	Falskt	Vet inte

2. Vilka av följande likheter är sanna eller falska? Förklara hur du vet det.

a)	7 = 3 + 4	Sant	Falskt	Vet inte
b)	6 + 4 = 5 + 5	Sant	Falskt	Vet inte

3. Utan att addera 67 + 86, kan du säga om likheten nedan är sann eller falsk?
67 + 86 = 68 + 85

Sant Falskt Vet inte utan att addera

Hur vet du det?

4.
a) Skriv tal som passar i de två rutorna.
8 + 2 + __ = 10 + __

b) Fungerar det med andra tal i rutorna? JA NEJ

Förklara varför eller varför inte.

5. 17 + 12 = 29 är sant. Är 17 + 12 + 8 = 29 + 8 sant eller falskt?
Sant Falskt Vet inte
Hur vet du det?

6. 2 · 3 = 6 är sant. Är 2 · 3 · 4 = 6 · 4 sant eller falskt?
Sant Falskt Vet inte
Hur vet du det?

7. Utan att subtrahera 7, kan du säga om likheten nedan är sann eller falsk?
56 + 85 = 141 är sant.
Är 56 + 85 – 7 = 141 – 7 sant eller falskt?
Sant Falskt Vet inte utan att subtrahera
Hur vet du det?

8. Är talet som passar i rutan samma tal i båda likheterna?
2 · = 58 8 · 2 · = 8 · 58
Ja Nej Vet inte
Hur vet du det?

9. Vad betyder likhetstecknet (=) ? Kan det betyda något annat?

10. Vilket eller vilka av följande uttryck är lika med 6 + 4 ? Ringa in ditt svar
a) 5 + 5
b) 4 + 10
c) 1 + 2
d) Inget av uttrycken

11. Vilket av alternativen nedan skulle du skriva i rutan för att visa att 15 minuter är samma som en kvart? Ringa in ditt svar.
15 min __ en kvart
a. ¼
b. =
c. +
d. Vet inte

12. Är detta en bra definition av likhetstecknet? Ringa in Bra eller Inte bra.

a.	Likhetstecknet betyder ”samma som”	Bra	Inte Bra
b.	Likhetstecknet betyder ”lägga till”	Bra	Inte Bra
c.	Likhetstecknet betyder ”svaret på uppgiften”	Bra	Inte Bra

13. Vilken av definitionerna i uppgift 12 är den bästa? Skriv a, b eller c i rutan. __

14.

a. Är detta påstående sant eller falskt?
1 krona = 100 öre

Sant Falskt Vet inte

b. Vad betyder detta likhetstecken?

INSTRUKTIONER: Vilket tal passar i de olika rutorna?

15. 3 + 4 = __

16. 4 + __ = 8

17. 8 = 6 + __

18. 3 + 4 = __ + 5

19. __ + 2 = 6 + 4

INSTRUKTIONER: I följande uppgifter vill vi att du förklarar hur du tänkt. Vilket tal passar i de olika rutorna?

20. 7 + 6 + 4 = 7 + __

21. 8 + __ = 8 + 6 + 4

22. 6 – 4 + 3 = __ + 3

INSTRUKTIONER: Vilket tal passar i de olika rutorna? Du kan försöka hitta en genväg så du slipper addera alla tal. Skriv ner dina beräkningar eller hur du har tänkt.

23. 898 + 13 = 896 + __

24. 43 + __ = 48 + 76

25. Bestäm värdet på z. Med andra ord, vilket värde på z gör att likheten stämmer?
$10 = z + 6$

26. Bestäm värdet på n.
$n + n + n + 2 = 17$

27. Bestäm värdet på m.
$m + m + m = m + 12$

Acta Universitatis Upsaliensis

Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Educational Sciences 23

Editor: The Dean of the Faculty of Educational Sciences

A doctoral dissertation from the Faculty of Educational Sciences, Uppsala University, is usually a summary of a number of papers. A few copies of the complete dissertation are kept at major Swedish research libraries, while the summary alone is distributed internationally through the series Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Educational Sciences. (Prior to January, 2005, the series was published under the title "Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Educational Sciences".)

Distribution: publications.uu.se
urn:nbn:se:uu:diva-425573

ACTA
UNIVERSITATIS
UPSALIENSIS
UPPSALA
2021